УДК 513.882

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ НОРМЫ И ПОЛУУПОРЯДОЧЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ОПЕРАТОРОВ

А.В.Бухвалов

Пусть X - нормированное пространство, E - K-пространство [1]. Говорят, что оператор ж) $\mathcal{U}: X \to E$ обладает абстрактной нормой, если существует элемент $|\mathcal{U}| = \sup\{|\mathcal{U}x| : |x| \leqslant 1\}$ в E, называемый абстрактной нормой оператора $\mathcal{U}$ ([1], стр. 246). Через $H_A(X \to E)$ обозначим пространство всех таких операторов. Если E - KN-пространство, то равенство $|\mathcal{U}|_{H_A(X\to E)} = \| \mathcal{U} \|_E$ определяет норму на пространстве $H_A(X \to E)$. В работе показывается, что если E - банахово, то пространство $H_A(X \to E)$ полно по норме. Рассматривается также класс $S(X \to E)$ операторов суммирующих в смысле В.Л.Левина [2]. В работе получены условия рефлексивности пространств $H_A(X \to E)$ и $S(E \to X)$. В случае, когда X является KN-пространством, рассмотрена связь между порядком и нормой в этих пространствах операторов. Мы будем придерживаться терминологии монографии Б.З.Вулиха [1].

1. На протяжении этого пункта через E обозначается некоторый K-линеал, а через X - нормированное пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор $\mathcal{U}: X \to E$ называется (bo) -ограниченным жж), если $\mathcal{U}$ переводит единичный шар $S_X \subset X$ в множество, ограниченное по упорядочению в E. Через $\Pi(X \to E)$

ж) Все рассматриваемые операторы линейны.

жж) В [2] такие операторы называются правильными.

обозначается пространство всех таких операторов. Если E - KN-линеал, то равенство $\|U\|_{\Pi(X\to E)} = \inf\{\|e\| : e \geq U(S_X)\}$

определяет норму на пространстве $\Pi(X\to E)$. Если E - KN-пространство, то $H_A(X\to E) = \Pi(X\to E)$ и $\|U\|_{H_A(X\to E)} = \|U\|_{\Pi(X\to E)}$.

ТЕОРЕМА I. Если E - KB-линеал, то пространство $\Pi(X\to E)$ полно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть κE - K-пополнение K-линеала E, наделенное монотонной нормой, построенной в теореме УП.3.I [I] (т. н. естественное распространение нормы). Тогда κE - банахово KN-пространство [3], и для любого $U \in \Pi(X\to E)$ имеем $\|U\|_{\Pi(X\to E)} = \|U\|_{H_A(X\to\kappa E)}$. Очевидно,

что $\Pi(X\to E)$ - замкнутое подпространство в $H_A(X\to\kappa E)$. Таким образом, далее можно считать, что E - банахово KN-пространство.

2) Пусть $\{U_n\}$ - последовательность Коши в $H_A(X\to E)$. Тогда, разряжая, если это необходимо, последовательность $\{U_n\}$, можно считать, что $\sum 2^n \| |U_n - U_{n+1}| \|_E < \infty$. Так как E банахово, то существует $z \in E$, такой, что $(b)\text{-}\sum 2^n |U_n - U_{n+1}| = z$. Отсюда получаем, что

$$|U_n - U_k| \leq 2^{-n+1} z \quad \text{при} \quad k > n. \tag{I}$$

Так как $|U_n x - U_k x| \leq |U_n - U_k|\cdot|x|$, то из (I) получаем, что при любом $x \in X$ существует $Ux = (b)\text{-}\lim U_n x$, причем очевидно, что $|U_n x - Ux| \leq 2^{-n+1} z$, откуда $U_n - U \leq 2^{-n+1} z$. Следовательно, $U_n \to U$ в $H_A(X\to E)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В доказательстве теоремы 4 [2] о полноте $\Pi(X\to E)$ в силу ошибочности теоремы 3(2) [2] образовался пробел, который не удается исправить без дополнительных ограничений на норму в E [8].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. [4] Оператор $U : E\to X$ называется мажорированным, если для любого $e \in E_+$ имеем $[U](e) = \sup\{\sum\|Ue_k\| : e_1,\dots,e_n \in E_+, e = \sum e_k\} < \infty$. Легко видеть, что $[U]$ можно продолжить до линейного положительного функционала на E, для которого мы сохраним старое обозначение.

Пространство всех мажорированных операторов обозначим через $M(E\to X)$.

Если E - KN -линеал, то через $S(E\to X)$ обозначим множество всех $U\in M(E\to X)$, таких, что $[u]$ входит в банахово сопряженное E^* с нормой: $\|u\|_{S(E\to X)}=\|[u]\|_{E^*}$ (см. [2], лемма 3).

ТЕОРЕМА 2. Пусть E - KN -линеал. Для того чтобы пространство $S(E\to X)$ было рефлексивно, необходимо и достаточно, чтобы E и X были рефлексивны.*)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна, так как E^* и X можно отождествить с замкнутыми подпространствами в $S(E\to X)$.

Пусть E и X рефлексивны. Тогда, в силу теоремы 3 и предложения 3 [5], $S(E\to X)=S(E\to X^{**})=(E\tilde{\otimes} X^*)^*$ (равенство означает изометрию). По теореме 4 [6] (или теореме 6 [4]), $E\tilde{\otimes} X=E(X)$ (определение пространства вектор-функций $E(X)$ см. в [4], [6] или [7]). Тогда, по теореме И.Гальперина [7] (ее просто получить из теорем 6, 8 [6] и теоремы IX.7.4 [1]), $E(X)$ рефлексивно. Следовательно, $S(E\to X)=(E(X))^*$ рефлексивно.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть E - KN-линеал. Для того чтобы пространство $\Pi(X\to E)$ было рефлексивно, необходимо E и достаточно, чтобы E и X были рефлексивны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость очевидна, так как E и X^* можно отождествить с замкнутыми подпространствами в $\Pi(X\to E)$. Пусть E и X рефлексивны. Тогда $\Pi(X\to E)=S(E^*\to X^*)$ (следствие теоремы 5 [2]), откуда $\Pi(X\to E)$ рефлексивно в силу теоремы 2.

2. Теперь мы рассмотрим порядковые свойства пространств $S(E\to X)$ и $H_1(X\to E)$. Напомним сначала некоторые определения. Пусть X - KN-пространство. Будем говорить, что

---

*) Здесь и далее считаем $E\neq\{0\}\neq X$.

в X выполнено условие

(A), если из $0 \le x_n \downarrow 0$ следует $\|x_n\| \to 0$;

(B), если из $0 \le x_n \uparrow$, $\|x_n\| \le c_n$ следует, что существует $\sup x_n \in X$;

(C), если из $0 \le x_n \uparrow x \in X$ следует $\|x\| = \sup \|x_n\| (n \ge 1)$.

Если аналоги условий (B) и (C) выполнены для направлений, то говорят об условиях (B′) и (C′). Отметим, что в банаховом сопряженном X^* условия (B′) и (C′) выполнены всегда.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* E - K-*линеал*, X - KN-*пространство с условием* (C′). *Тогда*

1) $M(E \to X) \cap H_\tau(E \to X)$ - *нормальное подпространство в* $H_\tau(E \to X)$, *причем* $[u] = [|u|]$;

2) *если норма в* X *удовлетворяет* (B′), *то* $M(E \to X) = H_\tau(E \to X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $U \in M(E \to X)$. Для любого $e \ge 0$ рассмотрим множество A_e всех элементов вида: $x = \sum_{k=1}^{n} |U e_k|$, где $\sum e_k = e$; $e_1, \ldots, e_n \ge 0$. Легко видеть, что множество A_e направлено по возрастанию (см. доказательство теоремы УШ.7.2 [1]). Если $x \in A_e$, то $x \le \sum \|U e_k\| \le [U](e)$. Следовательно, $\|x_1 \vee \ldots \vee x_m\| \le [U](e)$ для любых $x_1, \ldots$ $\ldots x_m \in A_e$. Если $|e'| \le e$, то $|Ue'| \le |Ue'_+| + |Ue'_-| + |U(e - |e'|)| \in A_e$.

Пусть $U \in M(E \to X) \cap H_\tau(E \to X)$. Очевидно, что $[u] \le [|U|]$. Так как для любого $e \ge 0$ имеем $|U|(e) = \sup\{|Ue'| : |e'| \le e\}$ и в X выполнено (C′), то $\||U|(e)\| \le [u](e)$ в силу доказанных свойств множества A_e . Отсюда $[|U|] = [u]$.

2) Пусть $U \in M(E \to X)$. Так как норма в X удовлетворяет (B′), то в силу доказанного в пункте 1) существует $\sup A_e \in X$. Так как из $|e'| \le e$ вытекает $|U_{e'}| \le \sup A_e$, то $U \in H_\tau(E \to X)$.

Легко видеть, что имеет место

ЛЕММА. *Пусть* X - KN-*пространство с условием* (C′). *Если* $0 \le U_\alpha \uparrow U \in M(E \to X) \cap H_\tau(E \to X)$, *то* $[U_\alpha] \uparrow [U]$ *в* K-*пространстве регулярных функционалов* $\tilde{E}$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть E - KN-линеал, X - KN-пространство с условием (C'). Тогда

1) $\mathcal{Z} = S(E \to X) \cap H_r(E \to X)$ есть KN-пространство с условием (C');

2) норма в $\mathcal{Z}$ удовлетворяет (B) (соответственно - (B')) тогда и только тогда, когда норма в X удовлетворяет (B) (соответственно - (B'));

3) пусть в X выполнено (A); норма в $S(E \to X^*)$ удовлетворяет (A) тогда и только тогда, когда норма в E^* и X^* удовлетворяет (A);

4) пусть в X выполнено (A); $S(E \to X^*)$ - KB-пространство тогда и только тогда, когда норма в E^* и X^* удовлетворяет (A).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) получается из теоремы 3 и леммы. Необходимость в 2) - 4) тривиальна. 4) есть очевидное следствие 2) и 3).

2) Пусть $0 \le U_\alpha \uparrow$, $\|[U_\alpha]\|_{E^*} \le C$. Так как в E^* выполнено (B'), то существует $\sup [U_\alpha] = e^* \in E^*$. Тогда $\|U_\alpha e\| \le \langle e, e^* \rangle < \infty$ при любом $e \ge 0$. Так как в X выполнено (B'), то существует $Ue = \sup U_\alpha e \in X$ $(e \ge 0)$. Отсюда $\|Ue\| = \sup \|U_\alpha e\| \le \langle e, e^* \rangle (e \ge 0)$, то есть $U \in S(E \to X)$.

3) По теореме 5 [2], $S(E \to X^*) = H_A(X \to E^*)$ (равенство означает изометрию и порядковый изоморфизм). По теореме 2 [6], $H_A(X \to E^*) = s(X) - E^*(X^*)$ (определение см. в [6]). Можно показать, что из выполнения условия (A) в X и X^* следует $s(X) - E^*(X^*) = E^*(X^*)$. Так как в E^* и X^* выполнено (A), то (A) выполнено в $E^*(X^*)$.

Аналогично теореме 4 получается

ТЕОРЕМА 5. Пусть X - KN-линеал, E - KN-пространство. Тогда

1) норма в KN-пространстве $H_A(X \to E)$ (см. [1], теорема VIII.6.3) удовлетворяет (C) (соответственно - (C'), (B), (B')) тогда и только тогда, когда (C) (соответственно-(C

(B), (B′)) выполнено в E;

2) пусть в X выполнено (A); норма в $H_A(X-E)$ удовлетворяет (A) тогда и только тогда, когда (A) выполнено в E и X^*;

3) пусть в X выполнено (A); $H_A(X-E)$ является KB-пространством тогда и только тогда, когда E и X^* – KB-пространства.

Литература

1. ВУЛИХ Б.З., Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М., Физматгиз, 1961.
2. ЛЕВИН В.Л., О двух классах отображений, действующих между банаховыми пространствами и банаховыми решетками.-Сиб.мат.журн., 1969,т.10,вып.4,с.903-909.
3. ВУЛИХ Б.З., ЛОЗАНОВСКИЙ Г.Я., О метрической полноте нормированных и счетно-нормированных структур, Вестник ЛГУ, 19, 1966, с. 12-15.
4. БУХВАЛОВ А.В., Об аналитическом представлении операторов с абстрактной нормой,- "Докл. АН СССР", 1973, т. 208, № 5, с. 1012-1015.
5. ЛЕВИН В.Л., Тензорные произведения и функторы в категориях банаховых пространств, определяемые KB -линеалами.-Труды Моск. мат. об-ва, 20, 1969, с. 43-82.
6. БУХВАЛОВ А.В., Пространства вектор-функций и тензорные произведения. - Сиб.мат.журн.,1972,т.13,вып.6,с.1229-1238.
7. HALPERIN I. Reflexivity in the L^λ function spaces,- Duke Math.J.,1954,v.21,p.205-208
8. ЛЕВИН В.Л., К двойственности некоторых классов линейных операторов, действующих между банаховыми пространствами и банаховыми решетками. - Сиб.мат.журн.,1973,т.14,вып.3.

Поступила в ред.-изд. отд.

26. II. 1973 г.