УДК 513.88

ОБ ОДНОМ СУБЛИНЕЙНОМ ФУНКЦИОНАЛЕ

А.М.Рубинов

В работе определяется некоторый сублинейный функционал и с его помощью изучаются связи между неподвижными точками нерастягивающего оператора и его сопряженного, а также сильная сходимость средних арифметических степеней оператора.

I. Рассмотрим локально выпуклое пространство X, в котором определен непрерывный сублинейный функционал p, принимающий лишь конечные значения. Через $\mathcal{U}_p$ обозначим множество всех опорных к p функционалов из пространства X', сопряженного к X; $\mathcal{U}_p = \{\mu \in X' : \mu \leq p\}$ (Неравенство $f \geq g$, где f и g - функционалы, определенные на X, означает, что $f(x) \geq g(x)$ для всех $x \in X$.) Заметим,[ж)] что $\mathcal{U}_p$ - выпуклое, компактное в топологии $\sigma(X', X)$ множество и $p(x) = \max\limits_{\mu \in \mathcal{U}_p} \mu(x)$ для всех $x \in X$. Пусть $A: X \to X$ - линейный оператор, причем $p(Ax) \leq p(x)$ для любого $x \in X$. Через A' обозначим сопряженный к A оператор (в двойственности (X, X')).

Для $\mu \in \mathcal{U}_p$ и $x \in X$ имеем $(A'\mu)(x) = \mu(Ax) \leq p(Ax) \leq p(x)$, откуда следует, что $A'\mu \in \mathcal{U}_p$. Итак, $A'(\mathcal{U}_p) \subset \mathcal{U}_p$. Из принципа Шаудера-Тихонова следует, что A' имеет в $\mathcal{U}_p$ неподвижные точки. Множество всех неподвижных точек оператора A', содержащихся в $\mathcal{U}_p$, обозначим через $\mathcal{U}'$. Заметим, что $\mathcal{U}'$

ж) Все используемые в работе свойства сублинейных функционалов можно найти, например, в [I].

выпукло и компактно в $\sigma(X', X)$.

Введем в рассмотрение функционал q' , положив для $x \in X$

$$q'(x) = \max_{\mu \in \mathcal{U}'} \mu(x) .$$

Справедлива следующая

ЛЕММА I. Функционал $\tilde{q}$, определенный на X , совпадает с q' в том и только том случае, когда 1) $\tilde{q}$ сублинеен; 2) $\tilde{q} \geq \mu$ для любого функционала $\mu \in \mathcal{U}'$; 3) $\tilde{q} \leq p$; 4) $\tilde{q}(Ax-x) = \tilde{q}(x-Ax) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно проверяется, что функционал q' обладает свойствами I)–4). Проверим теперь, что функционал $\tilde{q}$, обладающий свойствами I) – 4), совпадает с q' . Отметим прежде всего, что, как следует из 3), $\tilde{q}$ ограничен и, стало быть, непрерывен. Отсюда следует, в частности, что $\tilde{q}(x) = \max_{\mu \in \tilde{\mathcal{U}}} \mu(x)$, где $\tilde{\mathcal{U}}$ – множество всех линейных функционалов, опорных к $\tilde{q}$. Покажем, что $\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{U}'$. Из свойства 2) следует, что $\tilde{\mathcal{U}} \supseteq \mathcal{U}'$. Пусть $\mu \in \tilde{\mathcal{U}}$. Тогда для $x \in X$ выполняются соотношения:

$$\mu(Ax-x) \leq \tilde{q}(Ax-x) = 0 ; \qquad \mu(x-Ax) \leq \tilde{q}(x-Ax) = 0 ,$$

откуда следует, что $\mu = A'\mu$. Кроме того, так как $\tilde{\mathcal{U}} \subset \mathcal{U}_p$ (это следует из 3)), то $\mu \in \mathcal{U}_p$. Итак, $\mu \in \mathcal{U}'$. Мы показали, что $\mathcal{U}' = \tilde{\mathcal{U}}$. Это и означает, что $q' = \tilde{q}$. Лемма доказана.

Используя лемму, можно привести "явное" (не использующее "сопряженных" терминов) описание функционала q' . Рассмотрим положительный теплицевский метод суммирования

$$T = \begin{pmatrix} t_{00} & \cdots & t_{0n} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ t_{n0} & \cdots & t_{nn} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

(здесь $t_{kn} \geq 0$; $t_{kn} \xrightarrow[k]{} 0$ ($n = 0, 1, \ldots$); $\sum_{n=0}^{\infty} t_{kn} \xrightarrow[k]{} 1$.)

Предположим, далее, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} |t_{kn} - t_{kn-1}| \xrightarrow[k]{} 0 . \qquad (1)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть T - положительный теплицевский метод суммирования, удовлетворяющий условию (I). Тогда

$$q(x) = \overline{\lim_{k}} \lim_{m} p\left(\sum_{n=0}^{m} t_{kn} A^n x\right) \qquad (x \in X).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, прежде всего, что последовательность $m \mapsto p\left(\sum_{n=0}^{m} t_{kn} A^n x\right)$ является последовательностью Коши и поэтому сходится. Проверим, что функционал $\tilde{q} : x \mapsto \overline{\lim_{k}} \lim_{m} p\left(\sum_{n=0}^{m} t_{kn} A^n x\right)$ удовлетворяет условиям 1) - 4) леммы 4.

1) Сублинейность $\tilde{q}$ легко следует из сублинейности p.

2) Пусть $\mu \in \mathcal{U}'$. Имеем для $x \in X$ и натуральных m

$$\sum_{n=0}^{m} t_{kn}\, \mu(x) = \mu\left(\sum_{n=0}^{m} t_{kn} A^n x\right) \le p\left(\sum_{n=0}^{m} t_{kn} A^n x\right),$$

откуда

$$\mu(x) = \lim_{k} \sum_{n=0}^{\infty} t_{kn}\, \mu(x) \le \overline{\lim_{k}} \lim_{m} p\left(\sum_{n=0}^{m} t_{kn} A^n x\right) = \tilde{q}(x).$$

Таким образом, $\mu \le \tilde{q}$.

3) Покажем, что $\tilde{q} \le p$. Имеем для $x \in X$ и натуральных m

$$p\left(\sum_{n=0}^{m} t_{kn} A^n x\right) \le \sum_{n=0}^{m} t_{kn}\, p(A^n x) \le \sum_{n=0}^{m} t_{kn}\, p(x),$$

откуда и следует требуемое неравенство.

4) Проверим, наконец, что $\tilde{q}(x - Ax) = \tilde{q}(Ax - x) = 0 \quad (x \in X)$. Отметим, прежде всего, что для $x \in X$ и натуральных k и n выполняется неравенство

$$p((t_{kn} - t_{kn-1}) A^n x) \le |t_{kn} - t_{kn-1}| \max(p(A^n x), p(-A^n x)) \le$$
$$\le |t_{kn} - t_{kn-1}| \max(p(x), p(-x)).$$

Поэтому

$$p\left(\sum_{n=0}^{m} t_{kn} A^n (x - Ax)\right) \le$$
$$\le t_{k0}\, p(x) + \sum_{n=1}^{m} |t_{kn} - t_{kn-1}| \max(p(x), p(-x)) + t_{km}\, p(-x).$$

Из условия (I) теперь следует, что $\tilde{q}(x - Ax) \le 0 \quad (x \in X)$.

Рассуждая подобным образом, легко убедиться в том, что

$$\tilde{q}(Ax-x) \le 0 \qquad (x \in X) .$$

Так как $\tilde{q}$ – сублинейный функционал, то $\tilde{q}(y) \ge -\tilde{q}(-y)$ для любого $y \in X$. Предположив, что $\tilde{q}(Ax-x) < 0$, получим, что $\tilde{q}(x-Ax) \ge -\tilde{q}(Ax-x) > 0$, что невозможно. Таким образом, $\tilde{q}(Ax-x)=0$. Подобные рассуждения показывают, что и $\tilde{q}(x-Ax)=0$ для всех $x \in X$. Предложение доказано.

Нас особо будет интересовать случай, когда T – метод средних арифметических. Положим

$$A_n = \frac{1}{n}(I + A + \ldots + A^{n-1}) ,$$

где I – единичный оператор. Из предложения I вытекает

СЛЕДСТВИЕ I. $q'(x) = \overline{\lim_n}\, p(A_n x)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Справедливо равенство

$$q'(x) = \inf_n p(A_n x) .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что функционал $\tilde{q}(x) = \inf_n p(A_n x)$ удовлетворяет условиям I) – 4) леммы I.

I) Покажем, что $\tilde{q}$ – сублинейный функционал. В доказательстве нуждается лишь субаддитивность $\tilde{q}$. Проверим сначала, что

$$p(A_{nm} x) \le p(A_m x) \qquad (x \in X) \qquad (2)$$

для любых натуральных n, m. Пусть $x \in X$ и $y = A_m x$. Так как

$$\sum_{k=0}^{nm-1} A^k = \sum_{k=0}^{m-1} A^k (I + A^m + \ldots + A^{m(n-1)}),$$

то

$$p(A_{nm} x) = \frac{1}{n} p(y + A^m y + \ldots + A^{m(n-1)} y) \le p(y) = p(A^m x).$$

Пусть теперь $x, y \in X$. Выберем $\varepsilon > 0$ и найдем натуральные числа n и m так, что

$$\tilde{q}(x) > p(A_n x) - \varepsilon , \qquad \tilde{q}(y) > p(A_m y) - \varepsilon .$$

Используя (2), получим

$$\tilde{q}(x+y) \le p(A_{nm}(x+y)) \le p(A_{nm} x) + p(A_{nm} y) \le$$
$$\le p(A_n x) + p(A_m y) < \tilde{q}(x) + \tilde{q}(y) + 2\varepsilon ,$$

откуда и следует требуемая субаддитивность $\tilde{q}$.

2) Пусть $\mu \in \mathcal{U}_p$ и $\mu = A'\mu$. Тогда $\mu(x) = \mu(A_n x)$ при всех $x \in X$ и натуральных n; поэтому $\mu(x) = \mu(A_n x) \leq p(A_n x)$, откуда следует, что $\mu \leq p$.

3) Неравенство $\tilde{q} \leq p$ вытекает из следующих соотношений:

$$\tilde{q}(x) = \inf_n p\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k x\right) \leq \inf_n \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} p(A^k x) \leq p(x) .$$

4) Покажем, что $\tilde{q}(x - Ax) = \tilde{q}(Ax - x) = 0$. Имеем

$$\tilde{q}(x - Ax) = \inf_n p\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} A^k(x - Ax)\right) = \inf_n \frac{1}{n} p(x - A^n x) \leq 0 .$$

Таким же образом $\tilde{q}(Ax - x) \leq 0$. Из полученных неравенств следует так же, как и при доказательстве предыдущего предложения, что $\tilde{q}(x - Ax) = \tilde{q}(Ax - x) = 0$. Предложение доказано.

Из следствия I и предложения 2 вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. Для любого $x \in X$ существует $\lim p(A_n x)$. При этом

$$q(x) = \lim p(A_n x) = \inf_n p(A_n x) = \max_{\mu \in \mathcal{U}} \mu(x) .$$

Сделаем еще следующее

ЗАМЕЧАНИЕ I. Предположим, что оператор A имеет обратный A^{-1}, причем $p(A^{-1}x) \leq p(x)$ ($x \in X$). Тогда, используя лемму I, нетрудно проверить, что $q(x) = \overline{\lim}\, p((2n+1)^{-1}\sum_{k=-n}^{n} A^k x)$.

Функционалы $q_1(x) = \overline{\lim}\, \|A_n x\|$ и $q_2(x) = \overline{\lim}\, \|(2n+1)^{-1}\sum_{k=-n}^{n} A^k x\|$ (где X – нормированное пространство) рассматривались Ю.А. Шрейдером в работе [2]. Там, однако, не отмечено, что эти функционалы совпадают.

2. Покажем, как результаты предыдущего пункта применяются для исследования марковских операторов. Рассмотрим вещественное пространство $C(Q)$ непрерывных функций, определенных на компакте Q; считаем, что в $C(Q)$ стандартным образом введены норма и отношение порядка. Функционал $p: x \longmapsto \max_{t \in Q} x(t)$ $(x \in C(Q))$ сублинеен и непрерывен; при этом множество $\mathcal{U}_p$ совпадает с симплексом вероятностных радоновских мер, определенных на Q. Пусть $A: C(Q) \to C(Q)$ – марковский оператор (т.е. $A \geq 0$ и $A\mathbb{1} = \mathbb{1}$). Нетрудно прове-

рить, что $p(Ax) \le p(x)$ для всех $x \in C(Q)$.

Введем в рассмотрение подпространство X_A пространства $C(Q)$. Это подпространство состоит из всех $x \in C(Q)$, обладающих следующим свойством: существует число $\lambda = \lambda(x)$ такое, что $\mu(x) = \lambda$ для всех $\mu \in \mathcal{U}'$. Результаты предыдущего пункта позволяют дать простое доказательство следующего утверждения.

ТЕОРЕМА I. Следующие условия эквивалентны:

(а) $x \in X_A$ и $\lambda(x) = \lambda$.

(б) $\lim A_n x = \lambda \mathbb{1}$.

(в) Последовательность $(A_n x)$ имеет предельную точку $\lambda \mathbb{1}$ в топологии (возможно, неотделимой) σ', определяемой с помощью порождающей системы полунормы $|x|_\mu = |\mu(x)|$ $(\mu \in \mathcal{U}')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) $\Rightarrow$ (б). Пусть $x \in X_A$ и $\lambda(x) = \lambda$. Тогда

$$q'(x) = \max_{\mu \in \mathcal{U}'} \mu(x) = \lambda$$

$$-q'(-x) = -\max_{\mu \in \mathcal{U}'} \mu(-x) = \min_{\mu \in \mathcal{U}'} \mu(x) = \lambda .$$

В силу следствия 2

$$\lim_n \max_t (A^n x)(t) = \lim_n \min_t (A^n x)(t),$$

откуда и следует (б).

(б) $\Rightarrow$ (в). Очевидно.

(в) $\Rightarrow$ (а). Если $\mu \in \mathcal{U}$, то $\mu(x) = \mu(A_n x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Если $\lambda \mathbb{1}$ - предельная точка последовательности $(A_n x)$ в σ', то $\mu(x) = \lambda$, откуда и следует (а). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Из теоремы I немедленно вытекает следующий хорошо известный факт: соотношение $A_n x \to \lambda(x) \mathbb{1}$ выполняется для любого $x \in C(Q)$ в том и только том случае, когда оператор A' имеет единственную неподвижную точку μ, являющуюся вероятностной мерой. При этом

$$\lambda(x) = \mu(x) = q'(x) = \lim_n \max_t [A_n x](t).$$

Пусть ℓ^∞ - пространство ограниченных последовательностей, c_0 - пространство сходящихся к нулю последовательностей. Ясно, что ℓ^∞/c_0 есть $C(Q)$, где $Q=\beta N - N$, N - натуральный ряд, а βN - компактификация Чеха-Стоуна. Положим $A(\varphi x)=\varphi(\bar{A}x)$, где $\bar{A}:\ell^\infty\to\ell^\infty$ - сдвиг вправо, а $\varphi:\ell^\infty\to \ell^\infty/c_0$ - канонический гомоморфизм.

В рассматриваемом случае элементы множества $\mathcal{U}'$ совпадают с банаховыми пределами (банаховыми средними) (см., например[3]). Элементы множества $\varphi^{-1}(X_A)$ называются (см., например,[4]) почти сходящимися последовательностями. Из теоремы I непосредственно вытекает известная теорема Лоренца (см., например, [4]) : последовательность $(x_n)\in\ell^\infty$ почти сходится тогда и только тогда, когда существует равномерный по κ предел $\lim\limits_n \frac{1}{n}\sum\limits_{i=\kappa}^{\kappa+n} x_i$

п. 3. В работе [5] Рисс и Секефальви - Надь установили, что в гильбертовом пространстве каждый нерастягивающий оператор обладает тем свойством, что любая его неподвижная точка является неподвижной точкой сопряженного. Этот результат они применили для доказательства эргодической теоремы. Ниже приводится обобщение этого результата на случай произвольного нормированного пространства.

В дальнейшем X - нормированное пространство, $p=\|\cdot\|$ (в этом случае $\mathcal{U}_p$ совпадает с единичным шаром сопряженного пространства X'), $A:X\to X$ - нерастягивающий оператор, (т.е. $\|A\|\le 1$).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $x\in X$, $x\ne 0$. Следующие условия эквивалентны:

(а) существует неподвижная точка $\mu\ne 0$ оператора A такая, что $\mu(x)=\|\mu\|\cdot\|x\|$;

(б) $\|x+Ax+\ldots+A^n x\| = n\cdot\|x\| \qquad (n=1,2,\ldots)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) $\Longrightarrow$ (б). Не умаляя общности, считаем, что $\|\mu\|=1$. В этом случае $\mu\in\mathcal{U}'$ и поэтому $q'(x)\ge\mu(x)=\|x\|$. Так как $q'(x)=\inf\limits_n\|A_n x\|$, то $\|x+Ax+\ldots+A^n x\|\ge n\cdot\|x\|$. С другой стороны, поскольку $\|A\|\le 1$, то $\|x+Ax+\ldots+A^n x\|\le\|x\|+\ldots+\|A^n x\|\le n\cdot\|x\|$. Таким образом, (б) доказано.

(б) $\Rightarrow$ (а). Если выполнено (б), то $q'(x)=\|x\|$. Так как

$q'(x)=\max\limits_{\mu\in\mathcal{U}}\mu(x)$, то найдется функционал $\mu\in\mathcal{U}'$ такой, что $\mu(x)=\|x\|$. Ясно, что μ – искомый функционал. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если x – отличная от нуля неподвижная точка оператора A, то для нее выполнено (а). В случае гильбертова пространства отсюда следует упоминавшийся выше результат Рисса и Секефальви-Надя.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть норма пространства X строго выпукла. Тогда (а) выполнено в том и только том случае, когда x – неподвижная точка оператора A.

В самом деле, если (а) имеет место, то, как фактически показано при доказательстве (а) $\Rightarrow$ (б), $\|x+Ax\|=\|x\|+\|Ax\|$, откуда следует, что $Ax=\lambda x$. Нетрудно проверить, что $\lambda=1$.

Рассмотрим теперь оператор A'. Заметим, что $\|A'\|\leqslant 1$. Оператор A является сопряженным к A' в двойственности (X',X). Наряду с A можно рассмотреть оператор A'', сопряженный к A' в двойственности (X',X''). В связи с этим для изучения A' удобно использовать два функционала – q и q'', где

$$q(\mu)=\sup_{x\in\mathcal{U}}\mu(x), \quad q''(\mu)=\max_{x\in\mathcal{U}''}\mu(x).$$

Здесь $\mathcal{U}$ (соответственно $\mathcal{U}''$) множество всех неподвижных точек оператора A (соответственно A''), не превышающих по норме единицу. В дальнейшем считаем, что X естественным образом вложено в пространство X''. Отметим, учитывая это замечание, что $\mathcal{U}=\mathcal{U}''\cap X$. Отсюда легко следует, что q является замыканием (в $\sigma(X',X)$) функционала q'' (т.е. q - наибольший полунепрерывный снизу в $\sigma(X',X)$ функционал, не превосходящий q''). В частности, q'' полунепрерывен снизу (в $\sigma(X',X)$) в некоторой точке μ, в том и только том случае, когда $q''(\mu)=q(\mu)$. Справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Функционал q'' полунепрерывен снизу в $\sigma(X',X)$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{U}''=\overline{\mathcal{U}}$, где черта означает замыкание в $\sigma(X'',X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если q'' полунепрерывен снизу в $\sigma(X',X)$, то $q''=q$. Ясно, что $\mathcal{U}''\supset\overline{\mathcal{U}}$. Пусть $z\in\mathcal{U}''$, $z\notin\overline{\mathcal{U}}$. Тогда существует $\mu\in X'$, при котором

$$\mu(z)>\max_{y\in\overline{\mathcal{U}}}\mu(y)=\sup_{x\in\mathcal{U}}\mu(x)=q(\mu).$$

Таким образом, $q''(\mu)\geq\mu(z)>q(\mu)$, что противоречит условию. Итак, $\mathcal{U}''=\overline{\mathcal{U}}$.

2) Если $\mathcal{U}''=\overline{\mathcal{U}}$, то для любого $\mu\in X'$ имеем

$$q''(\mu)=\max_{x\in\mathcal{U}''}\mu(x)=\sup_{x\in\mathcal{U}}\mu(x)=q(\mu),$$

откуда и следует требуемая полунепрерывность. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Как известно (см., например, [3]), оператор A слабо вполне непрерывен тогда и только тогда, когда $A''(X'')\subset X$. Отсюда следует, что для слабо вполне непрерывного оператора A множества $\mathcal{U}''$ и $\mathcal{U}$ совпадают. Если A слабо вполне непрерывен, то функционал q'' полунепрерывен в $\sigma(X',X)$.

Имеет место

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\mu\in X'$, $\|\mu\|=1$. Следующие условия эквивалентны:

(а) Для любого $\varepsilon>0$ найдется неподвижная точка x оператора A такая, что $\|x\|=1$ и $\mu(x)>1-\varepsilon$.

(б) Функционал q'' полунепрерывен снизу в $\sigma(X',X)$ в точке μ, и, кроме того, $\|\mu+A'\mu+\ldots+(A')^n\mu\|=n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а) $\Rightarrow$ (б). Так как $\|\mu\|=1$, то $q''(\mu)\leq 1$. Кроме того, в силу (а), $q(\mu)\geq 1$. Следовательно, $q(\mu)=q''(\mu)$, и, стало быть, q'' полунепрерывен снизу в $\sigma(X',X)$ в точке μ. Из сказанного следует также, что $q''(\mu)=1$. Поэтому, рассуждая таким же образом, как при доказательстве (а) $\Rightarrow$ (б) в теореме 2, получим, что $\|\mu+A'\mu+\ldots+(A')^n\mu\|=n$

(б) $\Rightarrow$ (а). Если выполнено (б), то $q''(\mu)=\inf_n\|A_n'\mu\|=1$.

а потому и $q(\mu)=\sup\limits_{x\in U}\mu(x)=1$. Из сказанного и следует (а). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Если оператор A слабо вполне непрерывен, то условия (а) и (б) можно сформулировать в следующем виде:

(а$'$) найдется неподвижная точка $x\neq 0$ оператора A такая, что $\mu(x)=\|x\|$;

(б$'$) $\|\mu+A'\mu+\ldots+(A')^n\mu\|=n$.

Доказательство эквивалентности (а$'$) и (б$'$) можно провести, используя замечание 3.

4. Укажем на связь рассматриваемых вопросов с эргодической теорией. С помощью стандартных в этой теории методов можно показать, что справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть X - банахово пространство, $A:X\to X$, $\|A\|\leq 1$. Следующие условия эквивалентны:

(а) последовательность $(A_n x)$ сходится для любого $x\in X$;

(б) для любой ненулевой неподвижной точки μ оператора A' найдется неподвижная точка x оператора A такая, что $\mu(x)\neq 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$N_A=\{x\in X : x=Ax\},\quad M_A=\{x\in X : A_n x\to 0\}.$$

Непосредственно проверяется, что множество точек x таких, что $A_n x$ сходится, совпадает с N_A+M_A . Кроме того (см. [3]), множество N_A+M_A замкнуто (это легко проверить непосредственно, используя полноту X). Из сказанного следует, что условие (а) эквивалентно следующему условию :

(а$'$) $(N_A+M_A)^\perp=\{0\}$.

Поскольку $(N_A+M_A)^\perp=N_A^\perp\cap M_A^\perp$, то условие (а$'$) переписывается в виде

(а$''$) $N_A^\perp\cap M_A^\perp=\{0\}$.

С другой стороны, условие (б) эквивалентно следующему

(б$'$) $N_A^\perp\cap N_A$ (*) $\{0\}$.

(*) (символы в оригинале не читаются)

Заметим теперь, что $M_A = \{x : q'(x) = 0\} = N_{A'}^{\perp}$. Так как $N_{A'}$ замкнуто в $\sigma(X', X)$, то $M_A^{\perp} = N_{A'}$. Предложение доказано.

Из определения функционала q следует, что $N_A^{\perp} = q^{-1}(0)$. Поскольку q является замыканием q'', то $q^{-1}(0) = \overline{(q'')^{-1}(0)}$, где черта означает замыкание в $\sigma(X', X)$. Кроме того, $M_A' = (q'')^{-1}(0)$. Таким образом, $N_A^{\perp} = \overline{M_{A'}}$. Легко проверить, что $M_{A'} \cap N_{A'} = \{0\}$. Отсюда следует, что если $M_{A'}$ замкнуто в $\sigma(X', X)$, то условие (а) справедливо. Множество $M_{A'}$ заведомо замкнуто, если функционал q'' полунепрерывен снизу в $\sigma(X', X)$, т.е. совпадает с q. Привлекая предложение 3, убедимся в том, что справедлива

ТЕОРЕМА 4. Пусть каждая неподвижная точка x оператора A'' является пределом в топологии $\sigma(X'', X')$ сети $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ неподвижных точек оператора A, причем $\|x_\alpha\| \le \|x\|$. Тогда последовательность $(A_n x)$ сходится для любого $x \in X$.

Из теоремы 4 непосредственно следует эргодическая теорема Иосиды: если оператор A слабо вполне непрерывен, то последовательность $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} A^k x$ сходится для любого $x \in X$.

Автор благодарен А.М.Вершику за обсуждение.

Литература

1. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С. и РУБИНОВ А.М. Двойственность Минковского и ее приложения. - "Успехи матем. наук", 1972, т.27, № 3, с. 127-176.
2. ШРЕЙДЕР Ю.А. Банаховы функционалы и эргодические теоремы.- "Матем. заметки", 1967, т. 2, № 4, с. 385-394.
3. ДАНФОРД Н. и ШВАРЦ Дж. Т. Линейные операторы (общая теория). М., ИЛ, 1962.
4. PETERSEN G. Regular matrix transformation, McGraw-Hill, L.,1966
5. RIESZ F., SZ-NAGY B. Über kontractionen des Hilbertschen raumes, Acta Sci.Math.Szeged, 1941-1943,v.10,p.202-205

Поступила в ред.-изд. отд.
18. XII. 1972 г.