1973 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск II (28)

УДК 330.115,382.81/82

ХАРАКТЕРИСТИКА СОСТОЯНИЙ РАВНОВЕСИЯ В ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ МЕЖДУНАРОДНЫХ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СВЯЗЕЙ

А.Г.Рубинштейн

Рассматриваемая в заметке модель международных экономических связей предназначена для анализа возможностей координации производства и обмена с учётом интересов всех участников обмена.

Пусть экономическое сообщество состоит из r стран, обменивающихся между собой n видами товаров. Для упрощённого отражения транспортных затрат предполагается существование для каждого товара i из $\mathcal{I}_0=\{1,2,\dots,n\}$ условного центра, через который осуществляются все перевозки. При этом экспортёр обеспечивает перевозку товара в этот центр, а импортёр - от него.

Экономика каждой страны s из $S=\{1,2,\dots,r\}$ описывается линейной моделью, в которой множество $\mathcal{I}^s$ всех ингредиентов разбивается на три подмножества $\mathcal{I}_0^s=\mathcal{I}_0$, $\mathcal{I}_1^s$ и $\mathcal{I}_2^s$. Последнее включает ингредиенты, затрачиваемые при транспортировке экспортных и импортных товаров. Кроме того, имеется выделенный ингредиент, затраты которого минимизируются. В множестве $\mathcal{J}^s$ технологических способов выделено подмножество $\bar{\mathcal{J}}^s$ способов, интенсивности применения которых ограничены сверху величинами d_j^s. Матрица технологических способов, естественно, разбивается на три подматрицы

$$A_l^s=[a_{ij}^s]_{i\in\mathcal{I}_l^s,\ j\in\mathcal{J}^s},\quad l=0,1,2.$$

При этом затраты выделенного ингредиента определяются положительным вектором-строкой $c^s=[c_j^s]_{j\in\mathcal{J}^s}$.

Затраты ингредиентов множества $\mathcal{I}_2^s$ при экспорте и импорте определяются неотрицательными матрицами

$$G^s=[g_{ik}^s]_{i\in\mathcal{I}_2^s,\,k\in\mathcal{I}_0},\quad H^s=[h_{ik}^s]_{i\in\mathcal{I}_2^s,\,k\in\mathcal{I}_0},$$

а затраты выделенного ингредиента положительными векторами-строками

$$g^s=[g_k^s]_{k\in\mathcal{I}_0},\quad h^s=[h_k^s]_{k\in\mathcal{I}_0}.$$

Имеющиеся ресурсы и конечные потребности характеризуются векторами-столбцами

$$b^{s,l}=[b_i^s]_{i\in\mathcal{I}_l^s},\quad l=0,1,2.$$

Таким образом, при фиксированном неотрицательном векторе международных цен

$$p=(p_1,p_2,\dots,p_n) \tag{I}$$

для каждой страны $s\in S$ возникает следующая экстремальная задача.

ЛОКАЛЬНАЯ ЗАДАЧА СТРАНЫ s. Определить неотрицательные векторы-столбцы (планы производства, экспорта и импорта)

$$x^s=[x_j^s]_{j\in J^s},\ u^s=[u_k^s]_{k\in\mathcal{I}_0},\ v^s=[v_k^s]_{k\in\mathcal{I}_0} \tag{2}$$

из условий:

$$x_j^s\le d_j^s,\quad j\in\bar{J}^s, \tag{3}$$

$$A_0^s x^s-u^s+v^s\ge b^{s,0},\ A_1^s x^s\ge b^{s,1},\ A_2^s x^s-Gu^s-H^s v^s\ge b^{s,2}; \tag{4}$$

$$pu^s\ge pv^s, \tag{5}$$

$$f(x^s,u^s,v^s)=c^s x^s+g^s u^s+h^s v^s\to\min. \tag{6}$$

ЗАМЕЧАНИЕ I. Если при некотором векторе (I) поставленная задача разрешима, то для любого её решения (2), ввиду положительности векторов g^s, h^s и неотрицательности матриц G^s,

H^s, в неравенстве (5), очевидно, достигается равенство. Далее, если для некоторых $k \in \mathcal{J}_0$ международные цены $p_k = 0$, то соответствующие компоненты вектора u^s равны нулю.

Система международных цен (I) называется **равновесной**, если при этих ценах среди решений локальных задач имеются сбалансированные, т.е. такие, что

$$\sum_{s \in S} u^s = \sum_{s \in S} v^s. \tag{7}$$

Приводимая ниже теорема существования равновесной системы цен базируется в конечном счёте на теореме Какутани о неподвижных точках для многозначных отображений. Однако непосредственно используется нетривиальное следствие этой теоремы, доказанное впервые Гейлом (см. [I], а также перепечатку этой работы в [2], стр. 87-IOI).

ЛЕММА I *). *Пусть P – стандартный симплекс в R^n, т.е. множество векторов (I) таких, что $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, а $\Gamma \subset R^n$ – некоторое ограниченное замкнутое выпуклое множество. Далее, определённое на P отображение χ, сопоставляющее каждому $p \in P$ непустое выпуклое множество $\chi(p) \subset \Gamma$, удовлетворяет условиям:*

*I⁰ Отображение χ является замкнутым **), т.е. из соотношений $p^{(\nu)} \in P$, $p^{(\nu)} \to p$, $w^{(\nu)} \in \chi(p^{(\nu)})$, $w^{(\nu)} \to w$ следует, что $w \in \chi(p)$.*

2⁰ При любых $p \in P$, $w \in \chi(p)$, скалярное произведение $(p, w) \geq 0$.

Тогда существует вектор $\hat{p} \in P$ такой, что множество $\chi(\hat{p})$ содержит некоторый неотрицательный вектор.

---

*) Детальные доказательства этого предложения, именуемого обычно леммой или теоремой Гейла, приведены в монографиях С.Карлина [3] (лемма 8.8.I стр. 33I-333) и Х.Никайдо [4] (теорема I6.6. стр. 343-345).

**) Некоторые авторы это свойство называют полунепрерывностью сверху.

Нам потребуется ещё некоторые сведения из теории двойственности для задач линейного программирования.

Условимся говорить, что задача линейного программирования

$$x \geqslant 0, \quad Ax \geqslant b, \quad cx \longrightarrow min \tag{8}$$

устойчиво разрешима, если при некотором $\varepsilon > 0$ разрешимой является задача

$$x \geqslant 0, \quad Ax \geqslant b + \varepsilon e, \quad cx \longrightarrow min, \tag{9}$$

где через e обозначен вектор соответствующей размерности, все компоненты которого равны единице.

ЛЕММА 2. Разрешимая задача (8) тогда и только тогда является устойчиво разрешимой, когда в двойственной задаче

$$y \geqslant 0, \quad yA \leqslant c, \quad yb \longrightarrow max \tag{10}$$

множество Y_0 оптимальных векторов ограничено.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, заметим, что интересующее нас множество Y_0 в том и только том случае является неограниченным, если существует вектор $y^{(0)}$, удовлетворяющий условиям:

$$(y^{(0)}, y^{(0)}) = 1, \quad y^{(0)} \geqslant 0, \quad y^{(0)}A \leqslant 0, \quad y^{(0)}b = 0, \tag{11}$$

где под $(y^{(0)}, y^{(0)})$ понимается скалярный квадрат вектора $y^{(0)}$.

Допустим теперь, что множество Y_0 является неограниченным. Тогда для указанного вектора $y^{(0)}$, удовлетворяющего соотношениям (11), при любых $\varepsilon > 0$ и $x \geqslant 0$ имеем:

$$y^{(0)}Ax \leqslant 0 = y^{(0)}b < y^{(0)}b + \varepsilon(y^{(0)}, y^{(0)}) \leqslant y^{(0)}(b + \varepsilon e).$$

Поэтому в соответствующих задачах (9) нет допустимых векторов. А это означает, что задача (8) не является устойчиво разрешимой.

Наоборот, если задача (8) не является устойчиво разрешимой, то при любом $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$ в соответствующей задаче (9) нет допустимого вектора, и поэтому в двойственной к ней задаче линейная форма неограничена. Следовательно, найдётся последовательность векторов $y^{(n)}$ такая, что

$$y^{(n)} \geq 0,\ y^{(n)}A \leq c,\ y^{(n)}(b+\frac{1}{n}e) > cx^{(0)}+1, \qquad (12)$$

где $x^{(0)}$ - некоторый оптимальный вектор задачи (8). Но тогда

$$cx^{(0)}+\frac{1}{n}y^{(n)}e > y^{(n)}(b+\frac{1}{n}e) > cx^{(0)}+1, \qquad (13)$$

т.е.

$$y^{(n)}e > n. \qquad (14)$$

С помощью (12), (13) и (14) легко проверяется, что для любой предельной точки $y^{(0)}$ последовательности нормированных векторов $z^{(n)}=\frac{y^{(n)}}{(y^{(n)},\ y^{(n)})}$ справедливы соотношения (11). Но тогда множество Y_0 является неограниченным, что и требовалось показать.

ЛЕММА 3. Пусть последовательность прямоугольных матриц $A^{(k)}$ сходится к матрице A, а векторы $x^{(k)}$ являются оптимальными в задачах линейного программирования

$$x \geq 0,\ A^{(k)}x \geq b,\ cx \to min,\ k=1,2,\dots . \qquad (15)$$

Если при этом задача (8) устойчиво разрешима[ж)] и имеет место сходимость $x^{(k)} \to \bar{x}$, то предельный вектор $\bar{x}$ является оптимальным для задачи (8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, переходя к пределу в соотношениях

$$x^{(k)} \geq 0,\ A^{(k)}x^{(k)} \geq b,\ k=1,2,\dots,$$

убеждаемся в том, что вектор $\bar{x}$ является допустимым для задачи (8). Далее, из оптимальности векторов $x^{(k)}$ для задач (15) следует существование векторов $y^{(k)}$ таких, что

$$y^{(k)} \geq 0,\ y^{(k)}A^{(k)} \leq c,\ y^{(k)}b = cx^{(k)},\ k=1,2,\dots . \qquad (16)$$

Покажем, что

ж) Простой разрешимости задачи (8) для этого недостаточно.

$$\sup_k (y^{(k)}, y^{(k)}) < +\infty.$$

Действительно, в противном случае, не уменьшая общности, можно считать, что

$$\lim_k (y^{(k)}, y^{(k)}) = +\infty.$$

А тогда каждая предельная точка $y^{(0)}$ последовательности нормированных векторов $x^{(k)} = \frac{y^{(k)}}{(y^{(k)}, y^{(k)})}$, ввиду (16), удовлетворяет соотношениям (II), что противоречит устойчивой разрешимости задачи (8).

Таким образом, последовательность векторов $y^{(k)}$ ограничена. Поэтому из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{y^{k_i}\}_{i=1}^{\infty}$. Для предельного вектора $\bar{y}$ этой подпоследовательности на основании (16) имеем:

$$\bar{y} \geq 0, \quad \bar{y}A \leq c, \quad \bar{y}b = c\bar{x}.$$

А это означает, что вектор $\bar{x}$ является оптимальным для задачи (8), и лемма доказана.

ТЕОРЕМА I*). Если при любом неотрицательном векторе (I) международных цен все локальные задачи устойчиво разрешимы, то в рассматриваемой модели существует равновесная система цен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как международные цены в изучаемой модели нас интересуют лишь с точностью до положительного множителя (они учитываются только в однородных соотношениях (5)), то, не уменьшая общности, можно ограничиться рассмотрением нормированных цен, определяемых векторами (I) из стандартного симплекса P.

При каждом векторе $p \in P$ все локальные задачи по условию теоремы разрешимы. Через $M_s(p)$ обозначим множество наборов

---

*) Для частного случая рассматриваемой здесь модели аналогичная теорема была доказана автором в [5]. При этом приводимое здесь доказательство строится по той же схеме.

векторов (2), представляющих решение локальной задачи страны s при ценах p. Тогда каждому элементу $(x^s, u^s, v^s) \in M_s(p)$ отвечает n-мерный вектор $w^s = u^s - v^s$, характеризующий спрос и предложения страны s. Определим на P многозначное отображение $\mathcal{X}$, полагая

$$\mathcal{X}(p) = \{w = \sum_{s \in S} w^s : w^s = u^s - v^s, (x^s, u^s, v^s) \in M_s(p), s \in S\}.$$

Ввиду соотношений (5), при любых $p \in P$ и $w \in \mathcal{X}(p)$ имеем:

$$pw = p \sum_{s \in S} w^s = p \sum_{s \in S} (u^s - v^s) = \sum_{s \in S} (pu^s - pv^s) \geq 0. \quad (17)$$

Таким образом, построенное отображение $\mathcal{X}$ удовлетворяет условию 2^0 леммы Гейла. Более того, на основании замечания I можно утверждать, что в неравенстве (17) всегда достигается равенство. При этом если некоторые компоненты вектора p равны нулю, то нулевыми являются также соответствующие компоненты всех векторов u^s.

Заметим теперь, что из условия разрешимости всех локальных задач при любом $p \in P$ следует существование в каждой задаче такого допустимого набора векторов (2), что $u^s = v^s = \theta$. Соответствующие значения минимизируемых функционалов (6) обозначим через μ_s. Тогда при любых $p \in P$ и $(x^s, u^s, v^s) \in M_s(p)$ имеем:

$$f_s(x^s, u^s, v^s) \leq \mu_s.$$

Из этих неравенств и положительности векторов c^s, g^s и h^s следует ограниченность множеств $M_s = \bigcup_{p \in P} M_s(p)$. В частности, это означает, что при всех $p \in P$ выпуклые множества $\mu(p)$ содержатся в одном и том же ограниченном параллелепипеде $\Gamma \subset R^n$.

Далее, пусть последовательность векторов $p^{(\nu)} \in P$ сходится к вектору $\bar{p}$, а последовательность векторов $w^{(\nu)} \in \mathcal{X}(p^{(\nu)})$ сходится к вектору $\bar{w}$. Рассмотрим наборы $(x^{s,\nu}, u^{s,\nu}, v^{s,\nu}) \in M_s(p^{(\nu)})$ такие, что

$$w^{(\nu)} = \sum_{s \in S} (u^{s,\nu} - v^{s,\nu}), \quad \nu = 1, 2, \ldots .$$

При этом ввиду ограниченности множеств M_s, найдётся подпоследовательность ν_k такая, что

$$\lim_{k\to\infty}(x^{s,\nu_k}, u^{s,\nu_k}, v^{s,\nu_k}) = (\bar{x}^s, \bar{u}^s, \bar{v}^s), \; s\in S. \qquad (18)$$

Ввиду устойчивой разрешимости локальных задач при ценах $\bar{p} = \lim\limits_{k} p^{\nu_k}$ можно воспользоваться леммой 3. В силу последней при каждом $s \in S$ предельный набор (18) является оптимальным для локальной задачи страны s, отвечающей ценам $\bar{p}$, т.е.

$$(\bar{x}^s, \bar{u}^s, \bar{v}^s) \in M_s(\bar{p}), \; s\in S, \; \bar{w} = \sum_{s\in S}(\bar{u}^s - \bar{v}^s) \in \mathcal{X}(\bar{p}).$$

А это означает, что отображение $\mathcal{X}$ является замкнутым, т.е. удовлетворяет условию 1^0 леммы Гейла.

Таким образом, для построенного отображения $\mathcal{X}$ выполнены все условия леммы Гейла. Поэтому найдётся вектор $\hat{p} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \ldots, \hat{p}_n)$ из P такой, что множество $\mathcal{X}(\hat{p})$ содержит некоторый неотрицательный вектор $\hat{w} = (\hat{w}_1, \hat{w}_2, \ldots, \hat{w}_n) = \sum_{s\in S}(\hat{u}^s - \hat{v}^s)$. Покажем, что этот вектор является нулевым и, следовательно, вектор $\hat{p} \in P$ определяет равновесную систему цен.

При любых $p \in P$ и $w \in \mathcal{X}(p)$, как уже отмечалось, в (17) достигается равенство. Ввиду неотрицательности рассматриваемых векторов из равенства $\hat{p}\cdot\hat{w} = 0$ следует, что $\hat{w}_k = 0$ при $\hat{p}_k > 0$. Если же $p_k = 0$, то соответствующие компоненты векторов $\hat{u}^s$, как отмечалось, также равны нулю. Но тогда, ввиду неотрицательности вектора $\hat{w}$, и для таких k имеем $\hat{w}_k = 0$. Таким образом, рассматриваемый вектор $\hat{w}$ действительно является нулевым, и теорема полностью доказана.

Введём теперь некоторые понятия необходимые для характеристики планов, определяемых равновесными системами цен.

Множество $X = \{x^s, u^s, v^s\}_{s\in S}$ неотрицательных векторов (2), удовлетворяющих условиям (3), (4) и (7), называется *сбалансированным глобальным планом*. Аналогично, для любой коалиции $S' \subset S$ множество $X' = \{x^s, u^s, v^s\}_{s\in S'}$ векторов (2), удовлетворяющих условиям (3), (4) и балансовому соотношению

$$\sum_{s\in S'} u^s = \sum_{s\in S'} v^s, \qquad (19)$$

называется *сбалансированным коалиционным планом*.

Говорят, что сбалансированный глобальный план $X=\{\bar{x}^s; \bar{u}^s; \bar{v}^s\}_{s\in S}$ принадлежит **ядру рассматриваемой экономической системы**, если не существует коалиции $S'\subset S$ и отвечающего ей сбалансированного коалиционного плана $X'=\{x^s; u^s; v^s\}$ таких, что

$$f_s(x^s; u^s; v^s) < f_s(\bar{x}^s; \bar{u}^s; \bar{v}^s), \quad s\in S', \tag{20}$$

причём по крайней мере одно из этих неравенств является строгим.

ТЕОРЕМА 2. **Определяемый равновесной системой цен сбалансированный глобальный план принадлежит ядру соответствующей экономической системы.**

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть система международных цен (I) является равновесной и $\bar{X}=\{\bar{x}^s; \bar{u}^s; \bar{v}^s\}_{s\in S}$ - отвечающий ей сбалансированный глобальный план. Требуется показать, что для любого сбалансированного коалиционного плана $X'=\{x^s; u^s; v^s\}_{s\in S'}$, удовлетворяющего неравенствам (20), во всех этих неравенствах достигаются равенства.

Для доказательства указанного факта воспользуемся тем, что векторы $\bar{x}^s$, $\bar{u}^s$, $\bar{v}^s$ являются решениями соответствующих локальных задач, а неотрицательные векторы x^s, u^s, v^s удовлетворяют условиям (3) и (4).

Поэтому для значений соответствующих функционалов имеем[ж)]:

$$f_s(x^s; u^s; v^s) \geq f_s(\bar{x}^s; \bar{u}^s; \bar{v}^s) - \bar{z}_s(pu^s - pv^s), \quad s\in S', \tag{21}$$

где $\bar{z}_s$ – двойственные оценки ограничений (5), которые, не уменьшая общности, можно считать положительными[жж)]. Учитывая это, из

ж) При нарушении каких-либо ограничений (в данном случае ограничений (5)) экстремальные значения $f_s(\bar{x}^s; \bar{u}^s; \bar{v}^s)$ могут уменьшиться на величину, не превосходящую суммы произведений невязок на соответствующие двойственные оценки.

жж) При $\bar{z}_s=0$, прежде всего, из (20) и (21) имеем $f_s(x^s; u^s; v^s) = f_s(\bar{x}^s; \bar{u}^s; \bar{v}^s)$. Далее уменьшить свои затраты страна s не может даже при получении импортных товаров по нулевым ценам, а сохранение указанного уровня затрат возможно, учитывая положительность векторов g^s и h^s лишь при $u^s = v^s = 0$. Следовательно, это имеет место также для коалиционного плана X', и страну s можно из дальнейшего рассмотрения исключить.

(20) и (21) получаем:

$$pu^s - pv^s \geq 0, \quad s \in S'. \tag{22}$$

С другой стороны, так как рассматриваемый коалиционный план является сбалансированным (удовлетворяет условию (19)), то

$$\sum_{s \in S'} (pu^s - pv^s) = p\Big(\sum_{s \in S'} u^s - \sum_{s \in S'} v^s\Big) = 0.$$

Следовательно, во всех неравенствах (22) достигаются равенства. А тогда на основании (20) и (21) получаем:

$$f_s(x^s, u^s, v^s) = f_s(\bar{x}^s, \bar{u}^s, \bar{v}^s), \quad s \in S',$$

что и требовалось показать.

В заключение приведём ещё некоторые соображения относительно рассмотренной линейной модели международных экономических связей и численных методов расчёта равновесных цен и отвечающих им сбалансированных глобальных планов.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если в изучаемой модели имеется несколько равновесных систем международных цен, которым отвечают различные распределения эффекта между участниками обмена, то вопрос о том, какую из этих систем следует принять, не может решаться без привлечения дополнительных соображений. Между тем при увеличении числа участников обмена области неопределённости в распределении эффекта, по-видимому, будут сужаться.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В рассмотренной модели в каждой локальной задаче минимизировались затраты выделенного ингредиента (например, трудовые затраты). Однако полученные результаты легко переносятся на случай других критериев оптимальнсости. Таковым может служить, например, объём непроизводственного потребления в заданном ассортименте.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Общие линейные модели, описывающие экономику отдельных стран, могут быть различным образом конкретизированы. Например, представляет практический интерес переход к моделям леонтьевского типа с дополнительными ограничениями. Таковыми являются, в частности, модели планирования на последний год планового периода с ограничениями по капитальным вложениям за весь период. В рамках этих моделей могут изучаться отдельные аспекты динамики. Более того, к изученной модели могут быть формально сведены общие линейные динамические модели планирования на ряд лет, в которых, помимо международной торговли, находят отражение кредитные взаимоотношения.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. В условиях доказанной теоремы существования (см. теорему I) может быть предложен итеративный процесс для вычисления равновесной системы цен и отвечающего ей сбалансированного глобального плана. Один из вариантов такого процесса, построенный по принципу известного метода Брауна-Робинсон (см. [6]), испытывался автором практически на отдельных примерах. Однако теоретическим доказательством сходимости метода автор не располагает.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Исследование моделей, в которых не гарантируется выполнение условий теоремы существования, можно проводить с помощью вспомогательных моделей, включающих наряду с реальными способами фиктивные способы производства отдельных продуктов с большими затратами выделенных ингредиентов.

Литература

I. GALE D. The law of supply and demand.-"Math.Scand.", 1955, Vol.3, pp.155-169.

2. Reading in mathematical economics. Vaue theory. Vol.I, P.Newman(Ed.), The Johns Hopkins Press. Baltimore, 1968, 532p.

3. КАРЛИН С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., "Мир", 1964, 838 с.

4. НИКАЙДО Х. Выпуклые структуры и математическая экономика. М., "Мир", 1972, 517 с.

5. РУБИНШТЕЙН А.Г. Сравнительная характеристика межрайонного и международного обмена на основе принципа территориального экономического равновесия. - В сб.: "Методы и модели территориального планирования, вып. 2". Новосибирск, 1971, с. 138-160.

6. РОБИНСОН Дж. Итеративный метод решения игр. - В сб.: "Матричные игры". М., Физматгиз, 1961, с. 110-117.

Поступила в ред.-изд. отд.
28. XII. 1972 г.