1973 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 12 (29)

УДК 513.88

# О ПОЛУУПОРЯДОЧЕННОМ КВАДРАТЕ НОРМИРОВАННОГО ПРОСТРАНСТВА

Б.С.Цирельсон

Пусть $X$ – вещественное линейное пространство; $X^2$ будет обозначать фактор-пространство его тензорного квадрата $X \otimes X$ по подпространству, порожденному множеством $\{x \otimes y - y \otimes x : x, y \in X\}$. Элемент этого фактор-пространства, соответствующий элементу $x \otimes y$ из $X \otimes X$, обозначим $xy$ ; вместо $xx$ будем писать $x^2$ . Введем в $X^2$ полуупорядочение с помощью конуса $X^2_+$ , порожденного множеством $K(X) = \{x^2 : x \in X\}$. Это воспроизводящий конус. $X^2$ не является структурой, более того, два несравнимых элемента из $X^2$ никогда не имеют супремума.

Отметим несколько простых алгебраических фактов.

Пусть $X$ и $Y$ – линейные пространства в отделимой двойственности. Тогда существует единственная билинейная форма, приводящая в отделимую двойственность пространства $X^2$ и $Y$ так, что $\langle x^2, y^2 \rangle = (\langle x, y \rangle)^2$ для всех $x \in X$ , $y \in Y$ . При этом элемент $u$ из $X^2$ задает положительный функционал на $Y^2$ тогда и только тогда, когда $u \in X^2_+$ . Сопоставляя каждому $u$ из $X^2$ квадратичный функционал $y \to \langle u, y^2 \rangle$ на $Y$ , получаем линейный и порядковый изоморфизм между $X^2$ и пространством всех $\sigma(Y, X)$ – непрерывных квадратичных форм на $Y$ (квадратичные формы упорядочены поточечно).

Пусть $S : X \to Y$ – линейный оператор. Тогда существует единственный линейный положительный оператор $\tilde{S} : X^2 \to Y^2$ такой, что $\tilde{S}(x^2) = (S(x))^2$ для всех $x \in X$ . Если

$S_1 : X \to Y$ тоже является линейным оператором, то $\tilde{S}_1 = \tilde{S}$ тогда и только тогда, когда $S_1 = S$ или $S_1 = -S$.

Не всякий линейный положительный оператор $T : X^2 \to Y^2$ имеет вид $\tilde{S}$. Для этого необходимо, чтобы $T$ отображал $K(X)$ в $K(Y)$; но и это условие не является достаточным. Оказывается, достаточно, чтобы $T$ был линейным и порядковым изоморфизмом. Доказательству этого предпошлем лемму.

ЛЕММА I. Пусть $u$ представим в виде суммы двух элементов $K(X)$, но сам не принадлежит $K(X)$. Тогда множество $\{v : 0 \le v \le u\}$ порождает в $X^2$ трехмерное подпространство $E_u$; на последнем существует единственная квадратичная форма $A_u$ такая, что $A_u(v) \ge 0 \Longleftrightarrow (v \le 0 \vee v \ge 0)$ для всех $v \in E_u$ и $A_u(u) = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем линейно независимые $x_1$, $x_2$ из $X$ так, что $u = x_1^2 + x_2^2$, и положим $u_1 = x_1^2 - x_2^2$, $u_2 = 2x_1x_2$. Легко проверить, что $\{u, u_1, u_2\}$ есть базис в $E_u$ и форма $A_u(au + bu_1 + cu_2) = a^2 - b^2 - c^2$ обладает указанными свойствами.

ТЕОРЕМА I. Пусть $T : X^2 \to Y^2$ есть линейный и порядковый изоморфизм. Тогда существует обратимый линейный оператор $S : X \to Y$ такой, что $(Sx)^2 = Tx^2$ для всех $x \in X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что размерность $X$ не меньше двух. Заметим, что $K(X)$ равно объединению крайних лучей конуса $X_+^2$, и, следовательно, $u \in K(X) \Longleftrightarrow Tu \in K(Y)$ для всех $u \in X_+^2$.

Пусть $x_1$, $x_2$ – линейно независимые элементы $X$. Положим $u = x_1^2 + x_2^2$, $u_1 = x_1^2 - x_2^2$, $u_2 = 2x_1x_2$. Поскольку $T$ есть изоморфизм, $T(E_u) = E_{Tu}$ и $A_{Tu}(Tv) = A_u(v)$ для $v \in E_u$. Как отмечалось при доказательстве леммы, $\{u, u_1, u_2\}$ есть базис в $E_u$, причем $A_u$ представляется в этом базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, то же выполнено для $\{Tu, Tu_1, Tu_2\}$ и $A_{Tu}$.

С другой стороны, взяв $y_1$, $y_2$ такие, что $y_1^2 = Tx_1^2$, $y_2^2 = Tx_2^2$, обнаруживаем, что той же матрицей представляется $A_{Tu} = A_{y_1^2+y_2^2}$ в базисе $\{y_1^2+y_2^2, y_1^2-y_2^2, 2y_1y_2\}=\{Tu, Tu_1, 2y_1y_2\}$; это показывает, что $Tu_2 = \pm 2y_1y_2$. Заменяя при необходимости $y_2$ на $-y_2$, можем получить $T(x_1x_2)=y_1y_2$. Если $X$ двумерно, остается положить $S(ax_1+bx_2)=ay_1+by_2$; в самом деле,

$$(S(ax_1+bx_2))^2 = a^2y_1^2 + 2aby_1y_2 + b^2y_2^2 = T(ax_1+bx_2)^2.$$

Далее, предполагается, что размерность $X$ не меньше трех. Мы показали, что для каждого двумерного подпространства $H\subset X$ существует линейный оператор $S_H : H \to Y$ такой, что $(S_H x)^2 = Tx^2$ для всех $x\in H$.

Пусть $E\subset X$ - конечномерное подпространство. Обозначим $B_E=\{x^2 : x\in E\}$, $C_E = T(B_E)$, $F=\{y : y^2\in C_E\}$. Используя операторы $S_H$, можно убедиться, что $F$ есть подпространство в $Y$, причем $\dim F = \dim E$.

Зафиксируем ненулевые $x_0$, $y_0$ так, что $Tx_0^2 = y_0^2$. Предположим, что $E$ и $F$ содержат $x_0$ и $y_0$ соответственно и что их размерность не меньше трех. Рассмотрим непрерывное отображение $f: E\setminus\{0\} \to C_E\setminus\{0\}$, $f(x)=Tx^2$ (топологии вводятся естественным образом) и накрывающее отображение $\theta : F\setminus\{0\} \to C_E\setminus\{0\}$, $\theta(y)=y^2$. Поскольку $E\setminus\{0\}$ односвязно, существует непрерывное отображение (см. [3], лемма 6.6.12) $g: E\setminus\{0\} \to F\setminus\{0\}$ такое, что $g\circ\theta = f$ и $g(x_0)=y_0$. Доопределим $g(0)=0$ и покажем, что $g: E\to F$ линейно. Пусть $H\subset E$ - двумерное подпространство, тогда для каждого $x$ из $H$ $(g(x))^2 = (S_H x)^2$, т.е. $g(x) = \pm S_H x$; но $H\setminus\{0\}$ связно, так что знак в этой формуле не зависит от $x$.

Итак, для каждого подпространства $E\subset X$, $3\le \dim E<\infty$, $E\ni x_0$, существует единственный линейный оператор $S_E : E\to Y$ такой, что $(S_E x)^2 = Tx^2$ для всех $x\in E$ и $S_E x_0 = y_0$; остается "склеить" эти операторы, и доказательство теоремы заканчивается.

Перейдем к рассмотрению нормированных пространств. Если на $X$ задана норма, естественно рассмотреть на $K(X)$ функцию $x^2 \to \|x\|^2$. С другой стороны, если на $K(X)$ задана функция

$P$, то эквивалентны следующие утверждения:

1. $P$ положительно однородна и для любых $u$, $v$, $w$ из $K(X)$ $u \le v + w \Rightarrow P(u) \le P(v) + P(w)$.

2. $P$ является поточечным супремумом некоторого множества линейных положительных функционалов на $X^2$.

3. Существует полунорма $p$ на $X$ такая, что $P(x^2) = (p(x))^2$ для всех $x \in X$.

Имеется несколько естественных способов продолжения функции $P$, для которой эти утверждения справедливы, с $K(X)$ на $X^2_+$. Мы сделаем это с помощью представляющих мер специального вида.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Стандартной представляющей мерой для точки $u$ из $X^2_+$ назовем вероятностную меру $\nu_u$ на $K(X)$, являющуюся образом некоторой конечномерной гауссовской центрированной меры на $X$ и удовлетворяющую условию $\int_{K(X)} v \, d\nu_u(v) = u$. (Интегрирование производится, по существу, в конечномерном подпространстве.)

Легко проверить, что каждая точка из $X^2_+$ имеет ровно одну стандартную представляющую меру.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пространством с нормированным конусом назовем пару $(Z, P)$, где $Z$ – полуупорядоченное линейное пространство с воспроизводящим конусом $Z_+$, $P$ – функция на $Z_+$ такая, что

1. $0 < u \le v \Rightarrow 0 < P(u) \le P(v)$.

2. $P(au) = aP(u)$ для всех $a \ge 0$, $u \in Z_+$.

3. Существует $c$ такое, что $P(u+v) \le c(P(u) + P(v))$ для всех $u$, $v \in Z_+$.

Если $X$ есть нормированное пространство, определим функцию $P$ на $X^2_+$ равенством $P(u) = \int_{K(X)} P(v) \, d\nu_u(v)$. ($\nu_u$ – стандартная представляющая мера; на $K(X)$ $P$ уже определена, $P(x^2) = \|x\|^2$.) Полученное пространство с нормированным конусом будем обозначать снова через $X^2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Расстоянием (Банаха – Мазура) между пространствами с нормированными конусами $(Z_1, P_1)$ и $(Z_2, P_2)$ назовем

$$\inf (\ln \|T\| + \ln \|T^{-1}\|),$$

где инфимум берется по всем линейным и порядковым изоморфизмам $T: \mathcal{Z}_1 \to \mathcal{Z}_2$, причем $\|T\|$ обозначает $\sup\limits_{u>0} \frac{P_2(Tu)}{P_1(u)}$.

Это определение аналогично обычному определению расстояния Банаха - Мазура для банаховых пространств ([2], стр. 2II).

ТЕОРЕМА 2. Для любых банаховых пространств $X$ и $Y$

$$\rho(X, Y) = \frac{1}{2}\rho(X^2, Y^2).$$

(Слева $\rho$ - расстояние между банаховыми пространствами, справа - между пространствами с нормированными конусами.)

Доказательство получается непосредственно из теоремы I и определений.

Оценка снизу расстояний для пространств с нормированными конусами во многих случаях оказывается более простой задачей, чем то же для банаховых пространств. Посредством теоремы 2 удается доказать отсутствие линейного гомеоморфизма для многих пар пространств Орлича и некоторых других симметричных пространств. При этом используется информация о нормах реализаций гауссовских случайных процессов в этих пространствах.

Автор благодарит Д.А.Владимирова за постоянное внимание к его работе.

## Литература


1. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., Физматгиз, 1961.
2. БАНАХ С.С. Курс функціонального аналізу, Київ, "Радянська школа", 1948.
3. ХИЛТОН П.Дж., УАЙЛИ С. Теория гомологий, М., "Мир", 1966.


Поступила в ред.-изд. отд.

26. II. 1973 г.