1974 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск I4(31)
Модели динамики и равновесия

УДК 338.984.57(104)

ОБ УСЛОВИЯХ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.П.Бусыгин

В работе рассматривается вопрос о существовании решений системы нелинейных уравнений, являющейся аналогом системы затраты-выпуск леонтьевского типа [I].

Пусть K - выпуклый конус векторного пространства X ; P - отображение конуса K в себя; ℓ - функционал, заданный на конусе K и принимающий неотрицательные значения; S - отображение, определенное на множестве неотрицательных чисел R^+, со значениями в конусе K. Нас будет интересовать разрешимость следующей системы уравнений:

$$x = P(x) + S(\lambda), \tag{I}$$

$$\ell(x) = L, \tag{2}$$

где L - заданное неотрицательное число. Для каждого $\lambda \in R_+$ под Ω_λ будем понимать множество всех решений соответствующего уравнения (I). В дальнейшем будем предполагать существование величин λ_1, λ_2 таких, что $\lambda_1 \leq \lambda_2$ и множества $\Omega_{\lambda_1}, \Omega_{\lambda_2}$ непусты, причем для некоторого $x_1 \in \Omega_{\lambda_1}$ и для всех $x \in \Omega_{\lambda_2}$ справедливы неравенства:

$$\ell(x_1) \leq L, \quad \ell(x) \geq L.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть X - банахово пространство; K - замкнутый конус; пусть далее отображение S и функционал ℓ непрерывны, а оператор

P является сжимающим, т. е. при некотором $q\in[0,1]$ для всех x, $y\in K$ имеет место неравенство:

$$\|P(x)-P(y)\|\leq q\|x-y\|.$$

Тогда найдутся $\bar{\lambda}\in[\lambda_1,\lambda_2]$ и $\bar{x}\in\Omega_{\bar{\lambda}}$ такие, что $\ell(\bar{x})=L$, т. е. система уравнений (1) и (2) разрешима.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предположений относительно оператора P и конуса K при каждом $\lambda\in R_+$ множество решений соответствующего уравнения (1) непусто и состоит из одного элемента. Рассмотрим вспомогательное отображение $F:R_+\to K$, сопоставляющее каждому $\lambda\in R_+$ единственный элемент множества Ω_λ. При любых λ', λ'' имеем:

$$\|F(\lambda')-F(\lambda'')\|=\|P(F(\lambda'))+S(\lambda')-P(F(\lambda''))-S(\lambda'')\|\leq$$

$$\leq\|P(F(\lambda'))-P(F(\lambda''))\|+\|S(\lambda')-S(\lambda'')\|\leq$$

$$\leq q\|F(\lambda')-F(\lambda'')\|+\|S(\lambda')-S(\lambda'')\|.$$

Следовательно, $\|F(\lambda')-F(\lambda'')\|\leq\dfrac{\|S(\lambda')-S(\lambda'')\|}{1-q}$,

где q - соответствующая константа из определения сжимающего отображения. Поэтому отображение F является непрерывным. Но тогда непрерывной будет также суперпозиция $\hat{\ell}=\ell\circ F$ функционала ℓ и отображения F. Отсюда и из определения чисел λ_1, λ_2 следует существование $\bar{\lambda}\in[\lambda_1,\lambda_2]$ такого, что $\hat{\ell}(\bar{\lambda})=$ $=\ell(F(\bar{\lambda}))=L$. А это означает, что пара $(\bar{\lambda}, F(\bar{\lambda}))$ является решением системы (1) и (2).

В рассмотренной ситуации вспомогательное отображение F оказалось однозначным. В общем случае отображение F, сопоставляющее каждому $\lambda\in[\lambda_1,\lambda_2]$ множество Ω_λ решений уравнения (1), является многозначным. Предположим, однако, что нам удалось задать на K топологию, в которой функционал ℓ непрерывен, и извлечь из многозначного отображения $F:\lambda\to\Omega_\lambda$ непрерывный селектор, т.е. построить непрерывное однозначное отображение $f:[\lambda_1,\lambda_2]\to K$ такое, что $f(\lambda)\in F(\lambda)$. Тогда, учитывая свойство чисел λ_1, λ_2, мы найдем $\bar{\lambda}\in[\lambda_1,\lambda_2]$ - корень уравнения $(\ell\circ f)(\lambda)-L=0$. Это означает, что пара $(\bar{\lambda}, f(\bar{\lambda}))$ является решением рассматриваемой задачи. Таким образом, условия, которые обеспечивают существование непрерывного селектора отображения F, являются достаточными для разрешимости системы (I) и (2).

В приводимых ниже предложениях 2 и 3 предполагается, что K является полуупорядоченным пространством Канторовича [2]. При этом в качестве K рассматривается конус положительных элементов в X.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть оператор P и отображение S являются монотонным и выпуклым, соответственно, а функционал ℓ монотонен и (O)-непрерывен. Тогда для разрешимости рассматриваемой задачи достаточно, чтобы при некотором $\lambda^* \in R_+$ таком, что $\lambda^* > \lambda_2$, уравнение (I) имело решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$. Тогда множество Ω_λ решений уравнения (I) при данном λ имеет наименьший элемент. Действительно, так как это множество ограничено снизу (например, элементом 0) и X - условно полная структура, то существует точная нижняя грань x°_λ множества Ω_λ. Тогда для любого $x \in \Omega$ справедливо соотношение $x \geqslant x^\circ_\lambda$, откуда в силу монотонности оператора P имеем $P(x) \geqslant P(x^\circ_\lambda)$. Таким образом, справедливо соотношение:

$$x = P(x) + S(\lambda) \geqslant P(x^\circ_\lambda) + S(\lambda),$$

т.е. $P(x^\circ_\lambda) + S(\lambda)$ является нижней гранью множества Ω_λ. А так как x°_λ - точная нижняя грань множества Ω_λ, то

$$x^\circ_\lambda \geqslant P(x^\circ_\lambda) + S(\lambda). \tag{3}$$

Покажем теперь, что для любого $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ элемент x°_λ является решением уравнения (I), т.е. в (3) достигается равенство. На основании теоремы Биркгофа-Тарского о неподвижной точке (см. [2], стр. 3I) найдется элемент $x^* \in K$, удовлетворяющий условиям $x^* \leqslant x^\circ$, $x^* = P(x^*) + S(\lambda)$. Но тогда $x^* \in \Omega_\lambda$ и поэтому $x^* = x^\circ_\lambda$.

Рассмотрим теперь отображение f, сопоставляющее каждому $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$ элемент $x^\circ_\lambda = \min \Omega_\lambda$.

Покажем его непрерывность в интервале $[\lambda_1, \lambda_2]$, используя следующие стандартные рассуждения. Пусть $\{\lambda^n\}$ - монотонно убывающая числовая последовательность, сходящаяся к $\lambda \in [\lambda_1, \lambda_2]$. Тогда убывающая последовательность $\{x_n\}$ точек конуса K вида

$$x_n = x^\circ_\lambda + \frac{\lambda^n - \lambda}{\lambda^1 - \lambda}(x^\circ_{\lambda^1} - x^\circ_\lambda) \tag{4}$$

(O) - сходится в точке x°_λ, так как в X выполнен принцип Архимеда ([2], стр. 81). При этом в силу выпуклости оператора P и отображения S справедливы соотношения:

$$P(x_n) + S(\lambda^n) = P(x^\circ_\lambda + \frac{\lambda^n - \lambda}{\lambda^1 - \lambda}(x^\circ_{\lambda^1} - x^\circ_\lambda)) +$$

$$+ S(x^\circ_\lambda + \frac{\lambda^n - \lambda}{\lambda^1 - \lambda}(x^\circ_{\lambda^1} - x^\circ_\lambda)) \leq$$

$$\leq (P(x^\circ_\lambda) + S(x^\circ_\lambda)) + \frac{\lambda^n - \lambda}{\lambda^1 - \lambda}[P(x^\circ_{\lambda^1}) + S(x^\circ_{\lambda^1})) -$$

$$-(P(x^\circ_\lambda + S(x^\circ_\lambda))] = x^\circ_\lambda + \frac{\lambda^n - \lambda}{\lambda^1 - \lambda}(x^\circ_{\lambda^1} - x^\circ_\lambda) = x_n,$$

которые показывают, что $x_n \in \Omega_{\lambda^n}$. Поэтому $x^\circ_\lambda \leq x^\circ_{\lambda^n} \leq x_n$, откуда вытекает сходимость последовательности $\{x^\circ_{\lambda^n}\} = \{f(\lambda^n)\}$ к точке $x^\circ_\lambda = f(\lambda)$ и, следовательно, полунепрерывность функции f справа в точке λ.

Если теперь убывающая числовая последовательность $\{\lambda'^n\}$ сходится к λ, то последовательность чисел $\{\lambda^n\}$, удовлетворяющих соотношению $\lambda = \frac{1}{2}\lambda'^n + \frac{1}{2}\lambda^n$, будет возрастать и также сходиться к λ. Далее, последовательность x'_n точек конуса K, построенная по формуле, аналогичной формуле (4), возрастающая и ограниченная и поэтому она имеет (O)-предел x°. Очевидно, $x^\circ \leq x^\circ_\lambda$.

С другой стороны, $x^\circ_\lambda = \frac{1}{2}x'_n + \frac{1}{2}x_n$ и, следовательно, $x^\circ_\lambda \leq \frac{1}{2}x^\circ_\lambda + \frac{1}{2}x^\circ$, так как, по уже доказанному,

$$(O) - \lim_{n\to\infty} x_n = x^\circ_\lambda .$$

Таким образом, $x^\circ = x^\circ_\lambda$, что означает полунепрерывность слева функции f в точке λ. Остается заметить, что

$\ell(x^\circ_{\lambda_1}) \le L$ в силу монотонности ℓ, так как $f(\lambda_1)=x^\circ_{\lambda_1} \le x_1$, где x_1 - точка из Ω_{λ_1}, участвующая в определении λ_1.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Если $\ell(x) \le L$ для всех $x \in \Omega_{\lambda_1}$ таких, что $x \le x_1$, то предложение 2 остается справедливым и без предположения о монотонности функционала ℓ. Поэтому оно справедливо, в частности, если $P(x_1)=0$, $\ell(0) \le L$.

В следующем предложении условие (0) - непрерывности функционала ℓ заменяется требованием его выпуклости и монотонности.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть оператор P, отображение S и функционал ℓ являются монотонными и выпуклыми. Тогда для разрешимости рассматриваемой задачи (I)-(2) достаточно, чтобы при некотором $\lambda^* \in R_+$ большем, чем λ_2, уравнение (I) имело решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В сделанных предположениях $\hat{\ell}=\ell \circ f$ - выпуклая функция, и поэтому она непрерывна во внутренности области определения (в частности, на интервале $(\lambda_1, \lambda_2]$). Непосредственно проверяется ее непрерывность в λ_1.

В заключение заметим, что аналогичные результаты могут быть получены для случая, когда оператор P, отображение S и функционал ℓ являются вогнутыми.

Литература

1. АГАНБЕГЯН А.Г., БАГРИНОВСКИЙ К.А., ГРАНБЕРГ А.Г. Система моделей народнохозяйственного планирования. М., "Наука", 1972.
2. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., ГИФМЛ, 1961.

Поступила в ред.-изд.отд.
6. XII. 1974 г.