УДК 338.984:65.012.122(47+57)

НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ ИНФОРМАЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ В ДВУХУРОВНЕВОЙ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ

С.Б.Перминов

Актуальность изучения проблемы организации информационного взаимодействия в экономической системе обусловлена, в частности, необходимостью связи отдельных предприятий, министерств и других управляющих органов в общегосударственную автоматизированную систему сбора и обработки информации (ОГАС).

В общем виде задача формулируется в следующем виде: при каком механизме информационного взаимодействия подсистем результаты функционирования всей системы в целом будут наилучшими. Известны разные подходы к решению этой задачи. Например, алгоритм функционирования каждой подсистемы может быть представлен в виде экстремальной задачи, тогда находится такой механизм их координации, который обеспечивал бы достижение оптимального в некотором смысле состояния системы. Различные вопросы, связанные с построением моделей взаимодействия, были рассмотрены в работах [1], [2] и др.

В изучаемых ниже моделях взаимодействия предполагается, что подсистемы не решают какую-либо экстремальную задачу, а достигаемое "сбалансированное" состояние системы не является оптимальным или равновесным в обычно принимаемом смысле, так как мы ограничиваемся более слабым требованием сбалансированности по всем продуктам. С точки зрения точности описания существующего механизма функционирования экономики этот подход имеет некоторые преимущества потому, что реальные экономические агенты (предприятия, министерства и др.) осуществляют алгоритмы, не решающие сложные экстремальные задачи. В рассматриваемых ниже моделях каждая подсистема, как и в реальной действительности, не располагает полной информацией о других подсистемах и имеет сведения лишь о тех подсистемах, с которыми она непосредственно связана. Сравнительная эффективность различных механизмов информационного взаимодействия оценивается по времени, необходимому для перехода системы в сбалансированное состояние.

Рассмотрим стохастическую модель двухуровневой системы. Подсистемы верхнего уровня будем называть "министерствами", а нижнего - "предприятиями", отдавая себе отчёт в том, что реальные министерства и предприятия осуществляют более сложные алгоритмы, чем те, которые будут рассмотрены в данной работе. Результатом информационного взаимодействия "министерств" и "предприятий" является план, сбалансированный по выпуску продукции, затратам финансовых, трудовых и материальных ресурсов. Распределением финансовых средств управляет "министерство финансов", материальных ресурсов - "Госснаб", заданий по выпуску продукции - "промышленные министерства". Так как алгоритмы функционирования всех "министерств" в принципе одинаковы, в данном изложении мы не будем делать между ними различия, а различные виды выпускаемой продукции и затрачиваемых ресурсов будем называть "продуктами". Информационные связи между подсистемами одного уровня отсутствуют. Это предположение в какой-то степени соответствует действительности, так как при существовавшей долгие годы в нашей стране системе управления предприятиям разрешалось связываться друг с другом, как правило, только через вышестоящий орган. Выбор производственных способов осуществляется только "предприятиями", а "министерства" сведениями о производственных возможностях "предприятий" не располагают и вырабатывают директивы с требованием увеличить или уменьшить производство (использование) соответствующего "продукта".

Итак, пусть имеется n "предприятий", ℓ "министерств" и m продуктов. Производственные возможности "предприятия" задаются матрицей Y_j порядка ($S_j \times m$). Строки этой матрицы описывают альтернативные варианты производства. Как обычно, положительные компоненты показывают выпуск, отрицательные - затраты соответствующих продуктов. Предполагается далее, что производство каждого из m продуктов управляется одним и только одним "министерством". Тогда множество номеров "продуктов" $I=\{1,\ldots,m\}$ разбивается на ℓ дизъюнктных (непустых) множеств $\Lambda_1,\ldots,\Lambda_\ell$. Например, "министерство финансов" распределяет такие виды "продуктов", как централизованные капитальные вложения, фонд заработной платы, задание по платежам в бюджет.

Множество $\mathcal{Z}_k$ возможных управляющих сигналов "министерства" состоит из конечного числа альтернативных сигналов $\mathcal{Z}_k=\{z_i \mid i\in\Lambda_k, z_i\in\{-1,0,+1\}\}$. Управляющий сигнал $z_i=-1$ означает дефицит "продукта" i в системе, $z_i=0$ – достижение баланса, а $z_i=1$ – избыток.

Состояние системы в момент времени t описывается набором векторов $(y_1(t),\ldots,y_n(t),z_1(t),\ldots,z_m(t))$, где $y_j(t)$ строка матрицы Y_j, $z_i(t)\in\mathcal{Z}_k$, $i\in\Lambda_k$.

В каждый период времени функционирует лишь одна подсистема любого типа и изменяются лишь те компоненты вектора состояния системы, которые относятся к данной подсистеме. Это предположение не означает, что подсистемы функционируют последовательно в реальном времени. Имитирование параллельной работы обеспечивается независимостью работы подсистем на том или ином интервале.

Последовательность номеров подсистем $\{\nu(t)\}_{t=0}^{\infty}$, $\nu(t)\in\{1,\ldots,n,n+1,\ldots,n+\ell\}$ находящихся в активном состоянии в соответствующие моменты времени, определяются одним из двух способов:

α) Каждый элемент последовательности определяется случайным образом при заданных вероятностях $(\delta_1,\ldots,\delta_{n+\ell})$ вступления подсистем в активное состояние, $\sum_{k=1}^{n+\ell}\delta_k=1$.

β) Последовательно функционируют все "министерства", а затем τ случайным образом выбранных "предприятий" ($\tau<n$). Если $t=a(\ell+\tau)+b$, $a=0,1,2,\ldots$, $b=1,\ldots,\ell$, то в период времени t функционирует "министерство", $\nu(t)=b+n$. Если $t=a\ell+(a-1)\tau+c$, $a=1,2,\ldots$, $c=1,\ldots,\tau$, то выбирается случайным образом номер "предприятия" из заданного множества n элементов. Вероятности выбора $(q_1,\ldots,q_n)$ фиксированы. Это означает, что функционирование сначала всех "министерств", а затем τ "предприятий" можно интерпретировать как параллельное потому, что подсистемы одного уровня между собой не связаны и порядок их функционирования несущественен.

Если в текущий период времени функционирует "министерство"

k, $k=\nu(t)-n$, то производится корректировка управляющих сигналов $z_i(t)$ для всех $i\in\Lambda_k$, в зависимости от выбранных всеми "предприятиями" планов. Соответствующие формулы приводятся ниже. Предположим, что для системы в целом заданы вышестоящим органом (Госпланом) директивы по выпуску конечной продукции $w=(w_1,\dots,w_m)$, где w_i – задание по выпуску или затратам "продукта" i. Заданы также допустимые величины невязок, степень точности балансов по всем продуктам $\varepsilon=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m)$. Управляющие сигналы вырабатываются "министерством" k в зависимости от величины невязки в период времени t:

$$d_i(t)=\sum_{j=1}^{n} y_j^i(t)-w_i,$$

$$z_i(t+1)=\begin{cases}-1, & \text{если } -\infty\le d_i(t)<-\varepsilon_i,\\ 0, & \text{если } -\varepsilon_i\le d_i(t)\le\varepsilon_i,\\ 1, & \text{если } \varepsilon_i<d_i(t)<\infty\end{cases}\qquad(I)$$

(для всех $i\in\Lambda_k$).

Иначе говоря, "министерство" k составляет балансы по продуктам из Λ_k и вырабатывает управляющие сигналы "предприятиям" с требованием увеличить, уменьшить или оставить на том же уровне производство этих "продуктов". Как видно из (I), сигнал "министерства" не содержит информации о том, на сколько увеличить и уменьшить производство.

Если в текущий период времени функционирует "предприятие" j, $j=\nu(t)\in\{1,\dots,n\}$, то оно вырабатывает новый вариант плана производства, руководствуясь управляющими сигналами "министерств" и учитывая прежний вариант плана. Рассмотрим некоторые возможные правила корректировки "предприятиями" своих планов:

Ia) Переработка управляющих сигналов на "предприятии" производится в некоторой фиксированной последовательности, скажем, в естественном порядке возрастания номеров. Например, сначала поступает задание по выпуску продукции, а лишь затем объёмы материальных и финансовых ресурсов. Несвоевременность поступления плановых заданий имеет место в практике планирования довольно часто. В этом случае "предприятие" разрабатывает план, используя свои предположения о том, каковы должны быть ещё неполученные плановые задания. Таким образом, корректировка плана осуществляется в m этапов. Разобьём период времени $[t, t+1]$ на m частей: $[t, t+1/m], \dots, [t+m-1/m, t+1]$. Для каждого "предприятия" j задан набор вероятностей перехода от одного варианта производства к другому, то есть m матриц $P_j^i = \| p_{jsq}^{i\rho} \|$ $(\rho = -1, 0, 1;\ s, q = 1, \dots, S_j)$, где $p_{jsq}^{i\rho}$ - вероятность перехода "предприятия" j к варианту производства с номером q, если прежний вариант имел номер s, а управляющий сигнал x_i принимает значение ρ. Тогда в каждый период времени $[t + i-1/m,\ t+i/m]$ осуществляется переход от варианта (строки матрицы Y_j) $y_j(t+i-1/m)$ к варианту $y_j(t+i/m$ в соответствии с матрицей переходных вероятностей P_j^i . Строки матриц P_j^i могут быть интерпретированы как системы предпочтений различных вариантов плана. Обоснование такой интерпретации имеется, например, в [3].

1б) "Предприятия" не различают значения (- I) и (+ I) каждого управляющего сигнала, то есть получают директиву изменить или не изменить производственный план в целом, а сведениями о избытке или дефиците определенного продукта они не располагают. Тогда $p_{jsq}^{i(1)} = p_{jsq}^{i(-1)}$ для всех i, j, s, q.

2а) "Предприятия" воспринимают вектор $x(t)$ целиком, а не покомпонентно, то есть получают все директивные задания одновременно. Число векторов управляющих сигналов, различающихся хотя бы по одной компоненте, равно 3^m. Заданы стохастические матрицы перехода $\Pi_j^x = \| \pi_{jsq}^x \|$ $(x = 1, \dots, 3^m;$ $s, q = 1, \dots, S_j)$, где π_{jsq}^x - вероятность перехода "предприятия" j от варианта производства $y_j^s(t)$ к варианту $y_j^q(t+1)$, если номер вектора $x(t)$ равен x.

2б) "Предприятия" не различают значения (- I) и (+ I) управляющего сигнала по каждому продукту, то среди матриц Π_j^x, $x = 1, \dots, 3^m$ для каждого j имеется лишь 2^m различных.

Поведение системы во времени описывается траекторией вида $\{(y(t), x(t))\}_{t=0}^{\infty}$. Для нас будут представлять интерес те траектории, которые обеспечивают перевод системы в некоторое специальное сбалансированное состояние.

Состояние системы $x(t)=(y(t), z(t))$ будем называть сбалансированным относительно заданного вектора конечной продукции $w=(w_1,\dots,w_m)$ и допустимой невязки баланса $\varepsilon=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_m)$, если выбранные "предприятиями" варианты производства обеспечивают выполнение баланса по всем продуктам, а управляющие сигналы "министерств" означают требование оставить объём производства всех продуктов на том же уровне:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} y_j^i(t)-w_i\right| \le \varepsilon_i, \tag{2}$$

$$z_i(t)=0, \tag{3}$$

$$(\text{для всех } i=1,\dots,m).$$

Множество сбалансированных относительно ε состояний обозначим через W_ε. Если выполнено только условие (2), то есть имеют место балансы по всем продуктам, а условие (3) нарушено, то такое состояние считается несбалансированным, поскольку сигналы $z_i(t)$ могут привести к нарушению условия баланса (2) для момента $t+1$.

Для исследования вопроса о сходимости произвольной траектории к сбалансированному состоянию представим процесс порождения траекторий в виде конечной марковской цепи. Поскольку число вариантов производства для всех "предприятий" и число управляющих сигналов "министерств" конечно, то и число возможных состояний рассматриваемой системы также конечно. Обозначим множество номеров этих состояний через θ. Так как матрицы P_j^i и $\mathcal{T}_j^z$ перехода от одного варианта производства к другому для всех "предприятий" и управляющих сигналов стационарны, то соответствующая марковская цепь является однородной.

Проиллюстрируем процесс построения марковской матрицы на примере варианта взаимодействия подсистем ($2a,\alpha$). Элементы $m_{\omega\rho}$ $(\omega,\rho\in\theta)$ марковской матрицы M для варианта $(2a,\alpha)$ вычисляются с помощью вектора вероятностей $(\delta_1,\dots,\delta_{n+e})$ вступления подсистем в активное состояние и матриц перехода $\mathcal{T}_j^z$ для всех j и z :

а) если состояния системы x_ω и x_ρ отличаются только вариантами производства s и q для одного из "предприятий" с номером j, то есть в векторах x_ω и x_ρ различны лишь подвекторы $y_j^{(\omega)}$ и $y_j^{(\rho)}$, то $m_{\omega\rho}=\delta_j \pi_{jsq}^{z}$, где z - номер вектора $(z_1^{(\omega)},\ldots,z_m^{(\omega)})$;

б) если состояния x_ω и x_ρ отличаются только управляющими сигналами "министерства" k, а $(y_1^{(\omega)},\ldots,y_n^{(\omega)})$ и $x_i^{(\rho)}\subset\Lambda_k$ связаны между собой соотношением (I), то $m_{\omega\rho}=\delta_{k+n}$. Если для них соотношение (I) не выполняется, то $m_{\omega\rho}=0$;

в) во всех остальных случаях $m_{\omega\rho}=0$, так как в каждый момент времени может находиться в активном состоянии только одна подсистема любого типа.

Для уточнения употребляемых ниже выражений "система переходит в сбалансированное состояние" и "система достигает сбалансированного состояния" сформулируем две простые теоремы.

ТЕОРЕМА I. Если $W_\varepsilon\neq\emptyset$, $\varepsilon>0$, $P_j^{i\rho}>0$, $i=1,\ldots,m$, $\rho=-1,0,1$, $j=1,\ldots,n$, $(\pi_j^{z}>0$, $z=1,\ldots,3^m$, $j=1,\ldots,n)$, то для любого начального состояния $x(0)$ и для любой реализации $\{x(t)\}_{t=0}^{\infty}$ марковского процесса:

I) найдётся такой момент времени $t^\circ<\infty$, зависящий от $\{x(t)\}_{t=0}^{\infty}$, что $x(t^\circ)\in W_\varepsilon$, то есть сбалансированное состояние достижимо;

2) не существует такого $\tau<\infty$, что $x(t)\in W_\varepsilon$, для всех $t\geq\tau$ (сбалансированное состояние неустойчиво).

Доказательство первого утверждения теоремы сводится к установлению того факта, что соответствующая марковская цепь, если матрицы перехода всех "предприятий" положительны, является эргодической, то есть из каждого состояния системы за конечное число шагов можно попасть в каждое другое состояние. Другими словами, существует число t такое, что $M^t>0$. Второе утверждение непосредственно вытекает из первого. Положительность матриц перехода "предприятий" означает, что директивные указания "министерств" могут в принципе не выполняться.

ТЕОРЕМА 2. Если $W_\varepsilon \neq \phi$, $\epsilon > 0$, $P_j^{i(0)} = E$, $P_j^{i(-1)}$, $P_j^{i(1)} > 0$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ ($\mathcal{K}_j^{\hat{x}} = E$, $\mathcal{K}_j^{x} > 0$, $j = 1, \ldots, n$ для всех $x \in \{1, \ldots, 3^m\} \setminus \hat{x}$, $\hat{x}$ - номер управляющего сигнала $(z_1, \ldots, z_m) = 0$), то для любого начального состояния $x(0)$ и для любой реализации $\{x(t)\}_{t=0}^{\infty}$ марковского процесса найдется такой момент времени $\tau < \infty$, что $x(t) \in W_\varepsilon$, для всех $t \geq \tau$ (система за конечное число шагов перейдет в сбалансированное состояние и останется в нём).

По условию теоремы матрицы $P_j^{i(0)}$ ($\mathcal{K}_j^{\hat{x}}$), $j = 1, \ldots, n$, являются единичными, иными словами, "предприятия" не могут изменять утвержденный "министерствами" план, то есть которому соответствует управляющий сигнал $(z_1, \ldots, z_m) = 0$.

Покажем, что соответствующая марковская цепь в этом случае является цепью с поглощением. Любое сбалансированное состояние системы в смысле определения (2 - 3) является поглощающим потому, что по условию теоремы, если управляющие сигналы предписывают "предприятиям" не изменять планы производства, то с вероятностью I в следующий момент времени "предприятия" будут иметь прежние варианты планов. Следовательно, ввиду того, что $W_\varepsilon \neq \phi$, марковская цепь имеет хотя бы одно поглощающее состояние, положительность матриц $P_j^{i(-1)}$, $P_j^{i(1)}$; $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ ($\mathcal{K}_j^{x}$, $j = 1, \ldots, n$, $x \in \{1, \ldots, 3^m\} \setminus \hat{x}$), обеспечивает возможность перехода в поглощающее сбалансированное состояние из любого другого состояния за конечное число шагов и отсутствие поглощающих, но несбалансированных состояний. Тогда утверждение теоремы следует из свойств марковских цепей с поглощением [4].

Число периодов времени τ мы будем называть временем перехода системы в сбалансированное состояние.

Сформулированные теоремы дают условия (наиболее естественные, но не необходимые), при которых система "достигает" сбалансированного состояния (теорема I) или "переходит" в сбалансированное состояние (теорема 2). Термин "достигает" здесь означает, что система может выйти из сбалансированного состояния, а термин "переходит" говорит о том, что система обязательно остается в достигнутом состоянии и дальше.

Аналитическое определение среднего времени перехода в сбалансированное состояние по матрице перехода марковской цепи сопряжено с большими трудностями. Поэтому сравнение различных вариантов модели взаимодействия мы будем осуществлять экспериментально, производя расчеты по модели на ЭВМ. Выше были рассмотрены различные процедуры перехода системы из одного состояния в другое, отличающиеся алгоритмами функционирования "предприятий" - (Iа, Iб, 2а, 2б) и способами задания последовательности - (α или β). Таким образом, могут быть изучены восемь различных типов траекторий, порождённых этими процедурами.

Рассматриваемые варианты модели взаимодействия в двухуровневой системе были реализованы на ЭВМ "Минск-22" по программе, написанной на алгоритмическом языке FORTRAN и состоящей для любого варианта модели из четырёх подпрограмм: I) подпрограмма "предприятия", 2) подпрограмма "министерства", 3) генератор случайных чисел, 4) координирующая программа. Исходная информация для модели задавалась в соответствии с условиями теоремы 2. Таким образом, переход системы в сбалансированное состояние за конечное число шагов гарантируется. Эффективность различных механизмов взаимодействия оценивалась величиной τ , то есть средним по серии экспериментов количеством периодов времени, необходимым для перевода системы в сбалансированное состояние.

Проведенные расчеты показали, что алгоритмы функционирования "предприятий" Iа и 2а являются более эффективными, чем Iб и 2б, соответственно, так как управляющая информация в первом случае оказывается более полной. "Предприятиям" не только сообщается об отсутствии баланса по какому-либо продукту, но и даются директивы с требованием увеличить или уменьшить его производство.

Варианты / Параметры эксперимента	α				β			
	I		2		I		2	
	а	б	а	б	а	б	а	б
$\tau = n/2$, $\gamma_j = 1/n$, $j = 1,\dots,n$; $\delta_k = 1/(n+l)$, $k = 1,\dots,n+l$	-	-	I.87	-	I.5I	I.92	I.00	I.5I
$\tau = n/4$, $\gamma_j = 1/n$, $j = 1,\dots,n$; $\delta_k = 1/(n+3l)$, $k = 1,\dots,n$; $\delta_k = 3/(n+3l)$, $k = n+1,\dots,n+l$	2.15	2.90	I.76	2.15	I.54	I.98	I.05	I.54

Рис. I. Сравнительная эффективность различных вариантов механизма взаимодействия (τ/τ_{min}). (прочерк означает, что за тот период времени, в течение которого наблюдался данный вариант траектории системы, сбалансированное состояние не было достигнуто).

Одновременная переработка поступающей на вход "предприятия" информации, как это предусмотрено в алгоритмах 2а и 2б, также обеспечивает более быстрое приближение системы к сбалансированному состоянию, чем в случаях Iа и Iб. Действительно, при прочих равных условиях дополнительные сведения и директивы, если они соответствуют целям системы и могут быть эффективно использованы "предприятием", улучшают результаты функционирования системы.

Способ задания последовательности номеров функционирующих в каждый момент времени подсистем α дает большее время перехода, чем способ β , из-за нерегулярности пересмотра и корректировки "министерствами" управляющих сигналов. Но расчеты по способу β при $\tau = n$ показали очень большое время перехода потому, что управляющие сигналы быстро устаревают относительно изменяющихся планов "предприятий". В этом случае функционируют последовательно все "министерства", а затем все "предприятия" при сигнале о дефиците какого-либо продукта не только ликвидируют дефицит, но и обеспечивают избыток этого продукта в системе к тому моменту времени, когда соответствующее "министерство" составит баланс и скорректирует управляющий сигнал. При $\tau = 1$ время перехода также велико из-за чрезмерно частой корректировки управляющих сигналов. При $\tau = n/2$ достигнуты наилучшие результаты. Проведенные расчеты показали, что соотношение эффективности различных вариантов сохраняется при любом начальном состоянии системы. В частном случае матрицы перехода $P_j^i(\pi_j^z)$ "предприятий" могут состоять только из нулей и единиц, тогда переход системы в сбалансированное состояние для произвольных детерминированных матриц перехода не гарантирован, однако, как показали эксперименты, переход системы в сбалансированное состояние возможен для детерминированных матриц перехода некоторого специального вида.

Рассмотренные модели могут быть усложнены путем детализации алгоритмов функционирования подсистем. Например, множества Z_k $(k=1,\dots,l)$ возможных управляющих сигналов "министерств" могут состоять из большего числа допустимых сигналов, в том числе и из объемных показателей по выпуску или затратам определенных продуктов.

В заключение автор пользуется случаем, чтобы выразить свою благодарность В.Л.Макарову за постановку задачи и помощь в работе над этой статьёй.

Литература

1. ПОЛТЕРОВИЧ В.М. Некоторые модели перераспределения ресурсов. М., ЦЭМИ., 1970. с. 5-24.
2. ЦЕТЛИН М.Л. Исследования по теории автоматов и моделированию биологических систем. М., "Наука", 1969. 316 с.
3. МОРРИС У. Наука об управлении. Байесовский подход. М., "Мир", 1971. 304 с.
4. КАРЛИН С. Основы теории случайных процессов. М., "Мир", 1971. 536 с.

Поступила в ред.-изд. отд.
19. XII. 1972 г.