УДК 517.85.

ГРАНИЦА ШОКЕ И МАКСИМАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В.Н.Дятлов

Одно из центральных мест в теоремах Шоке занимает описание максимальных мер и их связь с границей Шоке. Используемый при этом аппарат является, по сути дела, аппаратом теории упорядоченных пространств, что позволяет ставить вопрос об определении границы Шоке в K-пространстве и свойствах в упорядоченности Шоке операторов, действующих в K-пространства. Этому и посвящена настоящая заметка.

1. Рассмотрим K-линеал*) X и минорирующий конус H в X, то есть такой, что множество $H_x = \{h \in H : h \le x\}$ непусто для любого x из X. Через $P(H)$ обозначим конус, состоящий из конечных супремумов элементов из H.

Пусть $\mathcal{Z}$ - некоторое K-пространство. Обозначим через $\mathcal{L}^+(X,\mathcal{Z})$ множество положительных линейных операторов, действующих из X в $\mathcal{Z}$, и введём в нём отношение предпорядка $\gg$, порождаемое конусом $P(H)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор $\mathcal{U}_1$ следует за $\mathcal{U}_2$, если $\mathcal{U}_1\bar{h} \ge \mathcal{U}_2\bar{h}$ для всех $\bar{h}$ из $P(H)$ ($\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{L}^+(X,\mathcal{Z})$). Это отношение называется упорядоченностью Шоке**).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Оператор $\mathcal{U}$ из $\mathcal{L}^+(X,\mathcal{Z})$ называется максимальным (относительно H), если $\mathcal{U}$ - максимальный элемент

---

*) Используется терминология теории полуупорядоченных пространств из [2], [3].

**) Здесь допускается вольность речи.

упорядоченного пространства ($\mathcal{L}^+(X,\mathcal{Z}), \gg$), то есть если множество $Spr(\mathcal{U},H) = \{W \in \mathcal{L}^+(X,\mathcal{Z}) : W \gg \mathcal{U}\}$ состоит из единственного элемента $\mathcal{U}$.

Известно [1], что $\mathcal{U}$ максимален в том и только том случае, если $\mathcal{U}x = \sup \mathcal{U}(P(H_x))$. Этот критерий максимальности $\mathcal{U}$ играет существенную роль в конструкциях настоящей заметки. Доказательство его опирается на свойство минорируемости H.

Пусть $\mathcal{B}$ – σ-полная булева алгебра и Y – K-пространство, имеющее $\mathcal{B}$ своей базой. Предположим, что $X \subset Y$. От H, X, Y потребуем выполнения следующего условия: для любого $x \in X$ существует $co_H x = \sup H_x$. Это требование выполняется, например, если Y – K-пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Вполне линейный положительный оператор V, действующий из Y в $\mathcal{Z}$, называется надмаксимальным, если сужение его на X максимально.

Заметим, что надмаксимальность V равносильна справедливости равенства $V(x - co_H x) = 0$ для любого x из X.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Проектор P в Y называется граничным (по H), если $P(x - co_H x) = 0$ ($x \in X$). Соответствующая ему главная компонента называется граничной (по H).

Ясно, что граничный проектор всегда надмаксимален.

Напомним [2], что у каждого положительного вполне линейного оператора V, действующего из Y в $\mathcal{Z}$, есть компонента существенной положительности, то есть такая компонента Y_V, что $Vy > 0$ для любого $y > 0$ из Y_V и $Vy = 0$ для всех y из Y_V^d. Иными словами, $Y_V = \{x : V|x| = 0\}^d$. Уместно заметить, что наличие такой компоненты – характеристическое свойство вполне линейного оператора. Эта компонента не обязана быть главной. Если же на эту компоненту можно проектировать, то надмаксимальность V тесно связана со свойством граничности Y_V. Именно, имеет место

ТЕОРЕМА 1. *Пусть V таков, что Y_V главная. Тогда V надмаксимален в том и только том случае, если компонента Y_V граничная.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\Longrightarrow$ Предположим, что V надмаксимален, а проектор P_V на Y_V не является граничным. Это означает, что в X можно найти такой x, для которого $P_V(x - co_H x) > 0$.

Тогда

$$V(x-co_H x)=V\circ P_V(x-co_H x)+V\circ P_V^d(x-co_H x)=V\circ P_V(x-co_H x)>0,$$

а это противоречит надмаксимальности V.

$\Longleftarrow$ Обратно, пусть P_V - граничный. Для любого x из X имеем

$$V(x-co_H x)=V\circ P_V(x-co_H x)+V\circ P_V^d(x-co_H x).$$

Первое слагаемое обращается в нуль вследствие граничности P_V, второе же - по определению компоненты существенной положительности.

П. Будем в дальнейшем рассматривать случай, когда $\mathcal{B}$ -полная булева алгебра и Y - K-пространство, имеющее $\mathcal{B}$ своей базой.

ТЕОРЕМА 2. В множестве $\mathcal{J}$ граничных проекторов существует наибольший элемент (в булевой алгебре проекторов).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что $\mathcal{J}$ непусто - в него входит, по крайней мере, нулевой проектор. Далее, поскольку $\mathcal{B}$ полна, у $\mathcal{J}$ существует точная верхняя граница, которую обозначим через $\bar{P}$. В силу 2.24 с) из [3], имеем

$$\bar{P}(x-co_H x)=(\sup_{P\in\mathcal{J}} P)(x-co_H x)=\sup_{P\in\mathcal{J}}\{P(x-co_H x)\}=0,$$

поскольку $x-co_H x\geqslant 0$. Отсюда проектор $\bar{P}$ граничный, тем самым он является наибольшим элементом в $\mathcal{J}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Наибольший элемент множества $\mathcal{J}$ называется проектором Шоке, а соответствующая ему компонента - границей Шоке конуса H (относительно X, Y). Границу Шоке обозначим через $Ch(H,X,Y)$, проектор Шоке - через $P_{Ch(H,X,Y)}$.

В дальнейшем некоторые индексы в обозначениях границы Шоке и проектора Шоке будем опускать, если это не приводит к недоразумениям.

ЗАМЕЧАНИЕ. В терминах границы теорему I можно сформулировать и так: вполне линейный оператор $V: Y\to\mathcal{Z}$ надмаксимален тогда и только тогда, когда компонента его существенной положительности содержится в границе Шоке.

Граница Шоке существенно зависит от всех объектов, участвующих в её определении. В частности, как будет следовать из рассматриваемых ниже примеров, она может быть нулевой или совпадать со всем Y.

ПРИМЕРЫ. 1. Пусть Q - компактное хаусдорфово топологическое пространство. В качестве X, Y возьмём пространства $C(Q)$, $B(Q)$, соответственно непрерывных и ограниченных функций на Q. Если H - подпространство в $C(Q)$, содержащее постоянные функции и разделяющее точки Q, то $Ch(H, C(Q), B(Q))$ совпадает с компонентой, порождённой известной границей Шоке (см., например, [1], [4], [5]).

2. Пусть Y - то же, что и в первом примере, H - минорирующий конус в пространстве разностей полунепрерывных снизу ограниченных функций на Q. Тогда граница $Ch(H, \overline{H-H}, Y)$ есть компонента, порождённая границей Шоке в смысле Бобока и Корнеа [7].

ЗАМЕЧАНИЕ. В этих примерах границу Шоке можно отождествить с некоторым подмножеством в Q, ибо всякая компонента в $B(Q)$ порождается некоторым подмножеством в Q.

3. Граница Шоке может оказаться нулевой. Соответствующий пример можно получить, рассмотрев в качестве X, Y пространство $B(Q)$, а в качестве H - пространство $C(Q)$, где Q - компакт без изолированных точек *). Предположим, что в $B(Q)$ нашлась граничная компонента B'. Поскольку компонентами в $B(Q)$ являются подпространства функций, обращающихся в нуль вне некоторого подмножества в Q, граничность B' означает, что $f(x) = \sup\limits_{h \le f,\, h \in C(Q)} h(x)$ для точек x из подмножества Q', соответствующего B', и для любой функции f из $C(Q)$. Однако нетрудно увидеть, что это невозможно, то есть $Ch(C(Q), B(Q), B(Q))$ нулевая.

Заметим, что если компакт Q в последнем примере имеет изолированные точки, то $Ch(H, X, Y)$ уже ненулевая - компоненты, порождённые изолированными точками, граничны.

В данном определении границы Шоке K-пространство Y играет роль учредителя порядка, в котором рассматриваются границы. В первых трёх примерах порядок определялся пространством

---

*) Пример нулевой границы Шоке, разумеется, можно построить более элементарно. Рассматриваемый случай полезен из некото[рых] других соображений.

$B(Q)$ и был поточечным. Рассмотрим пример, показывающий зависимость границы Шоке от Y.

4. Пусть H, X те же, что в примере 1 и H сепарабелен в $C(Q)$. В качестве Y возьмём любое из пространств $L^p(Q)$ $(1\le p\le\infty)$. Поскольку граница Шоке определяется базой K-пространства Y, а все L^p имеют общую базу, нам безразлично, какое из L^p выбрать в качестве Y. В частности, за Y можно взять максимальное расширение L^p - пространство S всех конечных измеримых функций на Q. Граница $Ch(H, X, Y)$ в этих случаях получится одна и та же.

Элемент из L^p, порождённый функцией x, будем обозначать через $[x]$.

Докажем прежде всего, что $[co_H x] = co_H[x]$, то есть класс, отвечающий поточечному $\sup$, совпадает с $\sup$ в L^p. Так как $co_H x(t) \ge h(t)$ для $t \in Q$, то $[co_H x] \ge \mathcal{U}_x$, где $\mathcal{U}_x = \{[h] : h \in H, [h] \le [x]\}$. Иначе говоря, $[co_H x]$ - верхняя граница $\mathcal{U}_x$. Пусть $[g]$ - произвольная верхняя граница $\mathcal{U}_x$. Это означает, что $g(t) \ge h(t)$ почти всюду на Q. В силу сепарабельности H, найдётся счётное множество $\{h_k\}$ такое, что $g(t) \ge h_k(t)$ почти всюду на Q, $[h_k] \in \mathcal{U}_x$ и $co_H x = \sup_k h_k$. Поскольку объединение счётного числа множеств нулевой меры имеет меру нуль то $g(t) \ge \sup_k h_k(t)$ почти всюду на Q, то есть $[g] \ge [co_H x]$ и $[co_H x]$ - точная верхняя граница $\mathcal{U}_x$.

Итак, $[co_H x] = co_H[x]$. Пусть Q_o - граница $Ch(H, C(Q), B(Q))$, и предположим, что она измерима. Рассмотрим проектор $\bar{P}$ в L^p, соответствующий Q_o. Если $\mu Q_o = 0$, то $\bar{P}$ нулевой. Если $\mu Q_o > 0$, то

$$\bar{P}([x] - co_H[x]) = \bar{P}([x] - [co_H x]) = \bar{P}([x - co_H x]) = 0,$$

поскольку $x(t) = co_H x(t)$ во всех точках t из Q_o.

Предположим, что в Q нашлось измеримое подмножество Q_1 ненулевой меры, такое, что компонента B_{Q_1} в $B(Q)$, порождённая Q_1, во-первых, не задевает $Ch(H, C(Q), B(Q))$ и, во-вторых, соответствующий ему проектор $\bar{P}$ граничный. Поскольку $B_{Q_1} \cap Ch(H, C(Q), B(Q)) = 0$, найдётся $x \in C(Q)$, для которого $(x - co_H x)(t) > 0$ во всех точках t из Q_1. Тем самым

$$\bar{P}_1([x] - co_H[x]) = \bar{P}_1([x - co_H x]) > 0,$$

что противоречит предположению граничности P_1 .

Итак, мы доказали, что граница Шоке $Ch(H, C(Q), L^p(Q))$ при указанных предположениях может быть отождествлена с классом подмножеств в Q , совпадающих с $Ch(H, C(Q), B(Q))$ с точностью до множества меры нуль.

5. Граница $Ch(H, X, Y)$ совпадает с Y в том и только том случае, когда H есть супремальный генератор X в смысле Y (см. [1]).

Обсудим элементарные свойства границы Шоке.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Пусть H_1, H_2 – два минорирующих конуса в X . Тогда если $H_1 \subset H_2$, то $Ch(H_1, X, Y) \subset Ch(H_2, X, Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что граничный по H_1 проектор P граничен и по H_2 . В самом деле, так как $x \geq \sup\{h \in H_2 : h \leq x\}$ и P граничен по H_1 , то

$$Px = \sup\{Ph : h \in H_1, h \leq x\} \leq \sup\{Ph : h \in H_2, h \leq x\} \leq Px$$

откуда P граничен по H_2 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть X_1 , X_2 – два K -линеала, лежащих в Y, и H – минорирующий конус в X_1 и X_2 . Тогда если $X_1 \subset X_2$, то $Ch(H, X_1, Y) \supset Ch(H, X_2, Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно.

Пусть $\{Y_\xi\}$ ($\xi \in \Xi$) – совокупность K -пространств, X_ξ – K -линеал в Y_ξ и H_ξ – минорирующий конус в X_ξ . Обозначим $Y = \underset{\xi}{S}\, Y_\xi$, $X = \underset{\xi}{S}\, X_\xi$, $H = \underset{\xi}{S}\, H_\xi$, где знак $\underset{\xi}{S}$ означает соединение [2],[3]. Согласно определению линейных операций и порядка в соединении, Y есть K -пространство, X – K -линеал и H – минорирующий конус в X .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. $\underset{\xi}{S}\, Ch(H_\xi, X_\xi, Y_\xi) = Ch(H, X, Y)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что соединение компонент, граничных в Y_ξ , есть граничная компонента в Y и, обратно, граничная компонента в Y есть соединение граничных в Y_ξ компонент.

Пусть $\{Y^\circ_\xi\}$ – множество компонент, каждая из которых гранична в соответствующем Y_ξ и P°_ξ – проектор на Y°_ξ ($\xi \in \Xi$). Тогда проектор из Y на соединение этих компонент действует так:

$$P : x \longrightarrow \underset{\xi}{S}\{P_\xi^\circ P_\xi x\},$$

где P_ξ - проектор на Y_ξ. Так как P_ξ° - граничные в Y_ξ, то $P_\xi^\circ(x_\xi - co_{H_\xi} x_\xi) = 0$, поэтому

$$P(x - co_H x) = \underset{\xi}{S}\{P_\xi^\circ P_\xi(x - co_H x)\} = \underset{\xi}{S}\{P_\xi^\circ(x_\xi - co_{H_\xi} x_\xi)\} = 0,$$

и P - граничный в Y.

$\Longleftarrow$ Обратно, пусть P - граничный в Y. Это означает, что $P(P_\xi(x_\xi - co_{H_\xi} x_\xi)) = 0$ ($\xi \in \Xi$) для всех x из X, то есть $P \circ P_\xi$ - граничный и компонента, на которую проектирует P, есть соединение граничных компонент.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть $\{Y_\xi\}$ - разложение K-пространства Y. Обозначим $X_\xi = P_\xi X$, $H_\xi = P_\xi H$. Так как базы пространств Y и $\underset{\xi}{S} Y_\xi$ совпадают, то $Ch(H, X, Y) = \underset{\xi}{S}(H_\xi, X_\xi, Y_\xi)$.

Ш. В этом пункте обратимся к рассмотрению некоторых максимальных операторов из $\mathcal{L}(X, Z)$. Как было замечено в п.1°, максимальными являются те и только те операторы, для которых $Ux = \sup\{Uh : h \leq x, h \in H\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если оператор $U \in \mathcal{L}(X, Z)$ максимален, то $U(x - co_H x) = 0$.

В самом деле, $Ux = \sup\limits_{h \in H_x} Uh \leq U \sup\limits_{h \in H_x} h \leq Ux$, что и требовалось.

Таким образом, среди операторов, удовлетворяющих свойству $U(x - co_H x) = 0$, максимальными являются операторы, перестановочные с $\sup$. Это обстоятельство побуждает нас рассмотреть операторы V из $\mathcal{L}(X, Z)$, которые допускают распространение на Y до вполне линейного оператора $\overline{V} : Y \to Z$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Говорят, что оператор $V \in \mathcal{L}(X, Z)$ сосредоточен на границе Шоке, если $\overline{V}(x - P_{Ch} x) = 0$ для любого x из X.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Это определение обобщает понятие сосредоточенности меры на некотором подмножестве в Q, соответствующее случаю метризуемого компакта [4].

2. В определении 6 можно не требовать вполне линейности V.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $V \in \mathcal{L}(X, Z)$ допускает распространение на Y до вполне линейного оператора $\overline{V}: Y \to Z$. Тогда V максимален тогда и только тогда, когда он сосредоточен на границе Шоке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\Longrightarrow$ Пусть V максимален. Тогда, по определению, $\overline{V}$ надмаксимален и, по теореме I, его компонента $Y_{\overline{V}}$ существенной положительности содержится в $Ch(H)$, то есть $\overline{V} \circ P^d_{Ch} x = 0$ для $x \in X$ (здесь P^d_{Ch} - проектор, дизъюнктный P_{Ch}). Но поскольку $x = P_{Ch} x + P^d_{Ch} x$, то $\overline{V}(x - P_{Ch} x) = 0$.

$\Longleftarrow$ Если $\overline{V}(x - P_{Ch} x) = 0$, то $\overline{V} \circ P^d_{Ch} = 0$, следовательно, компонента $Y_{\overline{V}}$ содержится в $Ch(H)$, и, по теореме I, $\overline{V}$ надмаксимален, то есть V максимален.

В классической теории Шоке [4], [6] рассматриваются максимальные функционалы над пространством непрерывных функций на компакте, то есть, в наших обозначениях, операторы из X в R (см. пример I). Нас, естественно, интересуют меры, распространяемые на $B(Q)$ до вполне линейного функционала. Таковыми являются дискретные меры, то есть представимые в виде суммы семейства точечных мер: $\mu = \sum_{q \in Q} \alpha_q \varepsilon_q$, где $\alpha_q \in R^+$, $\varepsilon_q : f \to f(q)$ $(f \in B(Q))$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Конечный функционал $\mu : f \to \sum_{q \in Q} \alpha_q \varepsilon_q (f)$ вполне линеен на $B(Q)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что ε_q - вполне линейный функционал на $B(Q)$. Далее, поскольку μ конечна, то семейство $\{\alpha_q \varepsilon_q\}$ $(q \in Q)$ суммируемо, поэтому $\{\alpha_q \varepsilon_q : q \in Q\}$ ограничено (в пространстве регулярных функционалов на $B(Q)$), и, так как подпространство вполне линейных функционалов есть компонента в пространстве регулярных функционалов, $\mu = \sup\{\sum_{\sigma} \alpha_q \varepsilon_q : \sigma \in Q, \sigma$ конечно$\}$ - вполне линейный функционал на $B(Q)$.

В применении к дискретным мерам теорема 3 даёт

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Дискретная мера максимальна в том и только том случае, если она сосредоточена на границе Шоке.

IУ. Укажем на возможность некоторого обобщения предложенной конструкции. Заметим, что до сих пор рассматривалась коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} H \subset X \arrow[rr, "(o)"] \arrow[dr, "V"'] & & Y \arrow[dl, "\bar{V}"] \\ & \mathcal{Z} & \end{tikzcd}$$

где (o) - оператор тождественного вложения. На самом деле практически такие же факты можно установить, заменив оператор (o) положительным оператором T, действующим из X в Y. Наметим основные определения. Обозначим $co_{H,T}\,x = \sup\{Th : h \le x,\ h \in H\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3′. Вполне линейный положительный оператор $V : Y \to \mathcal{Z}$ называется T - надмаксимальным, если $V \circ T$ максимален.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4′. Проектор P в Y называется T-граничным, если $P(Tx - co_{H,T}x) = 0$ $(x \in X)$. Соответствующая ему компонента называется T-граничной.

ТЕОРЕМА I′. Пусть V таков, что Y_V главная. Тогда V T-надмаксимален в том и только том случае, если Y_V - T-граничная.

Доказательство можно провести так же, как и в теореме 1.

Пусть Y - K-пространство. Аналогично теореме 2 можно показать, что в множестве T-граничных проекторов существует наибольший элемент. Его естественно назвать T-границей Шоке. Для этой границы справедлива теорема, аналогичная теореме 3.

Некоторые результаты этой заметки были анонсированы в [5].

Автор весьма признателен Г.П.Акилову и С.С.Кутателадзе за обсуждение результатов.

Литература

1. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С., РУБИНОВ А.М. Двойственность Минковского и её приложения, УМН, 1972, 27, 3, с.127-176.

2. ВУЛИХ Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. М., ГИФМЛ, 1961.

3. КАНТОРОВИЧ Л.В., ВУЛИХ Б.З., ПИНСКЕР А.Г. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.-Л.,ГИТТЛ,1950.

4. ФЕЛПС Р., Лекции о теоремах Шоке. М., Мир, 1968.

5. ДЯТЛОВ В.Н. К определению границы Шоке в пространстве Канторовича.-"Докл. АН СССР", 1973, т.212, вып.5, с.1050-1051.

6. ALFSEN E.M., Compact convex sets and boundary integrals, Springer-Verlag, B.-H.-N-Y.,1971.

7. BOBOC N.,CORNEA A., Convex cones of lower semicontinuous functions on compact spaces, Rev.Roum.de Math.Pures et Appl.,1967,v.12,№ 4,p.471-526.

Поступила в ред.-изд.отд.
14. IX. 1973 г.