УДК 658.012.122

О СХОДИМОСТИ АЛГОРИТМА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ В ОТРАСЛИ

В.Д.Маршак

§ 1. Постановка задачи

В настоящей работе рассматривается вопрос о сходимости алгоритма определения оптимального плана отрасли, когда отраслевая задача в целом представляется как матрица с диагональными блоками, связанными между собой общими ограничениями по ресурсам и общим вектором конечного выпуска отрасли, интенсивность использования которого следует максимизировать. Подробное описание и экономическую интерпретацию алгоритма можно найти в [1]. Как процесс управления и планирования развитием отраслевой системы данный алгоритм описывает взаимодействие центрального органа и подотраслей (объединений, предприятий) в процессе составления общеотраслевого оптимального плана. Центральный орган не располагает информацией о производственных возможностях подотраслей. Распределение ресурсов между подотраслями проводится, исходя из значений небольшого числа управляющих параметров - оценок ресурсов и уровней производства конечной продукции.

Пусть оптимальный план отрасли определяется как результат решения следующей задачи линейного программирования:

определить вектор $X=(X_1,\dots,X_\ell)$ и число Z при условиях:

$$X_k \geq 0, \quad k=1,\dots,\ell, \tag{1}$$

$$\Phi_k X_k \leq N_k,$$

$$
\begin{gathered}
A_K X_K - d_K Z \geq 0, \\
\sum_K R_K X_K \leq b, \\
Z \to max
\end{gathered}
\tag{I}
$$

Здесь:

$X_K = \{x_{j_K}\}$, $j_K = 1_K, \ldots, S_K$, – вектор интенсивностей подотрасли K;

Z – интенсивность использования ассортиментного набора конечной продукции отрасли;

Φ_K – матрица коэффициентов использования производственных мощностей технологическими способами подотрасли при единичной интенсивности их использования;

A_K – матрица коэффициентов выпуска продукции технологическими способами подотрасли K, при единичной интенсивности их применения;

R_K – матрица коэффициентов использования общих для всей отрасли ресурсов технологическими способами подотрасли K, при единичной интенсивности их использования;

$d = (d_1, \ldots, d_\ell)$ – заданный ассортиментный набор выпуска конечной продукции отрасли, $d_K = (d_{1_K}, \ldots, d_{n_K})$;

$$\sum_{i_K = 1_K}^{n_K} d_{i_K} = \lambda_K; \quad \sum_K \lambda_K = 1;$$

N_K – вектор ограничений по производственным мощностям подотрасли K;

$b = (b_1, \ldots, b_n)$ – вектор ограничений по общим ресурсам.

В результате решения задачи (I) будет определено искомое распределение ресурсов между подотраслями при условии, что данная модель будет решаться как единая задача линейного программирования. На практике решение такой задачи невозможно из-за её большой размерности. Кроме того, как уже отмечалось выше, необходимо рассматривать решение задачи (I) как результат взаимодействия центрального органа и подсистем в условиях обмена информацией только о значениях управляющих параметров системы в целом.

Рассмотрим подход к решению задачи распределения ресурсов в отрасли, когда центральный орган не располагает информацией о производственных возможностях подотраслей и управляет их развитием на основе получаемых данных об эффективности выделенных централизованных ресурсов (оценки ресурсов и достигнутый уровень производства конечной продукции). Пусть план развития каждой подотрасли k определяется в результате решения следующей задачи:

определить вектор $X_k = \{x_{j_k}\}, j_k = 1_k, \ldots, S_k$, и число Z_k при условиях:

$$
\begin{aligned}
& X_k \geq 0, \\
& \Phi_k X_k \leq N_k, \\
& A_k X_k - d_k Z_k \geq 0, \\
& R_k X_k \leq C_k, \\
& \lambda_k Z_k \to \max,
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

где $C_k = (C_{1k}, \ldots, C_{nk})$ – вектор ограничений по общим ресурсам вида i (i =I,..., n), определенный из решения задачи (I). Решение ℓ задач вида (2) при ограничениях C_k дает решение задачи (I).

Оптимальный план, полученный в результате решения задачи (I), обладает тем свойством, что общий уровень выпуска конечной продукции (Z) будет максимальным и одним и тем же для всех подотраслей. Следовательно, при решении совокупности задач подотраслей необходимо так распределить общие ресурсы b_i (i =I,...,n), чтобы достигался максимальный и равный для всех задач вида (2) уровень выпуска конечной продукции в общеотраслевом наборе.

§ 2. Описание алгоритма

Реализация алгоритма возможна, начиная с любого допустимого распределения общих ресурсов – b_i (i =I,..., n). При практических расчетах начальное значение размеров ресурсов – $C_{ik(1)}$, i =I,..., n, k =I,..., ℓ, определялось пропорционально насыщающей потребности в них по подотраслям – V_{ik}, т.е.

$$C_{ik(1)} = \frac{b_i}{\sum\limits_k V_{ik}} V_{ik} .$$

Поскольку первый шаг алгоритма не отличается от всех последующих по всем процедурам перераспределения ресурсов, то остановимся сразу же на описании γ шага реализации алгоритма.

Имеются: b_i, $C_{ik}(\gamma-1)$, $Z_k(\gamma-1)$ и оценки общих ресурсов по планам задач (2) на предыдущем шаге $-\mathcal{R}_{ik}(\gamma-1)$, $i=1,\dots,n$, $k=1,\dots,\ell$.

1. Определяется наиболее дефицитный ресурс для всей системы задач (2). Таковым будет являться ресурс с номером $i=\mu(\gamma-1)$, для которого достигает максимума величина суммарного разброса оценок по планам задач (2), т.е.

$$\max_{i}\sum_{k}\left(\mathcal{R}_{ik}(\gamma-1)-\min_{k}\mathcal{R}_{ik}(\gamma-1)\right). \qquad (3)$$

2. Определяется размер ресурса $\bar{C}_{\mu k}(\gamma-1)$, необходимый для выполнения каждой подотраслью k допустимой для всей системы задач (2) интенсивности выпуска общего набора $-\min_{k} Z_k(\gamma-1)$:

$$\bar{C}_{\mu k}(\gamma-1)=C_{\mu k}(\gamma-1)\,\frac{\min_{k} Z_k(\gamma-1)}{Z_k(\gamma-1)},\ k=1,\dots,\ell. \qquad (4)$$

3. Определяется количество ресурса вида $i=\mu(\gamma-1)$, которое необходимо перераспределить между подотраслями:

$$\Delta b_\mu(\gamma-1)=b_\mu-\sum_{k}\bar{C}_{\mu k}(\gamma-1). \qquad (5)$$

4. Вычисляется $\Delta C_{\mu k}(\gamma-1)$ – количество ресурса $\Delta b_\mu(\gamma-1)$, выделяемое для подотрасли k:

$$\Delta C_{\mu k}(\gamma-1)=\frac{\Delta b_\mu(\gamma-1)}{\sum_{k} 1/\mathcal{R}_{\mu k}(\gamma-1)}\cdot\frac{1}{\mathcal{R}_{\mu k}(\gamma-1)},\ k=1,\dots,\ell. \qquad (6)$$

5. Определяется $C_{ik}(\gamma)$ – количество ресурса вида i, выделяемое подотрасли k на γ шаге реализации алгоритма:

$$C_{ik}(\gamma)=\begin{cases} C_{ik}(\gamma-1), & \text{если } i\neq\mu(\gamma-1),\\ \bar{C}_{\mu k}(\gamma-1)+\Delta C_{\mu k}(\gamma-1), & \text{если } i=\mu(\gamma-1). \end{cases} \qquad (7)$$

6. Решаются ℓ задач (2) при ресурсах $C_{ik}(\gamma)$. В результате решения получаются значения $Z_k(\gamma)$, $\mathcal{R}_{ik}(\gamma)$, $i=1,\dots,n$, $k=1,\dots,\ell$.

7. По заданному критерию точности реализации алгоритма проверяется результат решения задач (2) :

процесс завершён, если

$$\frac{\max\limits_{K} Z_K(\gamma) - \min\limits_{K} Z_K(\gamma)}{\min\limits_{K} Z_K(\gamma)} \leqslant \varepsilon , \tag{8}$$

в противном случае процесс следует продолжить.

§ 3. Оценка предела

В работе [I] при рассмотрении алгоритма распределения ресурсов в отрасли было показано, что получаемая последовательность значений допустимого для всей системы задач (2) уровня выпуска конечной продукции - $\{\min\limits_{K} Z_K(\gamma)\}$, γ =I,..,∞, является строго возрастающей, ограниченной и, следовательно, сходящейся к некоторому положительному числу P . Было также доказано, что если на некотором шаге $\gamma = \alpha$

$$\min\limits_{K} Z_K(\alpha) = P ,$$

то

$$Z_1(\alpha) = \ldots = Z_\ell(\alpha) = P . \tag{9}$$

Рассмотрим случай, когда распределяется один общий ресурс.

Пусть на некотором шаге $\gamma = \alpha$ выполняется условие (9). В результате решения задач (2) на шаге $\gamma = \alpha$ получены оценки оптимальных планов этих задач:

$y_{j_K}(\alpha)$ - оценка ограничений по производственным мощностям, используемых способом j в подотрасли K ,

$p_{i_K}(\alpha)$ - оценка выпускаемого продукта вида i подотрасли K ,

$i_K = 1_K , \ldots , n_K$;

$\mathcal{R}_K(\alpha)$ - оценка общего ресурса в подотрасли K .

Для каждого способа j подотрасли K , вошедшего в оптимальный план, на шаге $\gamma = \alpha$ выполняется условие, что

$$-y_{j_K}(\alpha) - \sum_{i_K=1_K}^{n_K} a_{i_K} p_{i_K}(\alpha) - c_{j_K} \mathcal{R}_K(\alpha) = 0 , \; K = 1, \ldots , \ell . \tag{10}$$

На шаге $\gamma = \alpha$, когда выполняется условие (9), возможны два случая:

I. Когда по планам всех задач (2) оценки общего ресурса $\mathcal{T}_K(\alpha) > 0$, $K = 1, \ldots, \ell$.

Разделим равенства (10) покомпонентно на $\mathcal{T}_K(\alpha)$. Тогда

$$-y_{j_K}(\alpha) \cdot \frac{1}{\mathcal{T}_K(\alpha)} + \sum_{i_K=1_K}^{n_K} a_{i_K} p_{i_K}(\alpha) \cdot \frac{1}{\mathcal{T}_K(\alpha)} - c_{j_K}(\alpha) = 0, \; K = 1, \ldots, \ell. \quad (11)$$

По оценкам задач (2) на шаге $\gamma = \alpha$ для способов создания наборов имеет место условие, что

$$\sum_{i_K=1_K}^{n_K} d_{i_K} \cdot p_{i_K}(\alpha) = \lambda_K, \quad \sum_K \lambda_K = 1.$$

В новых оценках, нормированных по оценкам ресурса, выполняется условие, что

$$\sum_{i_K=1_K}^{n_K} d_{i_K} \frac{p_{i_K}(\alpha)}{\mathcal{T}_K(\alpha)} = \frac{\lambda_K}{\mathcal{T}_K(\alpha)}, \quad K = 1, \ldots, \ell,$$

и для общего набора для всей системы задач (2):

$$\sum_{K=1}^{\ell} \sum_{i_K=1_K}^{n_K} d_{i_K} \frac{p_{i_K}(\alpha)}{\mathcal{T}_K(\alpha)} = \sum_{K=1}^{\ell} \frac{\lambda_K}{\mathcal{T}_K(\alpha)}. \quad (12)$$

Разделив оценки в равенствах (11) и (12) на величину $\Delta(\alpha) = \sum_K \frac{\lambda_K}{\mathcal{T}_K(\alpha)}$, имеем:

$$-\frac{y_{j_K}(\alpha)}{\mathcal{T}_K(\alpha)\,\Delta(\alpha)} + \sum_{i_K=1_K}^{n_K} a_{i_K} \frac{p_{i_K}(\alpha)}{\mathcal{T}_K(\alpha)\,\Delta(\alpha)} - c_{j_K} \cdot \frac{1}{\Delta(\alpha)} = 0, \; K = 1, \ldots, \ell,$$

$$\sum_{K=1}^{\ell} \sum_{i_K=1_K}^{n_K} d_{i_K} \frac{p_{i_K}(\alpha)}{\mathcal{T}_K(\alpha)\,\Delta(\alpha)} = 1.$$

Следовательно, на шаге $\gamma = \alpha$, когда выполняется условие (9), существует вектор оценок $\varphi(\alpha)$:

$$\varphi(\alpha) = \left(\frac{y_{1_1}(\alpha)}{\mathcal{T}_K(\alpha)\,\Delta(\alpha)}, \ldots, \frac{y_{s_\ell}(\alpha)}{\mathcal{T}_K(\alpha)\,\Delta(\alpha)}, \frac{p_{1_1}(\alpha)}{\mathcal{T}_K(\alpha)\,\Delta(\alpha)}, \ldots, \frac{p_{n_\ell}(\alpha)}{\mathcal{T}_K(\alpha)\,\Delta(\alpha)}, \frac{1}{\Delta(\alpha)} \right),$$

согласно которому во всей системе задач (2) нет ни одного способа, который мог бы увеличить значение общего функционала, равное P. Другими словами, на шаге $\gamma = \alpha$ получено решение задачи (I), и, следовательно, $P = \bar{Z}$, где $\bar{Z}$ - значение функционала общей задачи (I).

2. На шаге $\gamma = \alpha$ возможен также случай, когда по планам некоторых подотраслей оценка общего ресурса будет равна нулю.

Пусть по плану некоторой подотрасли $k = q$, $\pi_q(\alpha) = 0$. Это означает, что в целом по отрасли имеется свободный остаток централизованного ресурса ($\Delta b(\alpha) > 0$), который не может быть использован для выпуска продукции в общеотраслевом ассортименте, т.к. в подотрасли $k = q$ использованы полностью все имеющиеся производственные мощности. Следовательно, общеотраслевая оценка ресурса в этом случае будет равна нулю.

Для оценки предела последовательности $\{\min_k Z_k(\gamma)\}$, $\gamma = I, \ldots, \alpha$, достигаемого на некотором шаге $\gamma = \alpha$, когда выполняется условие (9) и $\pi_q(\alpha) = 0$, рассмотрим, как и в первом случае, равенства (10).

Условие оптимальности для способов, вошедших в план задач всех подотраслей с номерами $k \neq q$, будет выполняться и при оценках:

$$y_{j_k}(\alpha) = 0,\ j_k = 1_k, \ldots, S_k;\ p_{i_k}(\alpha) = 0,\ i_k = 1_k, \ldots, n_k;\ k \neq q;\ \pi_k(\alpha) = 0,\ k = 1, \ldots, \ell.$$

Тогда можно утверждать, что и в случае, когда по плану некоторой подотрасли $k = q$, $\pi_q(\alpha) = 0$, существует общий вектор оценок для всей системы задач (2) - $\bar{\varphi}(\alpha)$, согласно которому нет ни одного способа во всей системе задач подотраслей, который мог бы увеличить достигнутое значение общего функционала, равное P.

Вектор общих оценок $\bar{\varphi}(\alpha)$ таков, что оценки всех мощностей и продуктов для всех подотраслей $k \neq q$ равны нулю, оценки мощностей и продуктов подотрасли $k = q$ взяты из её плана на шаге $\gamma = \alpha$, оценка общего ресурса равна нулю.

Таким образом, и во втором случае (когда $\pi_q(\alpha) = 0$) на шаге $\gamma = \alpha$ получено решение задачи (I), и, следовательно, $P = \bar{Z}$.

Экспериментальные расчёты по распределению общих ресурсов по описанному выше алгоритму проводились на задачах с производственными способами, выпускающими несколько общих данной подотрасли продуктов и использующих несколько видов ресурсов. Результаты расчетов показали, что и в этих случаях достигается решение общей задачи (I) с точностью до заданного ε .

Литература

I. МАРШАК В.Д. Алгоритм решения задачи распределения ресурсов в отрасли. - "Оптимизация", Новосибирск, "Наука", 1973, I0(27).

Поступила в ред.-изд. отд.
4. VI. 1973 г.