УДК 513.8 + 512.2

АНАЛОГ НЕРАВЕНСТВА МЕЖДУ СРЕДНИМ АРИФМЕТИЧЕСКИМ И СРЕДНИМ ГАРМОНИЧЕСКИМ ДЛЯ ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

В.П.Федотов

Введение

В работе рассматриваются действия над замкнутыми выпуклыми множествами из некоторого локально выпуклого пространства. Все необходимые определения и формулировки читатель может найти в [1], [2] и [3]. На протяжении всей статьи фиксируется хаусдорфово локально выпуклое пространство E над полем R вещественных чисел. Через E' обозначено сопряжённое к E пространство. Для подмножеств E обычным образом определяются сумма $A+B=\{a+b : a\in A,\ b\in B\}$, произведение на вещественный скаляр $\lambda A=\{\lambda a : a\in A\}$ и поляра $A^{\wedge}$, или $\hat{A}=\{f\in E' : f(a)\le 1\ \forall a\in A\}$. Чтобы обеспечить взаимную однозначность полярного соответствия, введём класс $W(E)$ замкнутых выпуклых множеств, содержащих 0 пространства E. На протяжении всей статьи будут рассматриваться без дополнительных оговорок только множества из классов $W(E)$ и $W(E')$. Напомним, что они характеризуются равенством $A=A^{\wedge\wedge}$.

Средним (векторным средним, центром тяжести) множеств $A_1, \dots, A_n$ будем, как обычно, называть множество $\frac{A_1+\dots+A_n}{n}$, образованное барицентрами всех симплексов (возможно, вырожденных), имеющих по одной вершине в каждом из $A_1, \dots, A_n$. В работе рассматривается также множество

$\frac{(\hat{A}_1+\ldots+\hat{A}_n)}{n}$, которое будем называть инверсным средним множеств $A_1, \ldots, A_n$. Такое название объясняется тем, что $(\hat{A}_1+\ldots+\hat{A}_n)$ совпадает с инверсной суммой множеств $A_1, \ldots, A_n$, введённой другим способом в [2] для конечномерного случая. В настоящей работе доказана

ТЕОРЕМА. При любых $A_1, \ldots, A_n \in W(E)$ выполнено включение $\frac{A_1+\ldots+A_n}{n} \supset \left(\frac{\hat{A}_1+\ldots+\hat{A}_n}{n}\right)^{\wedge}$, равенство в котором достигается только при условии $A_1=\ldots=A_n$.

Это включение является аналогом классического неравенства между средним арифметическим и средним гармоническим нескольких положительных чисел, если признать поляру выпуклого множества аналогом обратного положительного числа. Проведенное в § 3 построение продолжает указанную аналогию.

§ I. Доказательство включения

Рассмотрим произвольный функционал $f \in E'$. Обозначим $M=\frac{A_1+\ldots+A_n}{n}$, $H=\left(\frac{\hat{A}_1+\ldots+\hat{A}_n}{n}\right)^{\wedge}$, $m=\sup\limits_M f$ и $a_i=\sup\limits_{A_i} f$ для $i=1,\ldots,n$. Фиксируем произвольно $\varepsilon>0$. Так как $\frac{f}{a_i+\varepsilon}(x) \leq \frac{\sup f}{a_i+\varepsilon}=\frac{a_i}{a_i+\varepsilon}<1$ при любом $x \in A_i$, то $\frac{f}{a_i+\varepsilon} \in \hat{A}_i$ при каждом $i=1,\ldots,n$. Сложив все такие включения, получим:

$$\frac{f}{n}\left(\frac{1}{a_1+\varepsilon}+\ldots+\frac{1}{a_n+\varepsilon}\right) \in \frac{\hat{A}_1+\ldots+\hat{A}_n}{n}=\hat{H}. \tag{I}$$

С другой стороны,

$$0 \in \hat{H}, \tag{2}$$

так как $0 \in \hat{A}_i$ при всех i. Согласно введённым обозначениям, $a_1+\ldots+a_n=mn$, откуда $(a_1+\varepsilon)+\ldots+(a_n+\varepsilon)=n(m+\varepsilon)$, а так как все $a_i \geq 0$, то в силу неравенства между средним арифметическим и средним гармоническим, имеем:

$$\frac{1}{a_1+\varepsilon}+\ldots+\frac{1}{a_n+\varepsilon} \geq \frac{n}{m+\varepsilon}. \tag{3}$$

Из (1), (2), (3) и выпуклости $\hat{H}$ следует, что $\frac{f}{m+\varepsilon} \in \hat{H}$, т.е. $\frac{f(x)}{m+\varepsilon} \le 1$ при всех $x \in H$. В силу произвольности ε, имеем: $f(x) \le m = \sup\limits_M f$ при всех $x \in H$, т.е. $\sup\limits_H f \le \sup\limits_M f$, а так как последнее неравенство выполнено для любого $f \in E'$, то $H \subset M$.

§ 2. Анализ случая равенства

1⁰. Несложные примеры показывают, что, вообще говоря, из $A+C \supset A+B$ не следует $C \supset B$. Тем не менее справедлива

ЛЕММА 1. Если C поглощает A (т.е. $\lambda C \supset A$ при некотором $\lambda > 0$), то из $A+C \supset A+B$ следует $C \supset B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что заключение леммы неверно, т.е. $\exists x \in B$, $x \notin C$. Так как одноточечное множество $\{x\}$ выпукло и компактно, а C выпукло и замкнуто, то $\exists f \in E'$: $f(x) > \sup\limits_C f$. Следовательно, f ограничен на C, а так как C поглощает A, то и на A. Тогда

$$\sup_{A+C} f = \sup_A f + \sup_C f < \sup_A f + f(x) \le$$

$$\le \sup_A f + \sup_B f = \sup_{A+B} f,$$

что противоречит $A+C \supset A+B$.

2⁰. ЛЕММА 2. Если $A+B \subset 2C$ и $\hat{A}+\hat{B} \subset 2\hat{C}$, то в обоих включениях имеет место равенство, причем $A=B=C$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $0 \in A$, следовательно, $B = 0+B \subset A+B \subset 2C$. Аналогично, $A \subset 2C$, $\hat{A} \subset 2\hat{C}$ и $\hat{B} \subset 2\hat{C}$. Перейдя к полярам, получим: $A = \hat{\hat{A}} \supset (2\hat{C})^{\wedge} = \frac{1}{2}C$ и, аналогично, $\hat{A} \supset \frac{1}{2}\hat{C}$, $B \supset \frac{1}{2}C$ и $\hat{B} \supset \frac{1}{2}\hat{C}$. Далее, $A + \frac{3}{2}C \supset \frac{1}{2}C + \frac{3}{2}C = 2C \supset A+B$, откуда $B \subset \frac{3}{2}C$ и, аналогично, $A \subset \frac{3}{2}C$, $\hat{A} \subset \frac{3}{2}\hat{C}$ и $\hat{B} \subset \frac{3}{2}\hat{C}$. Снова переходим к полярам: $A \supset \frac{2}{3}C$, $B \supset \frac{2}{3}C$, $\hat{A} \supset \frac{2}{3}\hat{C}$ и $\hat{B} \supset \frac{2}{3}\hat{C}$ и т.д. Продолжая это рассуждение по индукции, при каждом n получим $\frac{n}{n+1}C \subset A \subset \frac{n+1}{n}C$ и $\frac{n}{n+1}C \subset B \subset \frac{n+1}{n}C$, откуда $\bar{A} = \bar{B} = \bar{C}$, где $\bar{A}$ означает замыкание множества A, и, благодаря замкнутости B и A, $A = B$ и оба включения в формулировке леммы обращаются в равенство.

3^0. Рецессивным конусом 0^+A множества A называется конус, образованный лучами, по которым A удаляется в бесконечность, т.е. всеми такими лучами ℓ, что вместе с каждой своей точкой a A содержит весь луч $a+\ell$ (см., например, [2]).

ЛЕММА 3. Если $\frac{A_1+\ldots+A_n}{n} = \left(\frac{\hat{A}_1+\ldots+\hat{A}_n}{n}\right)^\wedge$, то $0^+A_1 = \ldots = 0^+A_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $(0^+A)^\wedge = \{f \in E' : \sup_A f = +\infty\}$. Допустим, что среди 0^+A_i есть неравные между собой. Это значит, что найдется функционал f такой, что для некоторых A_i и A_j: $\sup_{A_i} f = \infty > \alpha > \sup_{A_j} f \geq 0$. Так как $\frac{f}{\alpha}(x) \leq \frac{A_j}{\alpha} < 1$ при всех $x \in A_j$, то $\frac{f}{\alpha} \in \hat{A}_j$ и $\frac{f}{\alpha n} \in \frac{\hat{A}_1+\ldots+\hat{A}_n}{n} = H$, откуда $\sup_H f \leq \alpha n < \infty = \sup_M f$, что противоречит условию леммы.

4^0. Наконец, докажем, что если $\frac{A_1+\ldots+A_n}{n} = \left(\frac{\hat{A}_1+\ldots+\hat{A}_n}{n}\right)^\wedge$, то $A_1 = \ldots = A_n$.

Допустим противное, т.е. что среди A_i есть различные между собой. Не теряя общности, можно считать, что $A_1 \neq A_2$. Тогда, как доказано в лемме 2, $\frac{A_1+A_2}{2} \neq \left(\frac{\hat{A}_1+\hat{A}_2}{2}\right)$, т.е. $\exists f : \sup_{\frac{A_1+A_2}{2}} f > \sup_{\left(\frac{(A_1+A_2)}{2}\right)^\wedge} f$. Благодаря лемме 3, имеем: $0^+A_1 = 0^+A_2 = 0^+\left(\frac{A_1+A_2}{2}\right)$ и $0^+A_1 = 0^+A_2 = 0^+(A_1 \cap A_2) = 0^+((A_1^\wedge + A_2^\wedge)^\wedge) = 0^+\left(\left(\frac{\hat{A}_1+\hat{A}_2}{2}\right)^\wedge\right)$, откуда следует, что f ограничен на $\frac{A_1+A_2}{2}$, A_1 и A_2.

Рассмотрим теперь A_3 и A_4. Обозначим:

$$H = \left(\frac{\hat{A}_1+\hat{A}_2+\hat{A}_3+\hat{A}_4}{4}\right)^\wedge, \quad I = \left(\frac{\frac{\hat{A}_1+\hat{A}_2}{2}+\frac{\hat{A}_3+\hat{A}_4}{2}}{2}\right)^\wedge,$$

$$J = \left(\frac{\left(\left(\frac{\hat{A}_1+\hat{A}_2}{2}\right)^\wedge\right)^\wedge + \left(\left(\frac{\hat{A}_3+\hat{A}_4}{2}\right)^\wedge\right)^\wedge}{2}\right)^\wedge, \quad K = \frac{\left(\frac{\hat{A}_1+\hat{A}_2}{2}\right)^\wedge + \left(\frac{\hat{A}_3+\hat{A}_4}{2}\right)^\wedge}{2},$$

$$L = \frac{\frac{A_1+A_2}{2}+\frac{A_3+A_4}{2}}{2}, \quad M = \frac{A_1+A_2+A_3+A_4}{4}.$$

$H = I$, $L = M$. Благодаря доказанному в § I основному включению, $J \subset K \subset L$, причём $K \neq L$, так как по лемме 3 f ограничен на A_3 и A_4, откуда:

$$2\sup_K f = \sup_{\left(\frac{\hat{A}_1+\hat{A}_2}{2}\right)^\wedge} f + \sup_{\left(\frac{\hat{A}_3+\hat{A}_4}{2}\right)^\wedge} f < \sup_{\frac{\hat{A}_1+\hat{A}_2}{2}} f + \sup_{\frac{\hat{A}_3+\hat{A}_4}{2}} f = 2\sup_L f.$$

Наконец, $\sup_I f = \sup_J f$, так как $\left(\left(\frac{\hat{A}_1+\hat{A}_2}{2}\right)^\wedge\right)^\wedge$ и $\frac{\hat{A}_1+\hat{A}_2}{2}$, так же, как и $\left(\left(\frac{\hat{A}_3+\hat{A}_4}{2}\right)^\wedge\right)^\wedge$ и $\frac{\hat{A}_3+\hat{A}_4}{2}$, могут различаться лишь с точностью до замыкания. Итак, получено: $\sup_H f < \sup_M f$, что противоречит равенству H и M.

§ 3. Аналог среднего геометрического для выпуклых множеств

Фиксируем произвольные A и $B \in W(E)$. Рассмотрим две последовательности H_i и M_i, определенные рекуррентными соотношениями:

$$M_{i+1} = \frac{M_i + H_i}{2} \quad \text{и} \quad H_{i+1} = \left(\frac{\hat{M}_i + \hat{H}_i}{2}\right)^\wedge$$

с начальными условиями:

$$M_1 = \frac{A+B}{2} \quad \text{и} \quad H_1 = \left(\frac{\hat{A}+\hat{B}}{2}\right)^\wedge.$$

Как доказано в § I, $M_i \supset H_i$ при всех i. Отсюда следует, что последовательность M_i не возрастает, а H_i не убывает. Может, однако, случиться, что эти последовательности либо не имеют пределов, либо стабилизируются, оставаясь различными (последнее, например, произойдёт, если A и B – два различных конуса с вершиной в 0, тогда $M_i = \mathrm{conv}(A \cup B)$, а $H_i = A \cap B$ при всех i.) Тем не менее в довольно широком классе случаев эти последовательности будут иметь некоторый общий предел $G = G(A,B)$. Для этого достаточно, например, потребовать сепарабельность E и компактность A, B, $\hat{A}$ и $\hat{B}$.

ПРИМЕР I. Если $A = \lambda K$ и $B = \mu K$, где $K \in W(E)$, а λ и μ – неотрицательные числа, то $G(A,B) = \sqrt{\lambda\mu}\, K$. Это непосредственно следует из того, что в случае положительных чисел аналогичная процедура даёт обычное среднее геометрическое.

ПРИМЕР 2. В случае $E=R^n$ можно отождествлять E' и E, т.е. считать, что поляра находится в том же пространстве, где и исходное множество. Пусть A – выпуклый компакт в R^n, содержащий 0 вместе с некоторой его окрестностью. Тогда $G(A,\mathring{A})=\mathcal{U}$, где $\mathcal{U}$ – единичный шар пространства R^n.

Литература

1. БУРБАКИ Н. Топологические векторные пространства. ИЛ. 1959.
2. РОКАФЕЛЛАР Р. Выпуклый анализ. М., "Мир", 1973.
3. ПИНСКЕР А.Г. Пространство выпуклых множеств локально выпуклого пространства.– В сб.: Некоторые классы полуупорядоченных пространств. Изд. ЛГУ, Л., 1966.

Поступила в ред.-изд. отд.
26. II. 1973 г.