УДК 513.88

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ВЫПУКЛОМУ АНАЛИЗУ И ТЕОРИИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

С.С.Кутателадзе, Г.Ш.Рубинштейн

Последние десятилетия характеризуются резким расширением круга приложений математики. Математическое моделирование, в частности, стало основой исследования многочисленных проблем управления в экономике, механике, биологии и некоторых других естественных и общественных науках, что привело к существенной перестройке многих научных направлений. В свою очередь новые конкретные задачи стимулировали развитие ряда математических дисциплин. Прежде всего это относится к многочисленным новым направлениям, связанным с исследованием и разработкой эффективных методов решения различных классов экстремальных задач. Экстремумы в этих задачах, как правило, достигаются в граничных точках соответствующих множеств, и потому классические методы анализа к ним неприменимы. В используемых методах определяющую роль играют выпуклые множества и выпуклые функции. В связи с этим соответствующие разделы в последнее время получили большое развитие. В конечном счете это привело к выделению в рамках функционального анализа специального раздела, получившего наименование выпуклого анализа.

Настоящий обзор посвящен исследованиям по выпуклому анализу и теории экстремальных задач, выполненным в Институте математики СО АН СССР сотрудниками математико-экономического отделения (МЭО) и выделившегося из него в 1970 году отдела выпуклого анализа. Эти исследования, естественно, велись параллельно с работами в других научных центрах нашей страны и за рубежом. Однако последние, ввиду ограниченности рамок и направленности обзора, здесь не находят отражения.

§ I. Выпуклые множества и выпуклые функции

<u>**Теоремы отделимости**</u> являются основным инструментом исследования выпуклых экстремальных задач в вещественных векторных пространствах конечной и бесконечной размерности. С помощью этих теорем устанавливаются, в частности, различные признаки экстремума. Между тем классические результаты здесь часто оказываются недостаточными, так как встречающиеся выпуклые множества не всегда являются телесными, или компактными. Кроме того, классическое разделение множеств не всегда гарантирует отсутствие общих точек у этих множеств, что важно при установлении достаточных признаков экстремума.

Развитые геометрические методы, опирающиеся на изучение граневых строений выпуклых множеств, позволили получить исчерпывающие результаты относительно отделимости любого конечного семейства выпуклых многогранников, а также ряд результатов по отделимости нетелесных выпуклых множеств [50]. Одним из результатов указанного типа является, например, доказательство замкнутости в сильнейшей локально-выпуклой топологии выпуклого множества M, удовлетворяющего условиям: (а) пересечение M с любой прямой замкнуто; (б) множество M' содержит счётное подмножество M' такое, что для любого $x \in M$ точка $y + t(y - x)$ при некоторых $y \in M'$ и $t > 0$ принадлежит M.

Интересно отметить, что развитый геометрический аппарат использует лишь небольшое число свойств векторных или аффинных пространств и, следовательно, соответствующие доказательства проходят в пространствах более общей природы. Таковыми являются изученные в [48], [51], [53] *осевые пространства*, которые в случае конечной размерности совпадают с непрерывными геометриями порядка. Теорема о реализуемости таких пространств в аффинных пространствах позволила вскрыть внутреннюю природу выпуклых множеств, а также наметить новый подход к основаниям геометрии.

<u>**Квазивыпуклые функции.**</u> Определённая на выпуклом множестве G вещественнозначная функция f называется *квазивыпуклой*, если при любых x, $y \in G$ и $\lambda \in (0,1)$

имеет место неравенство

$$f(\lambda x)+(1-\lambda)y) \le max\{f(x), f(y)\}, \qquad (1)$$

причем оно является строгим, когда $f(x) \ne f(y)$. Функция $f: G \to R$, очевидно, в том и только том случае является квазивыпуклой, если (а) лебеговы множества $\{x \in G : f(x) \le c\}$ выпуклы при всех $c \in R$; (б) каждый локальный минимум функции f на выпуклом множестве $M \subset G$ является глобальным минимумом f на M. Благодаря этим свойствам классы $W(G)$ квазивыпуклых функций в теории экстремальных задач играют столь же важную роль, что и более узкие классы $V(G)$ выпуклых функций.

Ещё в двадцатые годы Блюмбергом, Серпинским и Островским был изучен вопрос о соотношении между классом $V(R)$ выпуклых функций и классом $V'(R)$ функций, удовлетворяющих ослабленному условию выпуклости (для середин отрезков). При этом оказалось, что множество $V'(R) \quad V(R)$ непустое, но состоит лишь из очень плохих функций, каждая из которых не ограничена и не измерима ни на каком множестве $e \subset R$ положительной меры.

Аналогичный вопрос для квазивыпуклых функций, определенных на произвольном открытом выпуклом множестве G, был изучен в [4]. Картина здесь оказалась более тонкой, но в основном того же плана. Например, $W'(R) \setminus W(R) \ne \emptyset$, но для каждой функции f из этого множества существует $c(f) \in (-\infty, +\infty]$ такое, что (а) функция $\varphi(x) = max\{f(x), c(f)\}$ является квазивыпуклой; (б) множество $g(f) = \{x \in R : f(x) < c(f)\}$ выпукло, но функция f не измерима ни на каком множестве $e \subset g(f)$ положительной меры, причем супремум f на e равен $c(f)$. При этом для функций $f \in V'(R) \setminus V(R)$ имеем: $c(f) = +\infty$, $g(f) = R$.

Заметим теперь, что фигурирующие в экстремальных задачах функции $f: G \to R$, как правило, существенны лишь с точностью до определяемых ими предпорядков на множестве G. Ввиду этого функции $f: G \to R$ и $\varphi: G \to R$ считаются эквивалентными, если определяемые ими предпорядки $\le_f$ и $\le_\varphi$ совпадают, т.е. $\varphi = u \circ f$, где u - некоторая возрастающая функция, определенная на множестве значений функции f. Классы $W(G)$ квазивыпуклых функций, очевидно, являются насыщенными, по введенному отношению эквивалентности, а более узкие классы $V(G)$ выпуклых функций таковыми не являются. Поэтому насыщения $V(G)$ последних содержатся в $W(G)$, но эти множества не совпадают.

В связи с этим ещё в конце сороковых годов американским математиком Фенхелем была поставлена проблема описания квазивыпуклых функций, эквивалентных некоторым выпуклым функциям. Некоторые предварительные результаты были установлены самим Фенхелем и рядом его последователей. Однако окончательное решение проблемы получено лишь в недавней работе [55].

Строго выпуклые предпорядки. В общем случае квазивыпуклые функции на выпуклом множестве могут достигать минимума не в единственной точке. Однако если при любых $x \neq y$ и $\lambda \in (0,1)$ в (I) имеет место строгое неравенство, то функция f на любом выпуклом множестве достигает минимума не более чем в одной точке. Такие функции называют *строго квазивыпуклыми*. Это определение без изменений переносится на случай отображений выпуклого множества G в произвольное линейно-упорядоченное множество P. Такие отображения и порождаемые ими предпорядки на G называют *строго выпуклыми* (точнее было бы именовать их строго квазивыпуклыми).

Построенная в [2] теория строго выпуклых предпорядков позволила, в частности, доказать некоторые предложения о сходимости минимальных элементов в одной шкале строгих норм. Через $x^{(p)}$ обозначим элементы выпуклого замкнутого множества $M \subset R^n$, на которых достигаются минимумы норм $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}$ при $p \in (1, +\infty)$. Оказывается, что эти элементы при $p \downarrow 1$ сходятся, причём предельный элемент $x^0 \in M$ является минимальным на M в некотором строго выпуклом предпорядке, который не может быть задан с помощью обычной квазивыпуклой функции. Этот предпорядок порождается строго выпуклым отображением

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i| ; \sum_{i=1}^{n} |x_i| \ln |x_i|\right)$$

в лексикографически упорядоченное R^2. Далее, если $M \subset R^n$ – выпуклый многогранник, то элементы $x^{(p)}$ при $p \to +\infty$ также сходятся к некоторому $x^{\infty} \in M$, который является минимальным на M в некотором другом строго выпуклом предпорядке. На произвольное выпуклое замкнутое множество M последний результат не переносится.

Аналогичные исследования для строгих матричных норм проведены в [3].

Конусы выпуклых функций и выпуклых множеств. Выпуклые функции, определённые на одном и том же выпуклом множестве G, образуют выпуклый конус в пространстве всех вещественнозначных функций на G. Выпуклые множества можно также складывать (например, по Минковскому) и умножать на положительные числа. Некоторые классы выпуклых множеств с указанными операциями могут быть реализованы в виде выпуклых конусов в соответствующих векторных пространствах.

В некоторых экстремальных задачах искомым объектом является выпуклая функция или выпуклое множество. Таковы, например, экстремальные задачи теории выпуклых поверхностей, а также задачи аппроксимации выпуклыми функциями. При установлении признаков решения таких задач важно знать множество положительных функционалов относительно введенных выше конусов выпуклых функций и выпуклых множеств. Естественный язык для описания этих функционалов был предложен Ю.Г.Решетняком (для случая выпуклых поверхностей) и Люмисом (для непрерывных выпуклых функций). При этом учитывалось, что конус выпуклых функций в известном смысле порождается более узким конусом аффинных функций. Подобным образом устроен также конус выпуклых множеств. Каждый положительный функционал относительно конуса выпуклых функций или выпуклых множеств является, естественно, положительным также относительно указанных более узких конусов. Обратное утверждение справедливо лишь в тривиальных случаях. Характер обратной связи для некоторых классов выпуклых функций и линейных функционалов изучен в совместной работе Картье, Фелла и Мейе, а также в работах Динджеса, Карлина и др. Общий подход к анализу обратных связей намечен в [26]. Окончательный результат формулируется для множества $\mathcal{L}^+(X,Y)$ линейных положительных операторов, действующих из K-линеала X в некоторое K-пространство Y.

Пусть X^n - n-я степень X и $\Delta : x \to (x, \ldots, x)$ - диагональное вложение X в X^n. Для каждого элемента $h=(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ из X^n через $\Delta^*(h)$ обозначим супремум элементов $h_1, h_2, \ldots, h_n$ в X. Далее, разбиением оператора $S \in \mathcal{L}^+(X,Y)$ назовём оператор $\hat{S} \in \mathcal{L}^+(X^n, Y)$ такой, что $S = \hat{S}\Delta$, и положим $\check{S} = S\Delta^*$.

Оказывается, что, каковы бы ни были операторы S и T из $\mathcal{L}^+(X,Y)$ и конус $H \subset X^n$, для всех $h \in H$ имеет место неравенства $\check{S}h \geq \check{T}h$ в том и только том случае, если для каждого разбиения $\hat{T}$ оператора T найдется разбиение $\hat{S}$ оператора S такое, что для всех $h \in H$ справедливы неравенства $\hat{S}h \geqslant \hat{T}h$.

Что касается последних неравенств, то они в ряде случаев могут эффективно проверяться с помощью методов линейного программирования.

Детальному изучению вопроса о супремальном порождении выпуклых конусов и подпространств более узкими конусами на основе идей двойственности Минковского посвящена обзорная статья [33] (см. также [29], [32], [56]).

Сублинейные операторы. Общая теория сублинейных операторов, действующих в полуупорядоченные K-пространства, была построена Л.В.Канторовичем ещё в довоенные годы. С помощью этой теории удалось, в частности, решить ряд проблем линейного функционального анализа и метрической теории функций.

В связи с новыми приложениями, связанными главным образом с изучением экономической динамики, возникла необходимость в рассмотрении более широких классов сублинейных операторов, действующих уже не в K-пространства, а в K-линеалы ограниченных элементов. Основной вопрос теории таких операторов, связанный с их представимостью в виде поточечных супремумов некоторых семейств линейных операторов, не может уже решаться с помощью операторного варианта теоремы Хана-Банаха. В [34]-[36] исследование сублинейных операторов, действующих в архимедовы K-линеалы ограниченных элементов, проводится на основе некоторого обобщения теоремы И.М.Гельфанда об общем виде линейных операторов, действующих в такие пространства, и теоремы Майкла о непрерывных селекторах многозначных отображений. Это позволило построить достаточно содержательную теорию указанных операторов и получить ряд приложений, в частности, связанных с некоторыми уточнениями признаков существования непрерывных селекторов.

§ 2. Выпуклые экстремальные задачи

Линейное и выпуклое программирование. В отличие от классических экстремальных и вариационных задач в математическом программировании речь идет о максимизации или минимизации функционалов на замкнутых множествах топологических векторных пространств (конечной или бесконечной размерности). При этом экстремумы в этих задачах, как правило, достигаются в граничных точках. Ввиду этого точки экстремума здесь, вообще говоря, не являются критическими даже в случае дифференцируемости соответствующих функционалов.

Существенные трудности возникают уже в задачах линейного программирования, состоящих в максимизации или минимизации линейной функции на множестве решений конечной системы линейных неравенств. Принципиально новый подход к установлению признаков решения таких задач был предложен Л.В.Канторовичем в довоенной работе [6]. Точки экстремума характеризовались здесь с помощью линейных функционалов в соответствующем фазовом пространстве. Развитие этого подхода на случай выпуклых задач в бесконечномерных векторных пространствах содержится в [7]. О связях этой работы с полученной позднее конечномерной теоремой Куна-Таккера см. [19].

Детализации общей теории и численных методов для конкретных задач посвящены работы [10], [11], [13], [15] (см. также [8], где имеется ссылка на неопубликованную в то время работу [13]).

Указанное направление получило дальнейшее развитие в исследованиях сотрудников МЭО, связанных с разработкой эффективных численных методов для решения специальных классов задач линейного и нелинейного программирования (см. соответствующую статью настоящего сборника).

В [22], [23] и [49] получены некоторые ослабления условий классической теоремы Куна-Таккера.

<u>Абстрактные схемы получения признаков оптимальности.</u> Имеющиеся подходы к установлению признаков решения задач математического программирования можно условно разбить на две группы. Первая из этих групп базируется на различных вариантах п р и н ц и п а д в о й с т в е н н о с т и. Вторая исходит из общего п р и н ц и п а в о з м о ж н ы х (или допустимых) н а п р а в л е н и й. Для выпуклых задач с дифференцируемыми функциями эти подходы в принципе эквивалентны. Что касается выпуклых задач с недифференцируемыми функциями, то они, как правило, исследуются с помощью принципа двойственности. В свою очередь, характеристика локальных экстремумов в невыпуклых задачах с дифференцируемыми функциями устанавливается обычно с помощью принципа возможных направлений.

Простейший вариант принципа двойственности, связанный с рассмотрением геометрической задачи о крайней точке пересечения оси с выпуклым множеством, намечен ещё в [6]. Он систематически использовался затем в исследованиях по линейному и нелинейному программированию, а также при изучении задач наилучшего приближения. Другая простейшая схема двойственности была рассмотрена в довоенной работе М.Г.Крейна в связи с задачами теории моментов. Эта схема до сих пор используется при изучении различных задач наилучшего приближения, а также некоторых других экстремальных задач теории функций.

Более общая геометрическая схема двойственности была предложена в [47] (см. также [49], [50]). В этой схеме в качестве основной рассматривается задача о крайней точке зацепления убывающего семейства множеств с некоторым фиксированным множеством, а в качестве двойственной - задача строгого отделения от указанного фиксированного множества возможно большего числа множеств семейства. Приложения этой схемы базируются на различных теоремах отделимости, включая упоминавшиеся выше теоремы об отделимости нетелесных выпуклых множеств.

Принцип возможных направлений систематически использовался в работах [I], [5], [42], [43], посвященных изучению различных выпуклых и невыпуклых экстремальных задач.

<u>Конкретные бесконечномерные задачи</u>. Для выяснения общих закономерностей в тех или иных конечномерных моделях оптимизации оказывается полезным изучение непрерывных аналогов соответствующих экстремальных задач. Это приводит часто к весьма сложным бесконечномерным задачам, исследование которых требует развития тех или иных разделов функционального анализа. Характерным примером такого рода может служить рассмотренная в [8] (см. также [9], [17], [18]) задача о перемещении массы на метрическом компакте, представляющая из себя бесконечномерный аналог обычной транспортной задачи.

Пусть B - семейство борелевских множеств компакта Q с метрикой $r(x,y)$, а φ_1 и φ_2 - конечные неотрицательные σ-аддитивные меры на B, которые интерпретируются как имеющееся и требуемое распределения массы на Q. Если при этом $\varphi_1(Q)=\varphi_2$, то каждая σ-аддитивная по своим аргументам функция $\psi: B\times B \to R_+$, удовлетворяющая условию

$$\psi(e,Q)=\psi_1(e),\ \psi(Q,e)=\psi_2(e),\ e\in B,$$

может рассматриваться как допустимый план перевозок, при котором затраты выражаются следующим интегралом

$$\mu(\psi)=\iint_{QQ}r(x,y)\,\psi(de,de').$$

Оказывается, что допустимый план перевозок является оптимальным (характеризуется минимальными затратами $\mu(\psi)$) в том и только том случае, если найдется функция $u:Q\to R$ такая, что

$$u(y)-u(x)\leq r(x,y),\ x\in Q,\ y\in Q,$$

причем в этом неравенстве достигается равенство, если $\psi(e_x,e_y)>0$ для любых окрестностей e_x и e_y точек x и y.

Интересно отметить, что этот результат позволяет в несколько строк доказать справедливость известной гипотезы Монжа, в то время как классическое доказательство этого факта, данное Аппелем, занимает около двухсот страниц.

Результаты исследования некоторых других бесконечномерных аналогов конкретных моделей оптимизации отражены в [49], [50]. Отметим, в частности, что бесконечномерный аналог классической теоремы о максимальном потоке и минимальном разрезе потребовал изучения некоторых классов неаддитивных функций множеств [54].

Важный класс бесконечномерных экстремальных задач, связанных с выпуклыми поверхностями, рассмотрен в [27], [28], [31]. Теоретические результаты, о которых шла речь в первом параграфе, позволили уложить указанные задачи в общую схему математического программирования и получить принципиальное решение некоторых классов таких задач при наличии большого числа дополнительных ограничений, в то время как в классических исследованиях обычно ограничивались рассмотрением экстремальных задач с одним или двумя ограничениями. Особо отметим работу [30], в которой выпуклые множества рассматриваются в линейной структуре, предложенной Бляшке.

Интересные результаты получены также в теории наилучших приближений. Например, в [46] было показано, что каков бы ни был компакт Q, множество решений задачи наилучшего приближения элементами n-мерного подпространства $P\subset C(Q)$ для любой функции $f \in C(Q)$ имеет размерность, не большую чем r, в том и только том случае, если каждые $r+1$ линейно-независимых элементов из P имеют не более $n-r-1$ общих корней. Это позволило ввести понятие чебышевского ранга, получившее в дальнейшем ряд важных приложений. Некоторые другие результаты в области приближений отражены в последней главе работы [52].

Установленные в [20], [21] общие теоремы о характеристике штрафных функций позволили наметить интересный подход к разработке эффективных методов решения для некоторых важных классов задач математической физики.

<u>Модели экономической динамики</u>. Простейшая динамическая модель функционирования стационарной экономики задаётся с помощью так называемой производственной функции, показывающей, какие виды продукции и в каких количествах можно получить при заданных затратах. Математически производственная функция выражается с помощью точечно-множественного отображения, сопоставляющего каждой точке выпуклого конуса (трактуемой как имеющиеся ресурсы) некоторое выпуклое подмножество этого же конуса (характеризующее множество возможных выпусков продукции). При этом из содержательных соображений следует, что указанное отображение удовлетворяет условию вогнутости.

Таким образом, анализ динамических моделей сводится в конечном счете к изучению соответствующих выпуклых операторов. Для таких операторов естественным образом определяется понятие собственных чисел, которые тесно связаны с возможными т е м п а м и р о с т а моделируемой экономической системы. Ввиду этого, особое значение приобретает проблема описания спектра соответствующих операторов. Для важного класса динамических моделей эта задача полностью решена.

Наряду с рассмотренной задачей классического плана при изучении динамических моделей возникают также специфические проблемы. Важнейшей проблемой такого рода является выделение и описание различных классов траекторий, оптимальных в том или ином смысле. Содержательно эти траектории отвечают наиболее желательным путям развития экономики.

Исследование указанных классов траекторий ведется по двум направлениям. Одно из этих направлений непосредственно связано с идеями двойственности для задач линейного программирования, позволяющими охарактеризовать оптимальные решения на языке объективно обусловленных оценок. В этом плане в настоящее время получены уже окончательные результаты - т е о р е м ы о х а р а к т е р и с т и к е. Оказывается, что и здесь каждая оптимальная траектория при не очень ограничительных предположениях характеризуется некоторой динамической системой объективно обусловленных оценок.

Второе направление связано с изучением асимптотического поведения оптимальных траекторий. В этом направлении получены разнообразные результаты о близости оптимальных траекторий к равновесным (неймановским граням). Соответствующие предложения принято называть т е о р е м а м и о м а г и с т р а л и. Наряду с теоремами о магистрали в слабой и сильной формах, устанавливающих близость оптимальных траекторий к неймановским граням, получены теоремы о магистрали в сильнейшей форме. Принципиальное отличие последних теорем от предыдущих состоит в том, что в них устанавливаются условия, при которых основная часть оптимальной траектории целиком лежит в неймановской грани.

Значительный вклад в развитие описанной тематики внесен сотрудниками МЭО (см., например, [12], [14], [24], [25], [37], [39], [44], [45]). Некоторые принципиальные вопросы были здесь впервые поставлены, а другие получили окончательное решение. Это относится, в частности, к общей стоимостной характеристике оптимальных траекторий и к теоремам о магистрали в сильнейшей форме. Детальному изложению указанных результатов посвящена обзорная статья [40], а также книга [41].

Литература

1. АКИЛОВ Г.П., КАНТОРОВИЧ Л.В., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Экстремальные состояния и экстремальные управления. - "Вестн. Ленингр. ун-та . Серия математика, механика, астрономия." 1967, № 7, вып. 2, с. 30-37.
2. БУЛАВСКИЙ В.А., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Об одном обобщении понятия строго выпуклой функции. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1969, вып. 14, с. 7-20.
3. ВАСИЛЬЕВ В.А. О сходимости минимальных элементов в некоторых шкалах строгих норм в пространстве прямоугольных матриц. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1969, вып. 14, с. 21-27.

4. ВЕРТГЕЙМ Б.А., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. К определению квазивыпуклых функций. – В кн.: Математическое программирование. М., 1966, с. 121-134.

5. ДЕМЬЯНОВ В.Ф., РУБИНОВ А.М. Приближенные методы решения экстремальных задач. Л., Изд-во ЛГУ, 1968, с. 180.

6. КАНТОРОВИЧ Л.В. Математические методы организации и планирования производства. Изд. ЛГУ, Л., 1939, 64 с.

7. КАНТОРОВИЧ Л.В. Об одном эффективном методе решения некоторого класса экстремальных проблем. – "Докл. АН СССР", 1940, т.28, № 3, с. 212-215.

8. КАНТОРОВИЧ Л.В. О перемещении масс. – "Докл. АН СССР", 1942, т. 37, № 7-8, с. 227-229.

9. КАНТОРОВИЧ Л.В. Об одной задаче Монжа. – "Успехи мат. наук", 1948, т. 3, № 2, с. 225-226.

10. КАНТОРОВИЧ Л.В. Подбор поставок, обеспечивающий максимальный выпуск продукции при заданном ассортименте. – "Лесная промышленность", 1949, №7, с.15-17; №8, с.17-19.

11. КАНТОРОВИЧ Л.В. Экономический расчёт наилучшего использования ресурсов. М., 1959, 343 с.

12. КАНТОРОВИЧ Л.В. Динамическая модель оптимального планирования. – В кн.: Планирование и эконом.-матем. методы. М., 1964, с. 323-296.

13. КАНТОРОВИЧ Л.В., ГАВУРИН М.К. Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков. – В кн.: Проблемы повышения эффективности работы транспорта. М.-Л., Изд. АН СССР, 1949, с. 110-138.

14. КАНТОРОВИЧ Л.В., ГОРЬКОВ Л.И. О некоторых функциональных уравнениях, возникающих при анализе однопродуктовой экономической модели. – "Докл. АН СССР", 1959, т. 129, № 4, с. 732-735.

15. КАНТОРОВИЧ Л.В., ЗАЛГАЛЛЕР В.А. Расчёт рационального раскроя промышленных материалов. Л., 1951, 198 с.

16. КАНТОРОВИЧ Л.В., МАКАРОВ В.Л. Дифференциальные и функциональные уравнения, возникающие в моделях экономической динамики. – "Сиб. матем. ж.", 1970, т. 11, № 5, с.1046-1059.

17. КАНТОРОВИЧ Л.В., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Об одном функциональном пространстве и некоторых экстремальных задачах. – "Докл. АН СССР", 1957, т. 115, № 6, с. 1058-1061.

18. КАНТОРОВИЧ Л.В., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Об одном пространстве вполне аддитивных функций. – "Вестн. Ленингр. ун-та. Серия математика, механика, астрономия", 1958, № 7, вып.2, с. 52-59

19. КАПЛАН А.А. Достаточные условия максимума для некоторых классов задач нелинейного программирования. – В кн.: Математическое программирование (ред. Л.В.Канторович). М., 1966, с. 112-116.

20. КАПЛАН А.А. К характеристике штрафных функций. – В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1972, вып. 8(25), с. 13-22.

21. КАПЛАН А.А. Характеристические свойства штрафных функций. - "Докл. АН СССР", 1973, т.210, № 5, с.1018-1021.

22. КАПЛАН А.А., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. К теореме Куна-Таккера. - "Докл. АН СССР", 1969, т. 188, № 5, с. 993-996.

23. КАПЛАН А.А., РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Об одном обобщении теоремы Куна-Таккера. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1969, вып. 14, с. 49-60.

24. КРАСС И.А. Асимптотика растущих траекторий в модели Неймана-Гейла. - "Докл. АН СССР", 1971, т.196, № 1, с.38-39.

25. КРАСС И.А. О непрерывности технологического отображения в модели Неймана-Гейла. - "Докл. АН СССР", 1971, т. 197, № 6, с. 1255-1257.

26. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Положительные линейные в смысле Минковского функционалы над выпуклыми поверхностями. - "Докл. АН СССР", 1970, 192, № 5, с. 984-986.

27. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Общее решение плоской изопериметрической задачи. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1970, вып. 17, с. 149-152.

28. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Ограничения типа включения в задачах изопериметрического типа. - В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1971, вып. 3(20), с. 103-110.

29. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Некоторые теоремы о сходимости операторов. - "Докл. АН СССР", 1973, т. 208, № 4, с. 771-774.

30. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. Структура Бляшке в программировании изопериметрических задач. - "Матем. заметки", 1973, т.14, № 5, с. 767-775.

31. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С., РУБИНОВ А.М. Задачи типа изопериметра в пространстве выпуклых тел. - В кн.: Оптимальное планирование. Новосибирск, 1969, вып. 14, с. 61-79.

32. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С., РУБИНОВ А.М. Некоторые классы H-выпуклых функций и множеств. - "Докл. АН СССР", 1971, т.197, № 6, с. 1261-1263.

33. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С., РУБИНОВ А.М. Двойственность Минковского и её приложения. - "Успехи мат. наук", 1972, т. 27, № 3, с. 127-176.

34. ЛИНКЕ Ю.Э. Об опорных множествах сублинейных операторов.- "Докл. АН СССР", 1972, т. 207, № 3, с. 531-533.

35. ЛИНКЕ Ю.Э. О существовании опорных линейных операторов к сублинейным операторам со значениями в $C(Q)$. - В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1972, вып. 8(25), с. 52-70.

36. ЛИНКЕ Ю.Э. Сублинейные операторы и непрерывные селекторы. - В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1972, вып. 8(25), с. 71-76.

37. МАКАРОВ В.Л. Асимптотика решений линейных динамических моделей с дискретным временем. - "Докл. АН СССР", 1965, т. 165, № 4, с. 767-769.

38. МАКАРОВ В.Л. Характеристика решений задачи непрерывного линейного и выпуклого программирования. - "Докл. АН СССР", 1967, т. 176, № 5, с. 1007-1008.

39. МАКАРОВ В.Л. Модели оптимального роста экономики. -"Экономика и мат. методы", 1969, т. 5, № 4, с. 571-581.

40. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Суперлинейные точечно-множественные отображения и модели экономической динамики. -"Успехи мат. наук", 1970, т. 25, № 5, с. 126-169.

41. МАКАРОВ В.Л., РУБИНОВ А.М. Математическая теория экономической динамики и равновесия. М., "Наука", 1973, 336 с.

42. Математические модели и методы оптимизации (ред. Л.В. Канторович). Новосибирск, "Наука", 1966.

43. Математическое программирование (ред. Л.В.Канторович). М., "Наука", 1966.

44. РУБИНОВ А.М. Двойственные модели производства. - "Докл. АН СССР", 1968, т. 180, № 4, с. 795-798.

45. РУБИНОВ А.М. Эффективные траектории динамической модели производства. - "Докл. АН СССР", 1969, т. 184, № 6, с. 1294-1297.

46. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Об одном методе исследования выпуклых множеств. - "Докл. АН СССР", 1955, т.102, № 3, с.451-454.

47. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Двойственные экстремальные задачи. - "Докл. АН СССР", 1963, т. 152, № 2, с. 288-291.

48. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Теоремы отделимости выпуклых множеств.- "Сиб. мат. журн.", 1964, т.5, № 5, с. 1098-1124.

49. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Несколько примеров двойственных экстремальных задач.- В кн.: Математическое программирование. М., 1966, с. 9-39.

50. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Двойственность в математическом программировании и некоторые вопросы выпуклого анализа. - "Успехи мат. наук", 1970, т. 25, вып. 5, с. 171-201.

51. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Об одной внутренней характеристике относительно открытых выпуклых множеств. - "Докл. АН СССР", 1970, т. 193, № 3, с. 1004-1007.

52. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Исследования по двойственным экстремальным задачам. - В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1973, вып. 9(26), с. 13-139.

53. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Об одном приложении теоремы А.Д.Александрова о характеристике конечномерных эллипсоидов. - В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1973, вып. 9(26), с. 150-156.

54. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. О некоторых классах неаддитивных функций множеств. - В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1973, вып. 9(26), с. 157-164.

55. РУБИНШТЕЙН Г.Ш. Характеристика насыщения класса выпуклых функций. - В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1973, вып. 9(26), с. 165-180.

56. РУТКОВСКИЙ Н.В. О супремальном ранге K-пространств. - В кн.: Оптимизация. Новосибирск, 1971, вып.3(20),с.153-156.

Поступила в ред.-изд. отд.
7. III. 1974 г.