1973 г.   ОПТИМИЗАЦИЯ   Выпуск 12(29)

УДК 513.88

ПРИМЕР КОНУСА В $C[a,b]$ С НЕПЛОТНОЙ НА ОТРЕЗКЕ $[a,b]$ ГРАНИЦЕЙ ШОКЕ, ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЙ РОСТОК ТОЖДЕСТВЕННОГО ОПЕРАТОРА НА КОТОРОМ СОДЕРЖИТ ЕДИНСТВЕННЫЙ ЭЛЕМЕНТ

З.И.Грузман

В ряде работ [1]-[4] последних лет, в которых исследовалась сходимость положительных операторов в упорядоченных локально выпуклых пространствах, рассматривалась задача об условиях единственности положительного распространения тождественного оператора с подпространства на всё пространство. В статье [1] в связи с этим дано определение насыщенности подпространства точками гладкости упорядочивающего конуса. Аналогичное определение приводится и в работе [2].

Если H - конус в упорядоченном векторном пространстве V, то вопрос состоит в следующем: существует ли положительный оператор $T: V \to V$, мажорирующий на конусе H тождественный оператор $I: V \to V$, $I(v)=v$, $v \in V$, $T(v) \geq I(v)$, $v \in H$ и отличный от него, т.е. будет ли состоять положительный росток тождественного оператора $spr\,(I, H)$ только из элемента $\{I\}$.

Наиболее общий результат получен на основе понятия супремального генерирования [3], [4].

Ниже строится пример, показывающий, что условие супремального генерирования, накладываемое на конус H в упорядоченном векторном пространстве V для того, чтобы выполнялось равенство $spr(I,H) = \{I\}$, не является необходимым, если $V = C[a,b]$.

Построенный пример равносилен следующему факту: существует конус H в $C[a,b]$, граница Шоке которого неплотна на $[a,b]$ и такой, что $spr(I,H)=\{I\}$.

Введем некоторые обозначения и определения. Если Q - компакт, то $C(Q)$ - пространство непрерывных действительнозначных функций на Q ; $C^*(Q)$ - пространство линейных функционалов над $C(Q)$; σ ($C^*(Q), C(Q)$) - слабая топология в $C^*(Q)$, порожденная двойственностью между $C^*(Q)$ и $C(Q)$; $\delta_t \in C^*(Q)$, $\delta_t(f)=f(t)$, $f \in C(Q)$, $t \in Q$; $[a,b]$ - отрезок действительной оси R.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть V_1 и V_2-упорядоченные векторные пространства, $H \subset V_1$, H - конус. Если $T: V_1 \to V_2$ - линейный оператор, то положительным ростком T на H называется множество $spr(T,H)$ линейных положительных операторов $\tilde{T}: V_1 \to V_2$ таких, что при $v \in H$ $\tilde{T}(v) \geq T(v)$ [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Конус H в упорядоченном векторном пространстве V супремально порождает V (является его супремальным генератором) [3], если он минорантен, т.е. для всякого $v \in V$ множество $\mathcal{U}_v=\{h \in H \mid h \leq v\}$ - непусто и $v = \sup \mathcal{U}_v$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Если H -конус в пространстве $C(Q)$, то точка $t \in Q$ есть точка границы Шоке конуса H, когда $spr(\delta_t, H)=\{\delta_t\}$. Функционал δ_t трактуется как оператор из $C(Q)$ в R [3].

Опираясь на существование в $C[a,b]$ супремально-порождающего конуса h, являющегося конической оболочкой лишь трёх функций и такого, что $f(t)=\sup\limits_{\substack{h \in h \\ h \leq f}}\{h(t)\}$ для всех $f \in C[a,b]$, $t \in [a,b]$ [3], несложно показать, что конус $H \subset C[a,b]$ супремально порождает $C[a,b]$ в том и только в том случае, если его граница Шоке плотна на $[a,b]$.

Начнём проводить построение. Пусть $a < \theta_0 < \theta < b$, $W \subset (\theta, b)$, W счётно и плотно на промежутке $[\theta, b]$.

Отобразим взаимно-однозначно множество $W \cup \{\theta\}$ на множество натуральных чисел:

$n: \tau \to n(\tau)$, $\tau \in W \cup \{\theta\}$, $n(\tau)$ - натуральное.

Для всякого $t \in [\theta, b]$ положим:

$$\xi(t) = a + (\theta_0 - a) \sum_{\substack{\tau \le t \\ \tau \in W \cup \{Q\}}} \frac{1}{2^{n(\tau)}} .$$

Легко проверяются следующие свойства:

(i) $a \le \xi(t) \le \theta_0$;

(ii) функция ξ непрерывна справа на $[\theta, b]$ и непрерывна на множестве $[\theta, b] \setminus W$, в каждой точке $t_0 \in (\theta, b]$ существует $\lim\limits_{t \to t_0 - 0} \xi(t)$.

Обозначим через $\tilde{\xi}(t)$ функцию, определённую на $[\theta, b]$ по правилу:

$$\tilde{\xi}(t) = \begin{cases} \lim\limits_{u \to t-0} \xi(t), & t \in (\theta, b], \\ \xi(\theta), & t = 0 ; \end{cases}$$

(iii) $a \le \tilde{\xi}(t) \le \theta_0$, и если $\tau \in W$, то
$$\xi(\tau) = \tilde{\xi}(\tau) + \frac{1}{2^{n(\tau)}} .$$

Пусть $G = \{f \in C[a,b] / (\delta_{\xi(t)} - \delta_t)(f) \ge 0, t \in [\theta, b] \setminus W\}$.
Ясно, что G - конус в $C[a, b]$.

I. Опишем для каждого $t \in [a, b]$ множество $spr[\delta_t, G]$.
Зафиксируем какую-либо функцию $f \in C[a, b]$ и положим
$$d = \min_{t \in [a, b]} f(t).$$

а) Возьмём $t_0 \in [a, \theta]$. Покажем, что
$$\sup_{\substack{h \in G \\ h \le f}} h(t_0) = f(t_0) \qquad (*)$$

Положим $g(t) = f(t)$ при $t \in [a, t_0]$, $g(t) = d$ при $t \in [\theta, b]$. Тогда $g(t) \le f(t)$ при $t \in [a, t_0] \cup [\theta, b]$ и, по теореме Титце, существует функция $\tilde{g} \in C[a, b]$ такая, что $\tilde{g}(t) = g(t)$ при $t \in [a, t_0] \cup [\theta, b]$ и $\tilde{g}(t) \le f(t)$ на $[a, b]$. Ясно, что $\tilde{g} \in G$, и так как $\tilde{g}(t_0) = g(t_0) = f(t_0)$ и $\tilde{g} \le f$, то равенство ($*$) справедливо. f в равенстве ($*$) - произвольная функция из $C[a, b]$, следовательно, по [3], $spr(\delta_{t_0}, G) = \{\delta_t\}$ (Δ) , значит, всякая точка $t \in [a, \theta]$ есть точка границы Шоке конуса G .

б) Предположим, что $t_0 \in [\theta, b] \setminus W$. Тогда
$$\sup_{\substack{h \in G \\ h \le f}} h(t_0) = \min(f(t_0), f(\xi(t_0))) \qquad (**)$$

Действительно, если $h \in G$, $h \leq f$, то $h(t_0) \leq h(\xi(t_0)) \leq$ $\leq f(\xi(t_0))$, $h(t_0) \leq f(t_0)$ и поэтому,

$$\min(f(t_0), f(\xi(t_0)) \geq h(t_0) (h \leq f, h \in G). \quad (1)$$

Так как функция f непрерывна на отрезке $[a, b]$, функция ξ непрерывна на множестве $[\theta, b] \setminus W$, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся две различные точки t_1 и t_2 такие, что $\theta \leq t_1 \leq t_0 \leq t_2 \leq b$, и если $t \in [t_1, t_2]$, то $f(t) > \min(f(t_0), f(\xi(t_0))) - \varepsilon$, если же, кроме того, $t \in [\theta, b] \setminus W$, то и $f(\xi(t)) > \min(f(t_0), f(\xi(t_0))) - \varepsilon$.

Определим на множестве $[a, \theta_0] \cup [\theta, b]$ непрерывную функцию g_ε. Полагаем:

$$g_\varepsilon(t) = \begin{cases} f(t), & t \in [a, \theta_0]; \\ d, & t \in [\theta, t_1] \cup [t_2, b]; \\ \min(f(t_0), f(\xi(t_0))) - \varepsilon, & t = t_0; \\ \dfrac{d - g_\varepsilon(t_0)}{t_1 - t_0}(t - t_0) + g_\varepsilon(t_0), & t \in [t_1, t_0]; \\ \dfrac{d - g_\varepsilon(t_0)}{t_2 - t_0}(t - t_0) + g_\varepsilon(t_0), & t \in [t_0, t_2]. \end{cases}$$

Заметим, что $g_\varepsilon(t) \leq f(t)$, $t \in [a, \theta_0] \cup [\theta, b]$ и

$$g_\varepsilon(t) \leq g_\varepsilon(\xi(t)), \ t \in [\theta, b] \setminus W.$$

По теореме Титце, существует непрерывная функция $\tilde{g}_\varepsilon$, служащая распространением функции g_ε на отрезок $[a, b]$ и удовлетворяющая условию $\tilde{g}_\varepsilon(t) \leq f(t)$, $t \in [a, b]$. Легко видеть, что $\tilde{g}_\varepsilon \in G$, и поскольку $\tilde{g}_\varepsilon(t_0) = g_\varepsilon(t_0) = \min(f(t_0), f(\xi(t_0))) - \varepsilon$, то из сопоставления с (I) вытекает равенство (ж ж).

Пусть $H \subset C(Q)$, Q - компакт, H - минорантный конус. Функционал $q : f \to \sup\limits_{\substack{h \in H \\ h \leq f}} h(t_0)$, $t_0 \in Q$, $f \in C(Q)$ является суперлинейным [3]. Множество $U_q = \{\mu \in C^*(Q) / \mu(f) \geq q(f), f \in C(Q)\}$ -опорных к q линейных функционалов совпадает с множеством $spr(\delta_{t_0}, H)$.

В самом деле, из $f \in C(Q)$ и $\mu \in spr(\delta_{t_0}, H)$ следует, что при всех $h \in H$, $h \leq f$ $\mu(f) \geq \mu(h) \geq \delta_{t_0}(h)$.

Получаем $\mu(f) \geq \sup\limits_{\substack{h \in H \\ h \leq f}} h(t_0)$; итак, $spr(\delta_{t_0}, H) \subset U_q$, обратное включение очевидно.

В рассматриваемой ситуации $Q = [a, b]$, $H = G$ и

$$q: f \longrightarrow \min(f(t_0), f(\xi(t_0))). \qquad (\Delta)$$

Как известно, если суперлинейный функционал q , действующий на линейном нормированном пространстве E, имеет вид: $q(e) = \inf\limits_{\mu \in \Omega} (\mu(e))$, $e \in E$, Ω - ограниченное множество в пространстве линейных функционалов над E (в сильной топологии), то $U_q = \overline{co}(\Omega)$ - выпуклая, замкнутая оболочка множества Ω .

Таким образом, если $t_0 \in [\theta, b] \setminus W$, то $spr(\delta_{t_0}, G) =$

$$= co\{\delta_{t_0}, \delta_{\xi(t_0)}\} = \{\alpha\delta_{t_0} + (1-\alpha)\delta_{\xi(t_0)} (0 \leq \alpha \leq 1)\} (\Delta\Delta).$$

в) Когда $t_0 \in W$, применяя аналогичные рассуждения, выводим формулу:

$$\sup_{\substack{h \in G \\ h \leq f}} h(t_0) = \min\{f(t_0), f(\xi(t_0)), f(\tilde{\xi}(t_0))\} \ (***).$$

Используя её, показываем, что при $t_0 \in W$ имеет место

$$spr(\delta_{t_0}, G) = co\{\delta_{t_0}, \delta_{\xi(t_0)}, \delta_{\tilde{\xi}(t_0)}\} =$$
$$= \{\alpha\delta_{t_0} + \beta\delta_{\xi(t_0)} + \gamma\delta_{\tilde{\xi}(t_0)} \mid \alpha + \beta + \gamma = 1,$$
$$\alpha \geq 0, \ \beta \geq 0, \ \gamma \geq 0\} \qquad (\Delta\Delta\Delta)$$

Сравнивая равенства (Δ), $(\Delta\Delta)$ и $(\Delta\Delta\Delta)$, делаем вывод, что граница Шоке конуса G совпадает с промежутком $[a, \theta]$ и, следовательно, не плотна на отрезке $[a, b]$, поэтому конус G не порождает супремально пространство $C[a, b]$. Впрочем, можно и непосредственно убедиться, что для непрерывной на $[a, b]$ функции τ :

$$\tau(t) = \begin{cases} 0, & t \in [a, \theta], \\ 1, & t \in [\theta, b], \\ (\theta - \theta_0)(t - \theta_0), & t \in [\theta_0, \theta], \end{cases}$$

не существует $\sup\limits_{\substack{h \in G \\ h \leq \tau}} \{h\}$.

II. Если $\nu : [a,b] \to C^*[a,b]$ – непрерывное отображение отрезка $[a,b]$ в пространство $C^*[a,b]$, снабжённое $\sigma(C^*[a,b], C[a,b])$ топологией, и для всех $t\in[a,b]$ $\nu(t) \in spr(\delta_{t_0}, G)$, то для всех $t\in[a,b]$ $\nu(t)=\delta_t$.

Действительно, равенства (Δ), $(\Delta\Delta)$, $(\Delta\Delta\Delta)$ влекут, что $\nu(t)=\delta_t$ при $t\in[a,\theta)$ и что при $t\in[\theta,b]$ $\nu(t)$ представляется в виде $\alpha(t)\delta_t+\beta(t)\delta_{\xi(t)}+\gamma(t)\delta_{\tilde\xi(t)}$, где $\alpha: t\to\alpha(t)$, $\beta: t\to\beta(t)$, $\gamma: t\to\gamma(t)$, определенные на $[\theta,b]$ положительные функции, в сумме равные единице. Причем если $t\in[\theta,b]\setminus W$, то $\gamma(t)=0$, $\beta(t)=1-\alpha(t)$.

Покажем, что функция α должна быть непрерывной на $[\theta,b]$.

Так как ν – непрерывное отображение и вышеопределённая функция $\tau\in C[a,b]$, то $\lim\limits_{t\to t_0}\nu(t)(\tau)=\nu(t_0)(\tau)$.

Если $t\in[\theta,b]$, то $\nu(t)(\tau)=\alpha(t)\delta_t(\tau)+\beta(t)\delta_{\xi(t)}(\tau)+$
$+\gamma(t)\delta_{\tilde\xi(t)}(\tau)=\alpha(t)\tau(t)+\beta(t)\tau(\xi(t))+\gamma(t)\tau(\tilde\xi(t))=$
$=\alpha(t)$ – по определению функции τ и по свойствам (i), (ii) функций ξ и $\tilde\xi$. Поэтому $\lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t\in[\theta,b]}}\alpha(t)=\alpha(t_0)$, а это и означает, что α непрерывна.

Допустим теперь, что $z\in W$ и $f\in C[a,b]$. В силу непрерывности отображения ν,

$$\lim_{\substack{t\to z+0\\ t\in[\theta,b]\setminus W}}\nu(t)(f)=\lim_{\substack{t\to z-0\\ t\in[\theta,b]\setminus W}}\nu(t)(f)=\nu(z)(f).$$

С другой стороны,

$$\lim_{\substack{t\to z+0\\ t\in[\theta,b]\setminus W}}\nu(t)(f)=\lim_{\substack{t\to z+0\\ t\in[\theta,b]\setminus W}}\alpha(t)\delta_t(f)+(1-\alpha(t))\delta_{\xi(t)}(f)=$$
$$=\lim_{\substack{t\to z+0\\ t\in[\theta,b]\setminus W}}\alpha(t)f(t)+(1-\alpha(t))f(\xi(t))=$$
$$=\alpha(z)f(z)+(1-\alpha(z))f(\xi(z))$$

– по свойству (ii) функции ξ и вследствие непрерывности функции α. Кроме того, $\lim\limits_{\substack{t\to z-0\\ t\in[\theta,b]\setminus W}}\nu(t)(f)=$

$$= \lim_{\substack{t\to\tau-0\\ t\in[\theta,b]\setminus W}} \alpha(t)\delta_t(f)+(1-\alpha(t))\delta_{\xi(t)}(f) =$$
$$= \lim_{\substack{t\to\tau-0\\ t\in[\theta,b]\setminus W}} \alpha(t)f(t)+(1-\alpha(t))f(\xi(t)) =$$
$$= \alpha(\tau)f(\tau)+(1-\alpha(\tau))f(\bar\xi(\tau))$$

– по определению функции $\bar\xi$ и так как α – непрерывна.

Итак, если $\tau\in W$, то при всех $f\in C[a,b]$ должно выполняться равенство $\alpha(\tau)f(\tau)+(1-\alpha(\tau))f(\xi(\tau)) = \alpha(\tau)f(\tau)+(1-\alpha(\tau))f(\bar\xi(\tau))$. Но, по свойству ($iii$), $\xi(\tau)\neq\bar\xi(\tau)$ при $\tau\in W$, поэтому мы заключаем, что $1-\alpha(\tau)=0$, $\alpha(\tau)=1$, если $\tau\in W$. α – функция, непрерывная на $[\theta,b]$, а W – плотное на $[\theta,b]$ множество, значит, $\alpha(t)=1$ при всех $t\in[\theta,b]$.

Таким образом, при $t\in[\theta,b]\setminus W$ имеем

$$\nu(t)(f)=\alpha(t)\delta_t(f)+(1-\alpha(t))\delta_{\xi(t)}(f)=\delta_t(f).$$

Пользуясь непрерывностью отображения ν, делаем вывод, что $\nu(t)=\delta_t$ для каждого $t\in[\theta,b]$.

Тем самым утверждение пункта II доказано.

Докажем, что положительный росток тождественного оператора на конусе G состоит только из тождественного оператора, т.е. $spr(I,G)=\{I\}$.

Предположим, что оператор $T: C[a,b]\to C[a,b]$ и $T\in spr(I,G)$. Каждому $t\in[a,b]$ сопоставим функционал

$$\tilde\nu(t)\in C^*[a,b],\ \tilde\nu(t)(f)=\delta_t(T(f))=(T(f))(t),$$
$$f\in C[a,b].$$

По определению множества $spr(I,G)$, оператор T положителен, и, следовательно, при $t\in[a,b]$ положителен функционал $\tilde\nu(t)$. $T(v)\geq v$ при $v\in G$, следовательно,

$$\tilde\nu(t)(v)\geq\delta_t(v),\ t\in[a,b],\ v\in G,$$

значит, $\tilde\nu(t)\in spr(\delta_t,G)$, $t\in[a,b]$. Ясно также, что отображение $\tilde\nu: t\to\tilde\nu(t)$ непрерывно, если на $C^*[a,b]$ рассматривается $\sigma(C^*[a,b],C[a,b])$ – топология. По пункту II, получаем: $\tilde\nu(t)=\delta_t$ при всех $t\in[a,b]$. Таким образом, $T=I$.

Итак, мы убедились, что конус G удовлетворяет всем условиям примера.

ЗАМЕЧАНИЕ. Конус G – порождающий (всякая f из $C[a,b]$ представима в виде $f_2 - f_1$, f_2, f_1 из G). Действительно, если $f \in C[a,b]$, то при достаточно большом $K > 0$ имеем $-K\tau \in G$ и $f - K\tau \in G$.

Литература

1. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ М.А., КЛИМОВ В.С., ЛИВШИЦ Е.А. О сходимости положительных функционалов и операторов. – "Докл. АН СССР", 1965, 162 : 2, с. 258-261.
2. ЛАБСКЕР Л.Г. О сильной сходимости последовательностей линейных положительных операторов в банаховых пространствах. – "Докл. АН СССР", 1972, 206 : 3, с. 525-528.
3. КУТАТЕЛАДЗЕ С.С., РУБИНОВ А.М. Супремальные генераторы и сходимость последовательностей операторов.– "Оптимизация", 3(20), 1971, с. 120-153.
4. РУБИНОВ А.М. Об одной теореме В.С.Климова, М.А.Красносельского, Е.А.Лившица. – "Оптимизация", 1971, 3(20), с. 154-159.

Поступила в ред.-изд. отд.
30. V. 1973 г.