1973 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 12(29)

УДК 517.948

О НОРМАЛЬНОСТИ РЕАЛИЗАЦИОННОГО УМНОЖЕНИЯ В ПОЛУУПОРЯДОЧЕННЫХ ГРУППАХ

Г.Я.Роткович

Эта работа примыкает к статьям [1] и [3]. В ней продолжается исследование строения K_σ-групп с точки зрения их реализации. Рассматривается реализационное умножение, которое в K_σ-группе может не быть нормальным. Этим K_σ-группа отличается от K_σ-пространства, в котором, как показано в [1], реализационное умножение всегда нормально. Целью работы является получение необходимых и достаточных условий нормальности реализационного умножения в K_σ-группе.

Используются в основном те же обозначения и терминология, что в [2] и [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Группа X называется <u>ℓ-группой</u>, если она является одновременно структурой (решеткой), в которой из $x > y$ следует $x + z > y + z$ для любого $z \in X$. Условно полная ℓ-группа называется <u>K-группой</u>. Условно σ-полная ℓ-группа называется <u>K_σ-группой</u>.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. В ℓ-группе X элемент x будем называть <u>линейным</u>, если для всякого $x' \in X$, $0 < x' \leq |x|$, существует такой y, что $2y = x'$. Совокупность X_l линейных элементов образует компоненту.

Как известно (см., например, [3]), архимедова ℓ-группа X алгебраически и структурно изоморфна ℓ-группе расширенных функций на экстремально несвязном бикомпакте $Q=Q(X)$, являющемся стоуновым пространством булевой алгебры компонент из X. Бикомпакт Q будем называть каноническим для ℓ-группы X. Такой изоморфизм будем называть реализацией, или представлением, X на ее каноническом бикомпакте. Реализовать ℓ-группу можно по-разному, в зависимости от выбора полной системы единичных элементов из X. Образ элемента $x\in X$ при данной реализации будем обозначать $x(\cdot)$. Элемент $x\in X$ будем называть ограниченным в данной реализации, если $x(\cdot)$ есть ограниченная функция на Q.

Для элементов x, y из архимедовой ℓ-группы X функция, заданная в точках $t\in Q$, в которых $|x(t)|\vee|y(t)|<\infty$, формулой $x(t)\cdot y(t)$, непрерывна. Поскольку бикомпакт Q экстремально несвязен, то эту функцию можно продолжить непрерывным образом до расширенной функции $z(\cdot)$, заданной на всем Q.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если $z(\cdot)$ является образом $z\in X$, то будем называть z <u>реализационным произведением</u> и обозначать $z=x\cdot y$. Тем самым в X определено <u>реализационное умножение</u> относительно данной реализации. Реализационное умножение в X будем называть <u>нормальным</u>, если из x, y, x_1, y_1, $xy\in X$ и $|x_1|\leq|x|, |y_1|\leq|y|$ следует, что $x_1 y_1\in X$.

Будем обозначать соединение попарно дизъюнктных элементов $\oplus\sum\limits_{\alpha} x_\alpha$, а соединение компонент $\oplus\sum\limits_{\alpha} X_\alpha$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Элемент x архимедовой ℓ-группы X будем называть <u>почти целозначным</u> в данной реализации, если его можно представить в виде $x=\oplus\sum\limits_{k} k\cdot 1_k+x'$, где k суть целые числа, $1_k, x'\in X$, $1_k(\cdot)$ есть характеристическая функция своего носителя, x' есть линейный элемент. Если $x'=0$, то будем называть x <u>целозначным</u>.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. В K_σ-группе X элементы x и y будем называть <u>рациональнозначными относительно друг друга</u>, если $X_{|x|\wedge|y|}$ представляется в виде соединения компонент X_n, таких, что $Pr_{X_n} x = r_n\cdot Pr_{X_n} y$, где r_n суть рациональные числа, и компоненты X_ℓ, являющейся K_σ-пространством.

В [3] было показано, что любые два элемента K_σ-группы рациональнозначны относительно друг друга.

ТЕОРЕМА. Для того чтобы в K_σ-группе X с данной реализацией реализационное умножение было нормально, необходимо и достаточно, чтобы любая компонента, порожденная произведением, состояла только из почти целозначных элементов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть реализационное умножение в K_σ-группе X нормально. Рассмотрим компоненту X_{xy}, порожденную реализационным произведением элементов $x, y \in X$. Поскольку $xy = x_+ y_+ + x_- y_- - x_+ y_- - x_- y_+$, то, не уменьшая общности, можно считать, что все элементы, рассматриваемые в доказательстве, положительны. Тогда

$X_{xy} = X_{x \wedge y}$.

Пусть $z \in X_{xy}$. Поскольку все элементы в K_σ-группе рациональнозначны относительно друг друга, то

$$z = \oplus \sum r_n \cdot (x \wedge y)_n + z_0, \qquad (1)$$

где $(x \wedge y)_n = Pr_{X_n} x \wedge y$, $z_0 = Pr_{X_0} z$, r_n суть рациональные числа, $X_{xy} = \oplus \sum_{n=0} X_n$, X_0 есть K_σ-пространство. При $n \neq 0$ положим $z_n = r_n \cdot (x \wedge y)_n$. Поскольку реализационное умножение в X нормально, а произведение $xy = (x \wedge y) \cdot (x \vee y)$, то $z_n^2 = r_n^2 \cdot (x \wedge y)_n^2$ входит в X.

Вновь используя рациональнозначность, на этот раз z_n^2 относительно z_n, имеем

$$z_n^2 = \oplus \sum_{k=1}^{\infty} r_{nk} \, z_{nk} + z_{n0},$$

где z_{nk}, z_{n0}, r_{nk} определяются аналогично тому, как это было сделано в (1). Тогда если $z_{nk} \neq 0$, то $z_{nk}(\cdot) = r_{nk}$ на своем носителе.

Предположим, что z_{nk} не являются целыми числами. В этом случае существуют такие натуральные числа m и ℓ, что

$$m z_{nk}^{\ell} - \ell z_{nk} < 1 \quad \text{, т.е.} \quad (m z_{nk}^{\ell} - \ell z_{nk})(\cdot) =$$

$= c < 1$ на своем носителе. Для простоты будем считать, что уже $z_{nk} < 1$. В силу нормальности реализационного умножения в X входят степени z_{nk}^{i} при любом натуральном i. Как известно, любое вещественное λ можно представить в виде $\lambda = \sup A$, где

$$A = \{\sigma < \lambda : \sigma = \sum j_i \cdot z_{nk}^{i}\},$$

а j_i суть целые числа. Тогда и $\lambda 1\!\!1_{nk} \in X$, где $1\!\!1_{nk}$ есть характеристическая функция носителя z_{nk}. Следовательно, если z_{nk} не целое число, то z_{nk} является линейным. Если же z_{nk} целое, то $z_{nk}(\cdot)$ тождественно равна этому целому числу на своем носителе.

Поскольку группа X является условно σ-полной, а n и k пробегают счетные множества, то

$$x = \oplus \sum_{s=1}^{\infty} \Big(\oplus \sum_{z_{nk}=s} z_{nk}\Big) + \oplus \sum_{z_{nk} \in X_1'} z_{nk} ,$$

т.е. x почти целозначен.

<u>Достаточность</u>. Пусть во всякой компоненте из K_σ-группы X, порожденной реализационным произведением xy, все элементы почти целозначны. Как и выше, достаточно ограничиться рассмотрением положительных элементов. Итак, пусть X_{xy} есть компонента, порожденная произведением положительных элементов x и y из X. Для $x' \leq x$, $y' \leq y$ имеем

$$x'(\cdot) = \oplus \sum i\, 1\!\!1_i(\cdot) + x_0'(\cdot), \; y'(\cdot) = \oplus \sum k\, 1\!\!1_k(\cdot) + y_0'(\cdot).$$

Ввиду того, что x_0' и y_0' линейны, компонента $X_{x_0' \vee y_0'}$ как показано в [3], является K_σ-пространством, а в K_σ-пространстве, как показано в [1], реализационное умножение нормально.

Остается проверить существование в X произведения

$$(x'-x'_0)(y'-y'_0)=(\oplus\sum i\cdot 1\!\!1_i(\cdot))(\oplus\sum k\, 1\!\!1_k(\cdot)).$$

Но последнее представляется в виде

$$\oplus\sum ik\, 1\!\!1_{i\wedge k}(\cdot), \tag{2}$$

где $1\!\!1_{i\wedge k}=1\!\!1_i\wedge 1\!\!1_k$. Поскольку все $1\!\!1_{i\wedge k}\in X$, а X является условно σ-полной, то и соединение (2) входит в X. Теорема доказана.

Литература

1. ВЕКСЛЕР А.И., РОТКОВИЧ Г.Я. Частичные умножения в счетно-полных векторных структурах. Сб. трудов ЛГПИ им. А.И.Герцена, 1972, 12-30.
2. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., 1961.
3. РОТКОВИЧ Г.Я. О полуупорядоченных группах. Уч. зап. Лен. педаг. ин-та, 1971, т. 404, 439-451.

Поступила в ред.-изд. отд.
26. II. 1973 г.