УДК 513.88

ОБ ИЗОМОРФИЗМАХ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Л.И.Потепун

В настоящей работе приводится ряд теорем об изоморфизмах симметричных пространств.

Пусть (Q, μ) - пространство с мерой, $S(Q)$ - пространство измеримых почти везде конечных функций на Q. Банахово пространство $X \subset S(Q)$ называется симметричным, если норма в X обладает следующими свойствами:

1) $|x| \leq |y|$ и $y \in X \Rightarrow x \in X$ и $\|x\| \leq \|y\|$;

2) $\|x\| = \|y\|$, если x и y равноизмеримы.

1. Порядковые изоморфизмы

ТЕОРЕМА 1. Пусть X, $Y \subset S(Q)$ - симметричные пространства, в которых норма удовлетворяет условию (А). (см. [1]). Пусть X и Y алгебраически и структурно изоморфны. Тогда $X = Y$ по составу элементов.

ЗАМЕЧАНИЕ. Для пространства Q с конечной мерой теорема доказана в [2] без предположений о наличии в X и Y нормы.

2. Линейные топологические изоморфизмы

ТЕОРЕМА 2. Пусть $X \subset S[0,1]$ - симметричное пространство, $p > 0$ - четное число. Пусть X изоморфно L^p. Тогда $X = L^p$, по запасу элементов, и норма в X эквивалентна L^p-норме.

СЛЕДСТВИЕ I. Если симметричное пространство $X \subset S[0,1]$ изоморфно ℓ^2, то $X = L^2[0,1]$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X – инвариантное относительно перестановок ортов пространство последовательностей. Если X изоморфно ℓ^2, то $X = \ell^2$.

Из следствия I и теоремы 3 выводится следующая

ТЕОРЕМА 4. Пусть Q – пространство с σ-конечной мерой μ, $X \subset S(Q)$ – симметричное пространство, изоморфное ℓ^2. Тогда $X = L^2(Q,\mu)$.

3. Теорема о безусловном базисе

ТЕОРЕМА 5. Пусть $X \subset S[0,1]$ – рефлексивное банахово KN-пространство и пусть в X есть безусловный базис $\{\varphi_n\}_1^\infty$, обладающий двумя свойствами:

I. $\|\varphi_n\| \geq c > 0$.

2. Существует $f \in X^+$ такая, что $|\varphi_n| \leq f$ для всех n. Тогда X изоморфно ℓ^2.

Отсюда следует, что для пространств X со свойствами, перечисленными в теореме 5, тригонометрическая система или система функций Уолша не могут быть безусловными базисами. Теорема 5 обобщает результат из [3]. Если применить теорему 5 к симметричным пространствам, то получим

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $X \subset S[0,1]$ – рефлексивное симметричное пространство с базисом, удовлетворяющим условиям 1 и 2 теоремы 5. Тогда $X = L^2[0,1]$.

Литература

1. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., "Физматгиз", 1961.
2. ПОТЕПУН Л.И. Об изоморфизме симметричных линейных полуупорядоченных пространств.- Сиб. мат. журн., 1971, т. XII № 3, с. 623-629.
3. ГАПОШКИН В.Ф. Безусловные базисы в пространствах Орлича.- Успехи мат. наук, 1967, т. 22, с. 113-114.

Поступила в ред.-изд. отд.

26. II. 1973 г.