1974 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 13(30)

УДК 513.88

О РАБОТАХ В ОБЛАСТИ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА

М.Л.Аграновский, Г.П.Акилов, Ю.М.Вувуникян, С.С.Кутателадзе

Светлой памяти
Рафаила Эвфраимовича Вальского

Предлагаемая статья представляет собой обзор исследований по функциональному анализу, которые проводились сотрудниками, в той или иной организационной форме примыкавшими к математико-экономическому отделению Института математики СО АН СССР. Впрочем, этот обзор ни в коей мере не претендует на исчерпывающую полноту: в нем отражены лишь основные направления, которые разрабатывались авторами, и учтены работы Р.Э.Вальского, В.Н.Дятлова, В.В.Иванова, Э.О.Рапопорта, М.М.Фельдмана.

Равномерные алгебры и теория аппроксимаций. В последние два десятилетия интенсивное развитие получила теория равномерных алгебр - алгебр непрерывных функций с равномерной сходимостью. Интерес к этой ветви функционального анализа, лежащей на стыке с комплексным анализом, вызван в первую очередь ее нетривиальной (прямой и обратной) связью с теорией аналитических функций одной и нескольких комплексных переменных.

Одной из центральных задач теории равномерных алгебр, которая и послужила поводом к ее развитию, является вопрос о возможности равномерной аппроксимации комплексных непрерывных функций элементами данной алгебры. Нелишне отметить, что этот фундаментальный вопрос в ряде ситуаций может выступать и в опосредованной форме.

Введем некоторые обозначения. Пусть X - компакт в пространстве $\mathbb{C}^n$ n комплексных переменных. $C(X)$ - алгебра всех комплексных непрерывных функций (на X) с равномерной нормой, $P(X)$ - замыкание в $C(X)$ алгебры полиномов комплексных переменных, $R(X)$ - подалгебра алгебры $C(X)$, состоящая из равномерных (на X) пределов рациональных функций с полюсами вне X, $A(X)$ - алгебра всех непрерывных на X функций, голоморфных во внутренних точках, $A(\partial X)$ - сужение последней алгебры на границу ∂X компакта X.

Очевидны включения $P(X)\subset R(X)\subset A(X)\subset C(X)$. Одна из основных задач теории приближений состоит в выяснении условий, которые должны быть наложены на компакт X, чтобы было обеспечено равенство в одном из звеньев этой цепочки включений. Первый результат в этом направлении был получен М.А.Лаврентьевым в 1936 году: при $n=1$ алгебры $P(X)$ и $C(X)$ совпадают тогда и только тогда, когда X не имеет внутренних точек и дополнение компакта X связно. В работах М.В.Келдыша и С.Н.Мергеляна было установлено, что связность дополнения плоского компакта X является необходимым и достаточным условием совпадения алгебр $A(X)$ и $R(X)$. В дальнейшем усилием ряда математиков (Бишоп, Вермер, Рудин, Гликсберг и др.) был разработан новый подход к указанному кругу вопросов, основанный на теории банаховых алгебр и позволивший существенно продвинуться по пути решения указанных задач, в частности задачи об условиях совпадения алгебр $A(X)$ и $R(X)$. Суть функционального подхода состоит в изучении таких характеристик алгебр, как пространство максимальных идеалов, линейных непрерывных функционалов, ортогональных алгебре (по известной теореме Рисса, каждый такой функционал определяется конечной борелевской мерой), и т.п.

Полезным оказалось следующее понятие, введенное Глисоном: долей компакта X относительно алгебры $A\subset C(X)$ называется класс эквивалентности по следующему отношению: $x_1\sim x_2$, если

$$\sup_{f\in A,\|f\|=1} |f(x_1)-f(x_2)|<2.$$

Пусть $\{U_i\}$ - компоненты внутренности плоского компакта X. Предположим, что для каждой компоненты U_i справедливо равенство $R(\bar U_i)=A(\bar U_i)$, т.е. что каждая часть X обладает хорошими аппроксимационными свойствами. Гарантирует ли это предположение хорошие аппроксимационные свойства у всего X ? Ответ на этот вопрос будет положительным, если $R(\partial X)=C(\partial X)$ и, кроме того, никакие две точки разных компонент не лежат в одной доле. В основе указанного факта лежит теорема: при условии $R(\partial X)=C(\partial X)$ всякую меру μ на ∂X , ортогональную к $R(X)$, можно разложить в сумму попарно взаимно сингулярных мер μ_i , каждая из которых ортогональна алгебре $R(\bar{\mathcal{U}}_i)$, в том и только в том случае, когда точки различных компонент не эквивалентны по Глисону.

Отметим еще один аппроксимационный результат, который базируется на изучении долей Глисона для объединения соприкасающихся областей.

Пусть $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ - открытые области, ограниченные спрямляемыми жордановыми кривыми ℓ_1 и ℓ_2 соответственно. Если лебегова мера пересечения $\ell_1 \cap \ell_2$ положительная, то $\mathcal{U}_1$ и $\mathcal{U}_2$ лежат в одной доле относительно алгебры $A(\bar{\mathcal{U}}_1 \cup \bar{\mathcal{U}}_2)$ и каждая вещественная функция, заданная на ∂X , равномерно аппроксимируется вещественными частями функций из алгебры $A(\bar{\mathcal{U}}_1 \cup \mathcal{U}_2)$.

Во всех указанных теоремах решающим моментом является устройство мер, ортогональных ко всем аналитическим функциям. Хорошо известна теорема Ф. и М. Риссов, в которой дается полное описание мер на единичной окружности, ортогональных к граничным значениям аналитических функций в круге. Все такие меры абсолютно непрерывны относительно меры Лебега. Ситуация существенно усложняется в случае $n=1$. Одна из причин этого - обилие сингулярных относительно меры Лебега мер, сосредоточенных на границе комплексно-многомерной области и ортогональных аналитическим функциям. В этом случае изменяются и аппроксимационные свойства: они перестают быть топологическими. Не решен до конца вопрос о взаимоотношении алгебр $P(X)$ и $A(x)$.

Для достаточно хороших областей установлен результат, показывающий локальный характер свойства аппроксимации и до некоторой степени проливающий свет на устройство ортогональных мер, а именно: каждая такая мера представима в виде суммы ортогональных мер, одна из которых абсолютно непрерывна, а остальные попарно взаимно сингулярны и сингулярны относительно меры Лебега, причем имеют сколь угодно малый диаметр носителя. Отметим, что в последнее время Л.А.Айзенберг и Ш.А.Даутов получили сильные результаты, касающиеся описания абсолютно непрерывных ортогональных мер. Полного описания ортогональных мер в $\mathbb{C}^n$, насколько нам известно, в настоящее время нет.

Вопросы равномерной аппроксимации тесно связаны с так называемыми теоремами максимальности. Первой такого рода теоремой была теорема Дж.Вермера, которую можно рассматривать как далеко идущее обобщение классической аппроксимационной теоремы Вейерштрасса. В силу теоремы Вермера алгебра $A(\partial\mathcal{D})$, где $\mathcal{D}$ - единичный круг в комплексной плоскости, является максимальной подалгеброй алгебры всех непрерывных функций на окружности. Отсутствие прямого аналога для комплексно-многомерных областей очевидно. Тем не менее в ряде случаев можно указать естественный класс алгебр, в которых данная алгебра является максимальной. Этот класс выделяется свойством инвариантности относительно некоторой естественной группы (или полугруппы) преобразований носителя алгебры. Для алгебр на группах подобная максимальность изучалась Р.Аренсом, И.Зингером, К.Гофманом, Е.А.Гориным. Исследование явления максимальности алгебры $A(\partial\mathcal{D})$, когда остов $\partial\mathcal{D}$ ограниченной области $\mathcal{D}\subset\mathbb{C}^n$ не обладает групповой структурой, привело к описанию всех подалгебр алгебры $C(\partial\mathcal{D})$, выдерживающих голоморфные диффеоморфизмы области $\mathcal{D}$ (в предположении, что область $\mathcal{D}$ симметрична, т.е. обладает достаточно богатым запасом таких диффеоморфизмов). Если $\mathcal{D}$ - n-мерный комплексный шар, то алгебра $A(\bar{\mathcal{D}})$ (здесь функции заданы на всем шаре, а не только на его границе) "почти максимальна" : между $A(\bar{\mathcal{D}})$ и $C(\bar{\mathcal{D}})$ есть лишь одна "конформно" инвариантная алгебра. Переформулировка этих теорем применительно к отдельно рассматриваемой функции приводит к новым аппроксимационным фактам и критериям голоморфности, включающим в себя, в частности, некоторые известные теоремы (Севери, Радо). По-видимому, указанный подход и составляет "инвариантный" смысл разного рода теорем о голоморфности. Впоследствии работа в этом направлении вышла далеко за рамки исходной задачи и привела к типичным вопросам теории представлений.

Рассмотрим топологическую группу G и ее непрерывное представление T в группу автоморфизмов равномерной алгебры A. В силу теоремы Гельфанда алгебра A реализуется в виде подалгебры алгебры $C(X)$ на некотором компактном пространстве X, однородном относительно группы G. Основными представляются следующие два вопроса:

а) какова связь между свойствами группы G или геометрией однородного пространства X и типичными свойствами функциональных алгебр (пространств), в которых реализовано представление?

Это направление исследований, которое, если угодно, можно было бы назвать "функциональной геометрией", в настоящее время достаточно четко очерчено (Г.Е.Шилов, Дж.Вольф, Д.Ридер, Х.Тирао).

б) какие представления допускает данная группа G в алгебрах функций?

Отметим некоторые результаты, относящиеся к первому из поставленных вопросов. Пусть G - некомпактная группа Ли, $C_0(G)$ - алгебра всех комплексных непрерывных функций на G, обращающихся в нуль на бесконечности. Для того чтобы всякая подалгебра алгебры $C_0(G)$, инвариантная относительно сдвигов и содержащая плотную подалгебру быстро убывающих функций (мы не будем здесь уточнять это понятие), выдерживала переход к комплексно-сопряженным функциям, необходимо и достаточно, чтобы группа G была полупростой. В этом случае все указанные алгебры в силу теоремы Стона-Вейерштрасса полностью описываются.

Пусть X - однородное пространство некомпактной группы Ли с компактной стационарной подгруппой. Самосопряженность всякого подпредставления регулярного унитарного представления группы G эквивалентно некоторой определенной симметрии пространства X. Контакт этой L^2 -теоремы с C -теорией дает описание широких классов представлений полупростых групп Ли в равномерные алгебры. Для компактных групп Ли близкие вопросы рассматривались Вольфом. Как и в теории унитарных представлений, указанные задачи в компактном и некомпактном случаях разнятся принципиально.

Одним из наиболее важных в теории равномерных алгебр является вопрос о возможности введения аналитической структуры в пространстве максимальных идеалов (или в части этого пространства) так, чтобы функции из алгебры становились при этом аналитическими. Условия, обеспечивающие положительное решение этого вопроса, были получены рядом авторов (Глисон, Вермер, Бишоп, Гамелин, Бьёрк). Имеющиеся примеры показывают, что если в группе автоморфизмов алгебры достаточно эффективно представлена "хорошая" группа, то в пространстве максимальных идеалов наводится аналитическая структура, согласованная с действием группы.

В этом направлении для некоторого класса некомпактных полупростых групп Ли доказано, что если представление группы в равномерной алгебре содержит нетривиальное аналитическое подпредставление (в указанном выше смысле), то оно само является аналитическим. При дополнительных условиях, в частности в предположении компактности всех орбит группы G, удается доказать аналитичность представления.

Как и выше, указанные результаты допускают формулировку в терминах равномерной аппроксимации. Задачу *) удается решить пока лишь для простейшего случая: $G = SL(2)$ (однородное пространство X - единичный круг в комплексной плоскости, G действует на X, как группа конформных преобразований).

Локально-выпуклые упорядоченные векторные пространства. Одним из направлений, развиваемых в указанной области функционального анализа, является теория двойственных упорядоченных векторных пространств. В случае, когда в каждом из находящихся в двойственности векторных пространств имеется достаточно квалифицированный порядок, хорошо согласованный с двойственностью, удается более полно, чем в общем случае, выяснить структуру рассматриваемых пространств. Это обстоятельство обусловлено тем, что в K-линеале естественным образом возникают некоторые локально-выпуклые топологии, достаточно тесно связанные с порядком. Это, во-первых, так называемая регулярная топология - сильнейшая локально-выпуклая топология, согласованная с порядком; и, во-вторых, - (o)-топология, под которой понимается сильнейшая из таких локально-выпуклых топологий, что сходимость по любой из них слабее (o)-сходимости.

Введение указанных топологий оправдано, например, тем, что линейный функционал непрерывен в регулярной топологии тогда и только тогда, когда он регулярен, т.е. представим в виде разности положительных линейных функционалов, а критерием непрерывности в (o)-топологии служит (o)-непрерывность (или, в традиционной терминологии, вполне линейность) соответствующего функционала.

Регулярная топология может быть описана и в терминах сходимости. Оказывается, что это сильнейшая из локально-выпуклых топологий, сходимость по которым слабее равномерной сходимости. Это обстоятельство позволяет отождествить регулярную топологию с топологией индуктивного предела банаховых пространств, каждое из которых изометрично и структурно изоморфно пространству всех непрерывных функций на некотором компакте. Последнее, по-видимому, может быть использовано для построения реализации произвольного (архимедова) K-линеала в виде пространства непрерывных на некотором топологическом пространстве функций.

Предположим, что K-линеал X снабжен локально-выпуклой топологией τ, согласованной с порядком в X. Пусть, кроме того, имеется K-линеал Y, который находится в двойственности с K-линеалом X (это означает, что конус Y^+ положительных элементов в пространстве Y является полярой конуса X^+ положительных элементов пространства X). Если двойственность исчерпывающа по отношению к топологии τ, т.е. если каждый линейный непрерывный в топологии τ функционал на X представим в виде скалярного произведения, то Y изоморфно нормальному подпространству пространства X^{τ} всех регулярных функционалов на X и, стало быть, как и X^{τ}, является K-пространством. Условия того, чтобы двойственность между K-линеалом X и K-пространством Y была исчерпывающей, содержатся в аналоге теоремы Макки: топология τ должна попадать в замкнутый интервал топологий. Нижняя граница этого интервала, обозначаемая через $\sigma^*(X,Y)$, является аналогом слабой топологии $\sigma(X,Y)$ и потому называется структурно слабой топологией. Вехнюю границу $\mu^*(X,Y)$ можно рассматривать как аналог топологии Макки $\mu(X,Y)$, в связи с чем ее называют структурной топологией Макки. Очевидно, $\sigma(X,Y) \leq \sigma^*(X,Y) \leq \mu^*(X,Y) \leq \mu(X,Y)$.

Если обозначить через X° множество всех (o)-непрерывных линейных функционалов на X, то, как легко показать, (o)-топология в X совпадает с $\mu^*(X,X^{\circ})$, а регулярная топология в X тождественна $\mu^*(X,X^{\tau})$.

В случае, когда X так же, как и Y, является K-пространством, его базу, т.е. булеву алгебру $\mathcal{E}(X)$ компонент пространства X, можно взаимно-однозначно отобразить в базу

$\mathcal{E}(Y)$ пространства Y. Для этого нужно соотнести проектору P_E на компоненту $E \in \mathcal{E}(X)$ сопряженный оператор P_E^*, который оказывается проектором на некоторую компоненту $G \in \mathcal{E}(Y)$. Нетрудно понять, что G совпадает с дизъюнктным дополнением множества $E^{\perp}$, ортогонального компоненте E (ясно, что и φ также является компонентой пространства Y). Обозначая через φ указанное выше отображение, нетрудно установить, что φ монотонно и сохраняет дизъюнктность. Образ $\varphi[\mathcal{E}(X)]$ состоит из всех тех компонент пространства Y, которые вместе со своим дизъюнктным дополнением слабо замкнуты.

Из сказанного вытекает, что если топология τ K-пространства X слабее (o)-топологии, т.е. если $\tau \leq \mu^*(X, X^o)$, то Y можно рассматривать как нормальное подпространство K-пространства X^o. При этом условии упомянутое выше отображение φ оказывается изоморфизмом булевых алгебр $\mathcal{E}(X)$ и $\mathcal{E}(Y)$.

Снабдим пространство Y сильной топологией. Нетрудно видеть, что она согласована с порядком в Y. Если Y' - пространство всех непрерывных линейных функционалов на Y, то X вкладывается в Y'', и если выполнено указанное выше условие, то это вложение нормально, а если X к тому же обладает известным свойством полноты, то X будет и компонентой пространства Y'. В случае, когда сильная топология τ^* в Y удовлетворяет условию $\tau^* \leq \mu^*(Y, Y^o)$, X исчерпывает все Y', так что X оказывается полурефлексивным. Перечисленные условия будут также необходимы для того, чтобы X было нормальным подпространством, компонентой или совпадало с Y' соответственно.

Если (o)-топология пространства X неотделима, то приведенные выше факты перестают быть верными, поскольку отображение φ перестает быть в этом случае взаимно-однозначным. Отсутствие на X достаточного количества (o)-непрерывных линейных функционалов есть следствие двух независимых причин. Это, во-первых, квалификация базы $\mathcal{E}(X)$ и, во-вторых, степень "роста" элементов из X. Чтобы исключить влияние последнего фактора, целесообразно ввести в рассмотрение положительные линейные (o)-непрерывные функционалы, определенные лишь на конусе X^+, но принимающие, возможно, и бесконечные значения, однако так, что для каждого такого функционала совокупность элементов, на которых он конечен, является фундаментом в X^+. Множество X^{o+} всех такого рода функционалов оказывается изоморфным конусу положительных элементов максимального расширения Z некоторой компоненты X_o пространства X. При этом на базе $\mathfrak{f}(X_o)=\mathfrak{f}(Z)$ существует локально-конечная мера μ, нигде, кроме нуля, не обращающаяся в нуль, такая, что $f(x)=\int xy\,d\mu$ ($x \in X^+$), где под y понимается элемент, соответствующий в указанном выше смысле функционалу f. Дизъюнктное дополнение E компоненты X_o обладает тем свойством, что всякий (o)-непрерывный линейный положительный функционал (хотя бы и с бесконечными значениями) обращается на E в нуль. Частично это может объясняться тем, что база этой компоненты чрезмерно обширна для того, чтобы на ней можно было определить хоть какую-нибудь ненулевую локально-конечную меру. Если это действительно так, то отсутствие (o)- непрерывных линейных функционалов на E следует рассматривать как недостаток не пространства E, а пространства R всех вещественных чисел, которое обладает слишком "малым" числом элементов. В этом случае, по-видимому, целесообразно рассматривать "функционалы" со значениями в некотором достаточно богатом элементами K-пространстве $\mathcal{U}$, т.е. линейные операторы из X в $\mathcal{U}$.

Вопрос о существовании достаточного количества регулярных функционалов решается значительно проще, поскольку при этом можно ограничиться лишь рассмотрением так называемых анормальных функционалов, дизъюнктных множеству X^o. Если X реализовать как нормальное подпространство пространства $C^\infty(Q)$, то каждому такому функционалу соответствует регулярная борелевская мера на Q, сосредоточенная на некотором нигде неплотном множестве и, следовательно, в составе X нет функций, обращающихся в бесконечность на таком множестве. Поэтому если упоминавшаяся выше компонента Z пространства X отлична от нуля, то на ней будет достаточное количество регулярных функционалов в том и только том случае, когда множество "пиковых" точек компакта Q достаточно редко.

Среди других результатов, относящихся к упорядоченным векторным пространствам, отметим условия существования дифференциала у субаддитивного отображения одного упорядоченного векторного пространства в другое такого же типа.

Заслуживают внимания начавшиеся недавно исследования по полугруппам операторов в данном K-пространстве.

Теория Шоке. Развитие теории Шоке для упорядоченных векторных пространств началось в самое последнее время. Эта теория изучает отношения порядка, наводимые выпуклыми функциями в конусе положительных бэровских мер. Иными словами, речь идет о типичном объекте теории векторных пространств с двумя конусами. Более того, задача о строении упорядоченности Шоке - ключевой пункт при анализе вариационных задач, решения которых выпуклы.

Теория Шоке описывает максимальные функционалы. Подобная конструкция - максимальный оператор - типичный объект задач о пробных функциях в теории аппроксимации, о геометрии бесконечномерных сфер, о порождении упорядоченных пространств и т.п.

К настоящему времени накопилось великое множество разнообразных обобщений и модификаций теории Шоке. Поэтому желательно иметь единую точку зрения, которая объясняла бы все эти разветвления теории. Можно указать и другие мотивы в пользу построения общей теории Шоке (например, желание понять, что следует понимать под "симплексом", как интерпретировать задачу Дирихле для измеримых функций, что собой представляют конечно-порожденные пространства и т.д.).

В свое время Шоке поставил задачу об описании "аксиоматики" максимальных мер. Это равносильно требованию дать характеристику максимальных положительных форм на коинициальных верхних решетках в K-линеалах. Следует отметить, что упомянутая задача Шоке долгое время оставалась незамеченной, вероятно, потому, что в его схеме отсутствовало главное - граница Шоке. Генеральное соображение, позволяющее строить удовлетворительную теорию, заключается в том, что граница Шоке - это объект, внешний по отношению к исходному пространству с двумя конусами, реализуемый,как компонента некоторого K-пространства,или, более общо, элемент полной булевой алгебры, которая используется для характеристики максимальных операторов. Недостаток места не позволяет детально остановиться на эвристических соображениях. Однако один содержательный пример (в своей основе принадлежащий, по-видимому, Шоке) следует привести.

Пусть Q - топологическое компактное пространство, P_b - конус ограниченных полунепрерывных сверху функций на Q и $[P_b]$ - K-линеал разностей таких функций. Очевидно, что конус P_b является супремальным генератором пространства $[P_b]$ относительно K-пространства $B(Q)$ всех ограниченных на

Q функций. В смысле Эрве это означает, что граница Шоке конуса P_ℓ, рассматриваемая в $B(Q)$, есть весь компакт Q. С другой стороны, также в очевидном смысле, P_ℓ - максимальные положительные формы суть регулярные борелевские меры. Таким образом, граница Шоке, понимаемая как Q, не несет существенной информации о таких мерах. Если же реализовать $[P_\ell]$ в виде плотного подлинеала пространства непрерывных функций на компакте $\beta(Q)$, то новая граница конуса P_ℓ (в классическом смысле!) уже не совпадает с $\beta(Q)$ (например, потому, что сосредоточенные на границе меры максимальны). При этом все регулярные меры обращаются в нуль на компактах типа G_δ, не задевающих границу Шоке в $\beta(Q)$.

Анализ приведенного примера (а также и другие соображения) приводит к основной коммутативной диаграмме (которая есть просто стандартная диаграмма подъема):

$$\begin{tikzcd} H \subset X \arrow[r, "T_0"] \arrow[dr, "TT_0"'] & Z \arrow[d, "T"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Здесь X - упорядоченное векторное пространство; H - конус в X; Z и Y - некоторые K-пространства; T и T_0 - положительные операторы. Оператор T называется T_0- максимальным (следовало бы добавить "относительно конуса H"), если сужение TT_0 максимально в том смысле, что положительный оператор $T': X \to Y$, мажорирующий TT_0 на H, совпадает с TT_0. (В дальнейшем всегда предполагается, что упорядочение пространств - регулярное, т.е. что каждое рассматриваемое пространство находится в канонической двойственности с пространством разностей положительных форм). В этой ситуации существование максимальных операторов равносильно условию $\overline{H+X^+}=X$ (X^+ - положительный конус в X и черта - замыкание в какой-либо топологии, согласованной с двойственностью).

Проектором Шоке называется точная верхняя граница (в булевой алгебре проекторов в пространстве Z) множества T_0-максимальных проекторов. Этот проектор обозначают $P_{Ch(T_0)}$. Компоненту $Ch(T_0)$ (или, более подробно, $Ch(H,T_0)$) называют компонентой Шоке (или границей Шоке). Проектор Шоке T_0-максимален, т.е. служит наибольшим элементом в множестве всех T_0-максимальных проекторов. Оказывается, определенная таким образом граница Шоке охватывает все встречавшиеся нам конструкции и содержательна в общем случае. Приведем несколько фактов, подтверждающих последнее высказывание.

Пусть Ker - общая часть ядер всех T_0-максимальных операторов, определенных на Z, со значениями в произвольных K-пространствах. Дизъюнктное дополнение множества Ker совпадает с границей Шоке $Ch(T_0)$. Если конус H - коинициален в X или если $\overline{H-H}=X$, то сужение любого T_0-максимального оператора на $Ch(T_0)^d$ анормально.

Пусть конус H коинициален в X и представляет собой верхнюю решетку. Если положительные формы на Z вполне линейны, то оператор T будет T_0-максимальным в том и только том случае, когда $TP_{Ch(T_0)^d}=0$.

В теории Шоке для операторов получен ряд результатов о декомпозиции, о шиловских проекторах, симплексах, о выметании и о других конструкциях теории интегральных представлений компактов. Впрочем, до полной ясности в этом круге вопросов еще далеко, и это открывает перспективы дальнейшей работы.

Теория полугрупп эндоморфизмов. Полугруппы эндоморфизмов банахова пространства - представления аддитивной полугруппы R_+ неотрицательных целых чисел - были и остаются предметом многочисленных исследований. Начало теории, по-видимому, восходит к появлению в 1936 г. работ Хилле, в которых были рассмотрены некоторые специальные полугруппы. Основной вопрос теории полугрупп - при каких условиях данный оператор является производящим оператором некоторой полугруппы (т.е. является ее сильной производной в нуле). В 1952 году этот вопрос был окончательно решен для полугрупп класса C_0, сильно непрерывных на R_+ (теорема Хилле - Иосида - Миядера - Филлипса). Позднее были доказаны теоремы порождения и для других классов полугрупп.

В 60-х годах теория полугрупп существенно обобщается в двух различных направлениях. С одной стороны, Шварц и Иосида, изучив равностепенно непрерывные полугруппы класса C_0, распространили эту теорию на случай локально-выпуклых пространств; с другой - Ш.-Л.Лионс в связи с абстрактной задачей Коши (в смысле обобщенных функций) ввел понятие полугруппы-распределения, т.е. $L(X)$-значной обобщенной функции T

(здесь $L(X)$ - алгебра эндоморфизмов банахова пространства X), обладающей полугрупповым свойством $T(\varphi * \psi) = T(\varphi)\cdot T(\psi)$ для любых финитных бесконечно дифференцируемых функций φ и ψ с носителями, лежащими в $R^+ = (0, +\infty)$.

Наконец, в 1970 году **Ушиджима** получил необходимые и достаточные условия, обеспечивающие продолжимость полугруппы операторов до полугруппы обобщенной функции.

Изучение полугрупп эндоморфизмов локально-выпуклого пространства показало, что их естественно рассматривать как представления алгебр (относительно свертки) обобщенных функций с носителями в R_+ . Так, полугруппы класса C_0 суть представления алгебры M_+ мер Радона с компактными носителями, расположенными на положительной полуоси; алгебра M_+ снабжается при этом слабой топологией. Равностепенно непрерывные полугруппы - это представления алгебры L_+ суммируемых на R_+ функций. Полугруппы-распределения Лионса суть представления алгебры $\mathcal{K}_+$ (бесконечно дифференцируемых на R_+ функций с компактными носителями).

Уточним сказанное выше. Пусть $\mathcal{K}'_+$ - алгебра обобщенных функций с носителями в R_+ (со стандартной операцией свертки и топологией). Локально-выпуклую алгебру $\mathfrak{A}$ будем называть <u>алгеброй обобщенных функций</u>, если $\mathfrak{A}$ есть подалгебра алгебры $\mathcal{K}'_+$, содержащая в качестве плотного множества подалгебру $\mathcal{K}_+$. Положим

$$\mathfrak{A}^+ = \{f \in \mathfrak{A} \mid \operatorname{supp} f \subset R^+\}.$$

<u>Эволюционным представлением алгебры</u> $\mathfrak{A}$ в локально-выпуклое пространство X называется непрерывный гомоморфизм T алгебры $\mathfrak{A}$ в алгебру $L(X)$, удовлетворяющий условиям:

1) множество $T(\mathfrak{A}^+)X$ фундаментально в X ;

2) если $T(\mathfrak{A}^+)x = \{0\}$, то $x = 0$.

Сужение отображения $Tx : f \longrightarrow T(f)x$ ($f \in \mathfrak{A}$) на подалгебру $\mathcal{B} = \mathfrak{A} \cap C^\infty(R_+)$ допускает дифференцирование в обобщенном смысле. Определим <u>производящий оператор</u> A представления T с помощью следующего соотношения:

$$(Tx)'|_{\mathcal{B}} = TAx|_{\mathcal{B}^+},$$

где $\mathcal{B}^+ = \mathfrak{A}^+ \cap C^\infty(R_+)$. Оператор A линеен, замкнут, почти всюду определен.

Производящий оператор эволюционного представления - основная его характеристика. Данный оператор A может порождать не более одного представления T алгебры $\mathfrak{A}$. При этом A и T связаны соотношениями:

$$T(-f') = AT(f) + f(0)I, AT(f) \supset T(f)A \qquad (*)$$

для всех $f \in \mathcal{L}$.

Понятие эволюционного представления естественным образом обобщает понятие полугруппы эндоморфизмов. Представление T определяет некоторую полугруппу в том и только том случае, когда

$$T = \lim_{\varepsilon} L(M_\varepsilon, L_\sigma(X)),$$

где $M_\varepsilon = \{f \in M_+ \mid supp f \geq \varepsilon\}$, а σ означает слабую топологию в $L(X)$. При этом связь между полугруппой и представлением выражается следующим образом:

$$T(t) = T(\delta_t) \qquad (t \in R_+) \quad ,$$

$$< T(f)x, x' > = f(< T(\cdot)x, x' >)(f \in \bigcup_{\varepsilon \in R^+} M_\varepsilon, x' \in X').$$

Теперь выясним, в каких терминах формулировать условия, которые следует наложить на оператор A, чтобы он порождал представление той или иной алгебры - полугруппу того или иного класса.

В случае банахова пространства теоремы порождения даются в виде ограничений на рост степеней резольвенты оператора A. Однако в случае локально-выпуклого пространства производящий оператор представления, если соответствующая ему полугруппа не равностепенно непрерывна, как правило, не имеет резольвенты ни в одной точке комплексной плоскости. Причина этого заключается в том, что пространство эндоморфизмов ненормируемого локально-выпуклого пространства, снабженное любой топологией ограниченной сходимости, не является m-локально выпуклой алгеброй. Интерпретация полугруппы как эволюционного представления позволяет глубже понять причину указанного явления.

Действительно, если $e^{-\lambda(\cdot)} \in \mathcal{L}$ для всех $\lambda \in \Pi_0 = \{z \in \mathbb{C} : Re z > 0\}$ что, по существу, соответствует случаю равностепенно непрерывной полугруппы, то из (*) для операторов $R(\lambda)=T(e^{-\lambda(\cdot)})$ будем иметь

$$\lambda R(\lambda)=AR(\lambda)+I,\ AR(\lambda)\supset R(\lambda)A,$$

т.е. $R(\lambda)=R(\lambda)A)\quad(\lambda\in\Pi_0)$.

В случае, когда $e^{-\lambda(\cdot)}\bar{\in}\mathcal{L}$, поступим следующим образом. Возьмем некоторый $\mathfrak{A}$ -мультипликатор h (это означает, что $h\in C^\infty(R_+)$, $h(0)=1$, и $h\cdot\mathfrak{A}\in\mathfrak{A}$) и положим $R(h,\lambda)=$ $=T(he^{-\lambda(\cdot)})$. Тогда

$$(\lambda I-A|R(h,\lambda)=I+T(h'e^{-\lambda(\cdot)}).$$

Если X - банахово пространство, то, учитывая, что $supp\,h'\subset R^+$ при достаточно больших $Re\lambda$, получаем $\|T(h'e^{-\lambda(\cdot)})\|<1$. Стало быть, при указанных λ определен оператор

$$R(\lambda,h)[I+T(h'e^{-\lambda(\cdot)})]^{-1},$$

являющийся, как легко видеть, резольвентой оператора A в точке λ.

В случае локально-выпуклого пространства соответствующий оператор, как правило, необратим, в связи с чем классический резольвентный аппарат здесь неприменим. Поэтому оператор A мы характеризуем с помощью так называемой резольвентной последовательности. Это последовательность (R_n) сильно аналитических отображений $R_n:\Pi_0\to L(X)$ таких, что

1) $AR_n(\lambda)\supset R_n(\lambda)A\qquad(\lambda\in\Pi_0)$;

2) семейство $\{e^{\lambda n}(\lambda I-A)R_n(\lambda)-I\}\qquad(\lambda\in\Pi_0)$ операторов из $L(X)$ - полиномиального роста при $|\lambda|\to\infty$.

Рассмотрим представление T из пространства

$$\mathcal{K}'_+(L(X))=\varinjlim_m\ \varprojlim_N L(\mathcal{K}^N_m,L(X)),$$

где $\mathcal{K}^N_m$ - пространство функций на R_+ непрерывно дифференцируемых N раз и с носителями в промежутке $[0,m]$.

Пусть A - линейный, замкнутый почти всюду определенный оператор в секвенциально полном борнологическом пространстве X. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

I) A - производящий оператор эволюционного представления алгебры $\mathcal{K}_+$;

2) A - производящий оператор полугруппы - распределения Лионса;

3) A имеет резольвентную последовательность (R_n) такую, что отображения R_n полиномиального роста.

В случае банахова пространства эквивалентность условий 2) и 3) составляет содержание теоремы Лионса-Шазарена.

Связь между непрерывными на R_+ полугруппами и представлениями алгебры M_+ устанавливается аналогичным образом. Оказываются равносильными следующие условия:

1) оператор A порождает эволюционное представление алгебры M_+;

2) оператор A порождает полугруппу класса C_0;

3) оператор A имеет резольвентную последовательность (R_n) такую, что для каждого n семейство эндоморфизмов

$$\left\{\frac{(Re\lambda)^{k+1}}{k!} R_n^{(k)}(\lambda)\right\} \quad (\lambda\in\Pi_0,\ k=0,1,2,\ldots)$$

равностепенно непрерывно.

Учитывая, что $e^{-\lambda(\cdot)}\in L_+$, теорему порождения для алгебры L_+ можно сформулировать в терминах обычной резольвенты. Оператор A порождает эволюционное представление алгебры L_+ в том и только том случае, когда существует резольвента $R(\lambda,A)$ для $\lambda\in\Pi_0$ и семейство операторов

$$\{(Re\lambda\cdot R(\lambda,A))^k\} \quad (\lambda\in\Pi_0,\ k=1,2,\ldots)$$

равностепенно непрерывно.

Для представления T, которому соответствует полугруппа $T(t)=T(\delta_t)$, важным является поведение этой полугруппы при $t\to+0$ (суммируемость, сходимость по Абелю и по Чезаро, непрерывность). Метод резольвентной последовательности оказывается достаточно сильным, чтобы окончательно решить и эти вопросы.

Рассмотрим, например, класс L полугрупп, сильно суммируемых в нуле и имеющих производящий оператор. Оператор A порождает полугруппу T класса L в том и только том случае, когда он имеет резольвентную последовательность (R_n) такую, что для каждой непрерывной полунормы p можно указать непрерывную функцию $\varphi_p : R^+ \times X \to R_+$, обладающую свойствами:

I) $\varphi_p(t, 0) = 0 \qquad (t \in R^+)$;

2) функция $\varphi_p(\cdot, x)$ суммируема в нуле для каждого $x \in X$;

3) для всех $x \in X$, $\lambda \in \Pi_0$ и $k = 0, I, 2, \ldots$,

$$p(R_n(\lambda)x) \leq \int_0^n e^{-\lambda t} \varphi_p(t, x)\,dt.$$

При этом $p(T(t)x) \leq \varphi_p(t, x)\ (x \in X\ ;\ t \in R^+)$.

Приведем еще теорему порождения для классов Ch_k полугрупп с непрерывными в нуле чезаровскими средними порядка k. Для простоты будем предполагать, что X - банахово пространство.

Полугруппа класса L принадлежит классу Ch_k тогда и только тогда, когда при некоторых $\omega \in R$ и $M \in R^+$ выполняется неравенство

$$\left\| \sum_{j=0}^{m+1} \frac{(m+k-j)!}{(m+1-j)!} \lambda^j R^j(\lambda + \omega; A) \right\| \leq \frac{(m+k)!}{k \cdot m!} M$$

для всех $\lambda \in R^+$ и $m = 0, I, 2, \ldots$

Другой важный вопрос теории эволюционных представлений - изучение регулярности на R^+ (непрерывность, гладкость, аналитичность, β-гипоаналитичность и т.п.).

Представление $T($ будем называть C-полугруппой ($\mathcal{D}$-полугруппой), если $T(\delta_t)$ - сильно непрерывное (соответственно дифференцируемое) на R^+ отображение. Оператор A порождает C-полугруппу тогда и только тогда, когда у него есть резольвентная последовательность (R_n) такая, что для некоторого натурального числа N отображения R_n определены на областях

$$\Lambda_{n,\varepsilon} = \{\lambda \in C \mid |\mathrm{Im}\,\lambda| \geq \exp(\tfrac{\varepsilon - n}{N} \mathrm{Re}\,\lambda),\ \mathrm{Re}\,\lambda < 0\} \cup \Pi_0$$

для всякого $\varepsilon \in (0,1)$ и, кроме того, семейство операторов

$$\{(1 + |\lambda|^{\frac{nN}{\varepsilon - n}} R_n(\lambda)\} \quad (\lambda \in \Lambda_{n,\varepsilon})$$

равностепенно непрерывно.

Для $\mathcal{D}$ -полугруппы соответствующие допустимые области суть

$$\Lambda(\varepsilon)=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid |\mathrm{Im}\,\lambda|>\exp(-\varepsilon\,\mathrm{Re}\,\lambda),\ \mathrm{Re}\,\lambda\leq 0\}\cup\Pi_0$$

и семейство операторов

$$\{(1+|\lambda|)^{-N}R_n(\lambda)\}\qquad(\lambda\in\Lambda(\varepsilon))$$

при некотором натуральном N равностепенно непрерывно.

Рассмотрим еще класс полугрупп T, аналитических на секторе, т.е. таких полугрупп, для которых функция $T(\delta_t)$ продолжима до слабо аналитической в секторе $\Sigma_a=\{\lambda\mid |\arg\lambda|<a,\ \lambda\neq 0\}$ $(a\in(0,\frac{\pi}{2}))$.

Предположим, что оператор A порождает $\mathcal{D}$ -полугруппу (см. выше). Пусть, кроме того, для $\varepsilon\in(0,a)$ каждое R_n определено на секторе

$$S_{a-\varepsilon}=\{\lambda\in\mathbb{C}\mid |\arg\lambda|<\tfrac{\pi}{2}+a-\varepsilon\}.$$

Если при этом семейство операторов

$$\{(1+|\lambda|)^{-N}R_n(\lambda)\}\quad(\lambda\in S_{a-\varepsilon})$$

равностепенно непрерывно, то A порождает аналитическую на секторе Σ_a полугруппу.

При некоторых дополнительных предположениях указанные условия также и необходимы.

Аппарат резольвентных последовательностей применим и для исследования сопряженных представлений. Рассмотрим класс E полугрупп T, имеющих производящий оператор, у которого существует резольвентная последовательность (почти все известные классы полугрупп являются подклассами класса E). Если полугруппа T класса E непрерывна в нуле на $\mathcal{D}(A^k)$, то будем писать $T\in C_{(k)}$. Для полугруппы T класса E положим

$$X^+=\overline{\bigcup_{t\in R^+}[T(t)]^*\mathcal{D}A^*},\quad T^+: t\longrightarrow T(t)^*|_{X^+}.$$

Тогда T^+ есть полугруппа класса E в пространстве X^+ и $A^+=A\cap X^+\times X^+$ будет ее производящим оператором. Если $T\in C_{(k)}(X)$, то и $T^+\in C_{(k)}(X^+)$. При этом если семейство операторов $\{\lambda R_n(\lambda)\}$ $(\lambda \in R^+)$ равностепенно непрерывно, то $X^+ = \overline{\mathcal{D}A^*}$.

Последний результат был получен Филлипсом (для случая банахова пространства $k=0$). Позднее Коматсу распространил ее на случай равностепенно непрерывных полугрупп класса C_0 в локально-выпуклом пространстве.

Мы не упомянули о таких вопросах теории эволюционных представлений, как связь с абстрактной задачей Коши (в различных ее постановках), троттеровская проблема сходимости последовательности представлений данной алгебры, вопрос возмущений производящего оператора. Но эти вопросы, как и другие, затронутые выше, исследованы далеко еще не полностью.

Поступила в ред.-изд. отд.
13. III. 1974 г.