УДК 513.330 : 115

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА С РАЗРЫВНОЙ ФУНКЦИЕЙ ПОТОКА

В.И.Шушков

I. Постановка задачи

Пусть дан ориентированный граф $(\mathcal{J}, \mathcal{U})$, где $\mathcal{J}$ - множество вершин, а $\mathcal{U}$ - множество дуг. Каждой дуге $u \in \mathcal{U}$ ставится в соответствие пара вершин (i_u, j_u). Первая вершина называется началом дуги u, вторая - концом дуги u.

На множестве $\mathcal{J}$ пусть задана функция ρ, а на множестве $\mathcal{U}$ - функции c, ℓ, v. Предположим, что

а) $\sum\limits_{i \in \mathcal{J}} \rho(i) = 0$,

б) $0 < \ell(u) < c(u)$, $u \in \mathcal{U}$.

Требуется определить заданную на множестве $\mathcal{U}$ функцию x из условий:

а) $x^-(i) - x^+(i) = \rho(i)$, $i \in \mathcal{J}$,

б) $x(u) = 0$

или

$$\ell(u) \leq x(u) \leq c(u), \quad u \in \mathcal{U}_n \subset \mathcal{U},$$

в) $\ell(u) \leq x(u) \leq c(u)$, $u \in W_n = \mathcal{U} - \mathcal{U}_n$,

г) достигает минимума величина

$$\sum_{u \in \mathcal{U}} v(u) \cdot x(u),$$

где

$$x^-(i)=\sum_{u\in\mathcal{U},\, i_u=i} x(u) \ ,$$

$$x^+(i)=\sum_{u\in\mathcal{U},\, j_u=i} x(u) \ .$$

Назовем эту задачу задачей I.

2. Метод решения задачи I

Сделав замену переменных

$$y(u)=\begin{cases} x(u)-\ell(u)\ , & u\in W_n\ ,\\ x(u)\ , & u\in \mathcal{U}_n\ ,\end{cases}$$

задачу I можно записать в следующем виде (задача II).

Требуется определить заданную на множестве $\mathcal{U}$ функцию y из условий:

а) $y^-(i)-y^+(i)=q(i)\ ,\quad i\in\mathcal{I}\ ,$

б) $y(u)=0$

или

$$\ell(u)\le y(u)\le c(u)\ ,\quad u\in\mathcal{U}_n\ ,$$

в) $0\le y(u)\le d(u)\ ,\quad u\in W_n\ ,$

г) достигает минимума величина

$$\sum_{u\in\mathcal{U}} v(u)\times y(u)+\sum_{u\in W_n} v(u)\times \ell(u)\ ,$$

где

$$y^-(i)=\sum_{u\in W_n,\, i_u=i} y(u)\ ,$$

$$y^+(i)=\sum_{u\in W_n,\, j_u=i} y(u)\ ,$$

$$q(i)=p(i)-\ell^-(i)+\ell^+(i)\ ,$$

$$\ell^-(i)=\sum_{u\in W_n,\, i_u=i}\ell(u)\ ,\ \ell^+(i)=\sum_{u\in W_n,\, j_u=i}\ell(u)\ ,$$

$$d(u)=c(u)-\ell(u)\ .$$

Наряду с задачей II рассмотрим еще одну задачу (задача III).

Требуется определить, заданную на множестве $\mathcal{U}$ функцию y из условий:

а) $y^-(i) - y^+(i) = q(i), \quad i \in \mathcal{J},$

б) $0 \le y(u) \le b(u), \quad u \in \mathcal{U},$

в) достигает минимума величина

$$\sum_{u \in \mathcal{U}} v(u) \times y(u) + \sum_{u \in W_n} v(u) \times l(u),$$

где

$$b(u) = \begin{cases} c(u), & u \in U_n, \\ d(u), & u \in W_n. \end{cases}$$

Занумеруем дуги множества U_n числами $1:n$ и будем обозначать дугу с номером s через u_s. Назовем задачей $V(a_1, \dots, a_k), k \le n$ (или просто задачей V_k, когда важно знать лишь значение k), задачу III при дополнительном условии:

$$\left.\begin{array}{l} \text{если } a_s = 0, \text{ то } y(u_s) = 0, \\ \text{если } a_s = 1, \text{ то } l(u_s) \le y(u_s) \le c(u_s) \end{array}\right\} s \in 1:k.$$

Набор чисел $(a_1, \dots, a_k), k \le n$, каждое из которых равно 0 или 1, назовем частичным вариантом. Частичный вариант $(a_1, \dots, a_n)$ при условии, что задача $V(a_1, \dots, a_n)$ разрешима, назовем вариантом.

Будем говорить, что вариант $(a^1_1, \dots, a^1_n)$ лексикографически меньше варианта $(a^2_1, \dots, a^2_n)$, и писать $(a^1_1, \dots, a^1_n) < (a^2_1, \dots, a^2_n)$, если $a^1_i = a^2_i, i \in 1:s-1$, но $a^1_s < a^2_s$. Следует заметить, что общее число вариантов равно 2^n.

Процедура одностороннего перебора вариантов, описанная ниже, представляет измененный применительно к решению задачи II вариант одной из реализаций метода ветвей и границ [4] и состоит из последовательного просмотра вариантов в лексикографическом порядке и их оценки. Информацию о процессе перебора назовем записью.

Определим запись как набор

$$\langle k, (a_1, \dots, a_k), z(a_1, \dots, a_k), (f_1, \dots, f_n), E \rangle$$

где k - длина частичного варианта $(a_1,\dots,a_k)$; $z(a_1,\dots,a_k)$ - значение целевой функции задачи $V(a_1,\dots,a_k)$ (если задача $V(a_1,\dots,a_k)$ неразрешима, то $z(a_1,\dots,a_k)=\infty$); $(f_1,\dots,f_n)$ - лучший из встретившихся ранее вариантов, т.е. такой вариант, что значение целевой функции соответствующей задачи минимально;

E - значение целевой функции задачи $V(f_1,\dots,f_n)$. В начале перебора $k=0$, z - значение целевой функции задачи Ш, $E=\infty$.

Алгоритм состоит в задании правил перехода от одной записи к другой. В нашем случае они таковы:

I. Если $z(a_1,\dots,a_k)<E$, $k<n$, то перейти к частичному варианту $(a_1,\dots,a_k,0)$. Следующая запись будет иметь вид:

$$\langle k+1,(a_1,\dots,a_k,0),z(a_1,\dots,a_k,0),(f_1,\dots,f_n),E\rangle.$$

2. Если $z(a_1,\dots,a_k)\geq E$, $a_k=0$, то перейти к частичному варианту $(a_1,\dots,a_{k-1},1)$. Следующая запись будет иметь вид:

$$\langle k,(a_1,\dots,a_{k-1},1),z(a_1,\dots,a_{k-1},1),(f_1,\dots,f_n),E\rangle.$$

3. Если $z(a_1,\dots,a_k)\geq E$, $a_k=1$, то перейти к частичному варианту $(a_1,\dots,a_{s-1},1)$, где s таково, что $a_j=1$, $j\in s+1:k$, $a_s=0$. Следующая запись будет иметь вид:

$$\langle s,(a_1,\dots,a_{s-1},1),z(a_1,\dots,a_{k-1},1),(f_1,\dots,f_n),E\rangle.$$

4. Если $z(a_1,\dots,a_k)=M<E$, $k=n$, то перейти к частичному варианту $(a_1,\dots,a_{s-1},1)$, где s таково, что $a_j=1$, $j\in s+1:k$, $a_s=0$. Следующая запись будет иметь вид:

$$\langle s,(a_1,\dots,a_{s-1},1),z(a_1,\dots,a_{s-1},1),(a_1,\dots,a_n),M\rangle.$$

Из алгоритма видно, что если $z(a_1,\dots,a_k)\geq E$, $k<n$, то варианты вида $(a_1,\dots,a_k,q_1,\dots,q_{n-k})$ не рассматриваются, так как в этом случае значение целевой функции любой из задач $V(a_1,\dots,a_k,q_1,\dots,q_{n-k})$ больше либо равно E (если задача $V(a_1,\dots,a_k,q_1,\dots,q_{n-k})$ при конкретных значениях q_i, $i\in 1:n-k$, неразрешима, то значение соответствующей целевой функции полагается равным $+\infty$). Это

следует из того, что минимальное значение функции при уменьшении множества допустимых значений аргумента может разве лишь возрасти. А так как варианты перебираются в лексикографическом порядке, то повторного просмотра вариантов не происходит и процесс закончится, когда придем к такому частичному варианту $(a_1, \dots, a_k)$, что $a_j = 1$, $j \in 1 \cdot k$.

Сходимость данного метода следует из общих принципов сходимости метода ветвей и границ.

Имея решение задачи II (решение этой задачи совпадает с решением задачи $V(f_1, \dots, f_n)$, где $(f_1, \dots, f_n)$ - лучший из встретившихся в процессе перебора вариантов), нетрудно получить решение задачи I.

Нумерацию дуг множества U_n целесообразно осуществить следующим образом. Решаем задачу III методом потенциалов. Пусть y° - оптимальное решение этой задачи. Значала нумеруются дуги, для которых $y^\circ(u) = 0$ в порядке убывания величины $h = v(u) + pt(i_u) - pt(j_u)$ ($pt(i_u), pt(j_u)$ - потенциалы вершин i_u и j_u). Если величина h одинакова для нескольких дуг, то их нумеруем в произвольном порядке. Потом нумеруются дуги такие, что $0 < y^\circ(u) < b(u)$ в порядке убывания величины $\ell(u) - y^\circ(u)$ и, наконец, дуги, такие, что $y^\circ(u) = b(u)$ в порядке убывания величины h.

3. Метод оптимизации структуры системы газоснабжения - - решение задачи I

Пусть $(\mathcal{I}, U)$ - граф, соответствующий существующей системе газоснабжения [5]. Расширим его, добавив дуги, соответствующие предполагаемым участкам газопроводов.

Функции p, c, ℓ, v имеют следующий смысл.

Если вершина i соответствует месторождению газа, то $p(i)$ - объем добычи; если вершина i соответствует потребителю газа, то $p(i)$ - объем потребления; если вершина i соответствует распределительному пункту, то $p(i) = 0$.

$c(u)$, $\ell(u)$ - верхняя и нижняя пропускные способности участка газопровода, соответствующего u-й дуге.

$v(u)$ - стоимость перекачки (расчетные затраты) единицы количества газа по участку газопровода, соответствующего u-й дуге. Функция v имеет следующий вид:

$$v = S + \alpha \cdot K,$$

где S - текущие затраты,

K - капиталовложения,

α - коэффициент эффективности.

Множество U_n будет соответствовать множеству предполагаемых участков газопроводов.

Решаем задачу I. Если ограничение

$$x(u_s) = 0$$

или $\ell(u_s) \leq x(u_s) \leq c(u_s)$ для дуги $u_s \in U_n$ принимает вид

$$\ell(u_s) \leq x(u_s) \leq c(u_s),$$

то предполагаемый участок газопровода, соответствующий дуге u_s, должен быть построен.

Таким образом, будет определено, какие из возможных участков газопроводов необходимо построить; т.е. будет определена на планируемый период времени оптимальная структура системы газоснабжения.

Литература

1. КАГАНОВИЧ И.З., Математическая модель газоснабжения в форме транспортной задачи с разрывной целевой функцией.- В сб.: "Математические методы в экономике газо- и нефтеснабжения". Л., 1966, с. 14-18.
2. КАГАНОВИЧ И.З., РЕСНЕР М.Я., Моделирование и программирование для расчета на ЭВМ газовых потоков и планов газоснабжения.- В сб.: "Экономика, организация и управление в газовой промышленности". 4, М., 1968, с. 52-66.
3. КАГАНОВИЧ И.З., РЕЙСНЕР М.Я., Сетевые модели газоснабжающих систем. Экономика и математические методы. т. VI, № 3, 1970, с. 454-459.
4. РОМАНОВСКИЙ И.В., Использование линейного расширения при решении целочисленных экстремальных задач методами перебора.- "Докл. АН СССР", 1968, т. 181, № 1, с. 22-25.
5. РОМАНОВСКИЙ И.В., ШУШКОВ В.И., О разработке математической модели системы газоснабжения. - В сб.: [2]. с. 84-99.

Поступила в ред.-изд. отд.
20. VI. 1972 г.