УДК 51.330 : 115

БАЛАНС НАУЧНЫХ РАЗРАБОТОК И АЛГОРИТМ ЕГО РЕШЕНИЯ

В.Л.Макаров

Для разработки какой-либо научной темы необходимо, как правило, привлекать результаты других тем. Это относится как к прикладным, так и к теоретическим исследованиям. Поэтому при планировании научных исследований приходится учитывать взаимную зависимость отдельных разработок как внутри той или иной отрасли науки, так и между отраслями. Эта ситуация в какой-то степени аналогична производственной, описываемой с помощью межотраслевого баланса, где также для производства продукции какой-либо отрасли необходима продукция других отраслей. Однако существенная разница состоит в следующем. Затрачиваемая в производстве продукция не может использоваться еще где-то, ибо она используется "до конца". При "производстве" знаний картина несколько другая. Для того, чтобы разработать тему, нужно предварительно разработать другие темы, но результаты этих других тем, в отличие от продукции, могут использоваться сколько угодно раз.

В настоящей работе формулируется и изучается баланс научных тем, который в силу отмеченных обстоятельств похож на межотраслевой баланс производства и распределения продукции, но имеет и существенные отличия.

Идея постановки задачи баланса научных тем была высказана автору в личной беседе Л.В.Канторовичем.

§ I. Формулировка простейшей задачи баланса научных разработок

Будем считать, что имеется конечное число n научных тем. В списке тем могут быть наименования разработок как теоретического, так и прикладного характера. Аналогом количества продукции является уровень разработки темы. Этот уровень измеряется в некоторых (условных) единицах. Вопрос о практическом измерении уровня разработки тем здесь не обсуждается. Имеющийся к моменту разработки баланса уровень всех тем обозначается через $x=(x_1,\dots,x_n)$.

Введем в рассмотрение набор функций $\{\gamma_{ij}(x,z)\}$, $i,j=1,\dots,n$, являющихся аналогами коэффициентов a_{ij} в межотраслевом балансе производства и распределения продукции. Число $\gamma_{ij}(x,z)$ показывает величину прироста над уровнем x_j темы j, необходимую для обеспечения прироста z над уровнем x_i темы i. В соответствии с этим смыслом функций γ полагаем $\gamma_{ii}(x,z)=z$ для всех x и z. Вопрос о характере зависимости значений $\gamma_{ij}(x,z)$ от всех аргументов обсуждается ниже (§ 3). Для простейшей статической постановки баланса вообще не важно, какова зависимость от x, так как в ней x фиксировано. При доказательстве сходимости алгоритма решения этой простейшей постановки задачи (§ 2) предполагается, например, что функции γ_{ij} линейны по z.

Аналогом величин конечного продукта в балансе научных разработок является прирост уровней тем $y=(y_1,\dots,y_n)$, задаваемый внешними требованиями. Дело в том, что поскольку в перечне тем имеются прикладные, то необходимые уровни их разработки определяются планами производства в части повышения производительности труда, внедрения новой техники и т.п., то есть внешними по отношению к балансу научных разработок планами.

Задача баланса научных разработок в простейшей постановке состоит в следующем. Требуется определить наименьший прирост всех тем Δx над заданным уровнем x, который обеспечивает заданный внешними условиями прирост y, то есть найти Δx такой, что

$$\Delta x_j = \max_i \gamma_{ij}(x,\Delta x_i),\ j=1,\dots,n, \tag{1}$$

$$\Delta x \geq y, \tag{2}$$

$$\Delta x \text{ лежит на границе Парето.} \qquad (3)$$

Условие (3) означает, что решением является такой Δx, у которого ни одну компоненту нельзя уменьшить, не нарушив соотношений (I) - (2).

Эта задача аналогична простейшей задаче межотраслевого баланса: найти вектор объемов выпусков x, обеспечивающий конечный продукт y:

$$x_i - \sum_j a_{ij} x_j = y_i, \quad i = 1, \ldots, n. \qquad (4)$$

Подобно тому, как обычно усложняется задача (4), можно усложнить и задачу (I) - (3), см. об этом § 3.

§ 2. Алгоритм решения задачи (1) - (3)

Алгоритм порождает последовательность $\{\Delta x^{(k)}\}$ приростов уровней тем, где $\Delta x^{(0)} = y$, следующим образом

$$\Delta x_j^{(k+1)} = \max_i \gamma_{ij}(x, \Delta x^{(k)}), \; j = 1, \ldots, n. \qquad (5)$$

Исследуем случай, когда функции γ_{ij} линейны по z. Поскольку в рассматриваемой постановке задачи аргумент x фиксирован, то его можно опустить. Тогда вместо набора функций $\{\gamma_{ij}\}$ будем иметь матрицу $A = \|a_{ij}\|$, где коэффициент a_{ij} показывает величину прироста уровня темы j, необходимую для обеспечения единичного прироста темы i. С матрицей A связан ориентированный граф Γ_A, вершинами которого являются номера строк матрицы A. Из вершины i в вершину j имеется стрелка, если $a_{ij} > 0$.

Матрица A называется продуктивной, если для любого цикла $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ графа Γ_A $a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_3} \cdot \ldots \cdot a_{i_{k-1} i_k} \cdot a_{i_k i_1} \leq 1$.

Термин продуктивная матрица позаимствован из теории межотраслевого баланса, где продуктивной называется матрица A, для которой существует x° такой, что $x^\circ > x^\circ A$. В нашем определении не требуется строгого неравенства (< 1), и это имеет соответствующий смысл, который разъясняется ниже. Понятие продуктивности матрицы A удобно несколько дополнить для случая, когда граф Γ_A несвязен. А именно, можно говорить о продуктивности для каждого связного подграфа Γ_A. Если A продуктивна для некоторого связного подграфа из Γ_A, то будем говорить, что A продуктивна относительно тем $i_1, \dots, i_K$, где $i_1, \dots, i_K$ – номера всех вершин рассматриваемого подграфа.

ТЕОРЕМА. Задача (1) – (3) в случае линейных по z функций γ_{ij} имеет решение тогда и только тогда, когда матрица A продуктивна относительно тех номеров тем, у которых соответствующие компоненты в векторе y положительны. Процесс (5) при этом дает решение за конечное число шагов. Если матрица A не является продуктивной относительно какой-либо положительной компоненты вектора y, то процесс (5) порождает последовательность с неограниченно возрастающими членами.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем доказывать теорему для связного графа Γ_A, так как утверждение теоремы для несвязного графа есть простое объединение утверждений для связных подграфов.

I. Пусть A продуктивна. Рассмотрим последовательность $\{\Delta x_j^{(K)}\}$, порожденную процессом (5). Распишем процесс вычисления числа $\Delta x_j^{(K)}$ следующим образом:

$$\Delta x_j^{(K)} = y_{i_1^{(K)}} \cdot a_{i_1^{(K)} i_2^{(K)}} \cdot a_{i_2^{(K)} i_3^{(K)}} \cdot, \dots, a_{i_{K-1}^{(K)} j} . \quad (6)$$

Поскольку число компонент вектора y конечно, то найдется такая подпоследовательность $\{K(s)\}$, что $y_{i_1^{(K(s))}} = y_{i_1}$ для всех S и некоторого y_{i_1}. Далее, из определения процесса (5) непосредственно следует, что если расписать $\Delta x_j^{(K(s))}$ и $\Delta x_j^{(K(s'))}$ $(s<s')$ согласно выражению (6), то первые $K(s)$ сомножителей у них будут совпадать. Поэтому

$$\Delta x_j^{(K(s+1))} = \Delta x_j^{(K(s))} \cdot a_{i_{K(s)} i_{K(s)+1}} \cdot a_{i_{K(s)+1} i_{K(s)+2}} \cdot, \dots, a_{i_{K(s+1)} j} \quad (7)$$

Покажем теперь, что либо $\Delta x_j^{(K(s+1))}$ и $\Delta x_j^{(K(s))}$ совпадают, либо отличаются друг от друга не меньше чем на некоторое фиксированное число $\varepsilon > 0$. Действительно, согласно (7) $\Delta x_j^{(K(s+1))}$ получается из $\Delta x_j^{(K(s))}$ умножением на некоторое произведение Π элементов матрицы A. Причем поскольку $\Delta x_j^{(K(s+1))} \geq \Delta x_j^{(K(s))}$, то $\Pi \geq 1$. Каждому циклу с номером графа Γ_A сопоставим число α_p, являющееся произведением элементов матрицы, составляющих цикл. В силу продуктивности матрицы A $\alpha_p \leq 1$ для всех p. Составляя из элементов матрицы A произведения не более чем $n-1$ сомножителей, получим конечный набор чисел. Возьмем и перенумеруем те из них, которые больше единицы. Пусть β_q – такое число с номером q. Теперь любое произведение $\Pi \geq 1$ можно представить в виде выражения

$$\Pi = \alpha_1^{\sigma_1} \cdot \alpha_2^{\sigma_2}, \ldots, \cdot \alpha_P^{\sigma_P} \cdot \beta_q , \qquad (8)$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_P = 0,1,2,\ldots$, $q = 1,2,\ldots Q$. Из этого выражения можно исключить те α_p, которые равны единице. Так как Q конечно, т.е. существует максимальное β_q, и так как можно считать, что все $\alpha_p < 1$, то найдется такое, быть может, достаточно большое число N, обладающее следующим свойством. Если хотя бы одно $\sigma_p > N$, то $\Pi < 1$. Отсюда сразу вытекает, что число бóльших единицы значений Π, удовлетворяющих выражению (8), конечно, так как конечно число возможных значений σ_p $(p=1,\ldots,P)$ и q. Среди этих значений Π выберем наименьшее, обозначим его через δ. Тогда искомое число ε вычисляется по формуле $\varepsilon = y_{i_1} \cdot (\delta - 1)$.
Существует также верхняя граница для максимальной разницы $\Delta x_j^{(K(s'))} - \Delta x_j^{(K(s))}$, каковы бы ни были s' и s, $s' > s$. Эта верхняя граница равна максимальному из чисел β_q. Из существования этой верхней границы и существования минимальной разницы ε непосредственно вытекает, что найдется такое число s_0, начиная с которого все числа $\Delta x_j^{(K(s))}$ одинаковы. Но если они одинаковы, то одинаковы также, начиная с $K(s_0)$, и все числа $\Delta x_j^{(K)}$, поскольку последовательность $\{\Delta x_j^{(K)}\}$ не убывающая.

Итак, поскольку номер j был взят произвольно, то доказано существование числа $\mathcal{K}$, начиная с которого последовательность $\{\Delta x^{(K)}\}$ не изменяется.

Покажем теперь, что $\Delta x^{(\mathcal{K})} = \Delta \bar{x}$ является решением задачи (1) – (3). Соотношения (1) – (2) выполняются для $\Delta \bar{x}$, по определению. Поэтому нужно показать лишь, что для $\Delta \bar{x}$ имеет место (3). Предположим противное, то есть пусть существует $\Delta \tilde{x}$ удовлетворяющий (1) – (2), и $\Delta \tilde{x} \leq \Delta \bar{x}$, $\Delta \tilde{x} \neq \Delta \bar{x}$. Найдем номер $\bar{k}$ шага процесса (5), на котором впервые оказалось $\Delta x^{(\bar{k})} \geq \Delta \tilde{x}$. Пусть для номера j

$$\Delta x_j^{(\bar{k}+1)} > \Delta \tilde{x}_j \ . \tag{9}$$

По определению, $\Delta x_j^{(\bar{k}+1)} = \max_i \left(a_{ij} \cdot \Delta x_i^{(\bar{k})} \right)$,

$$\Delta \tilde{x}_j = \max_i \left(a_{ij} \ \Delta \tilde{x}_j \right) .$$

Так как $\Delta \tilde{x}_i \leq \Delta x_i^{(\bar{k})}$ для всех i, то неравенство (9) невозможно. Таким образом, $\Delta \bar{x}$ удовлетворяет и соотношению (3).

II. Пусть теперь A не является продуктивной матрицей. Это означает, что в графе Γ_A существует такой цикл (i_1, $i_2, \ldots, i_K$), что $a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_3} \cdot \ldots \cdot a_{i_K i_1} > 1$. Рассмотрим последовательность $\{\Delta x^{(k)}\}$, порожденную процессом (5), начинающимся с вектора y, у которого все компоненты нулевые, за исключением компоненты с номером i_1, которая равна единице. Имеем $\Delta x_{i_2}^{(1)} \geq a_{i_1 i_2}$, $\Delta x_{i_3}^{(2)} \geq a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_3}$, $\ldots, \Delta x_{i_1}^{(k)} \geq a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_3} \cdot \ldots \cdot a_{i_k i_1} > 1$, то есть $x_{i_1}^{(k)} \geq y_{i_1} \cdot \Pi$, где $\Pi > 1$. Рассуждая аналогичным образом для шага $2K$, получим $x_{i_1}^{(2k)} \geq y_{i_1} \cdot \Pi \cdot \Pi$ и т.д. Таким образом, последовательность $\{\Delta x^{(k)}\}$ имеет неограниченно возрастающие члены, что и требовалось доказать.

Доказанная теорема очевидным образом обобщается на случай вогнутых по z функций $\gamma_{ij}(x, z)$, для которых выполняются следующие условия.

(а) Для заданного уровня разработки тем x в точке $z = 0$ существуют частные производные $\partial \gamma_{ij} / \partial z = a_{ij} \geq 0$ для всех i, j.

(б) Матрица $A = \| a_{ij} \|$, составленная из значений этих частных производных, удовлетворяет условиям теоремы.

§ 3. Динамический баланс научных разработок

Рассмотренная выше простейшая задача статического баланса научных разработок распространяется здесь на динамический случай. При этом аналогия с межотраслевым балансом производства и распределения продукции сохраняется. В динамической постановке последнего связь между годовыми балансами осуществляется с помощью производственных фондов отраслей. В динамическом балансе научных разработок эта связь реализуется посредством уровней разработки тем, которые наращиваются подобно фондам.

Постановка простейшей задачи динамического баланса научных разработок такова. Заданы набор функций $\{\gamma_{ij}\}$, начальные уровни всех тем $x(0)$ и уровни разработки выходных (конечных) тем по годам $y(1)$, $y(2), \ldots, y(T)$, которые необходимо достигнуть. Требуется определить уровни разработки всех тем по годам $x(1), \ldots, x(T)$ или годовые приросты уровней $\Delta x(1), \ldots, \Delta x(T)$, удовлетворяющие условиям:

$$\Delta x_j(t) = \max_i \gamma_{ij}(x(t-1), \Delta x_i(t)), \tag{10}$$

$$x(t) = x(t-1) + \Delta x(t), \tag{11}$$

$$x(t) \geq y(t) \tag{12}$$

для всех $t = 1, 2, \ldots, T$.

$(\Delta x(1), \ldots, \Delta x(T))$ лежит на границе Парето. (13)

Вариант этой простейшей постановки задачи состоит в том, что $y(t)$ могут задаваться не для всех t, а только для некоторых, например, для $t = T$.

Если функции γ_{ij} линейны по всем аргументам, то задача (10)-(13) решается посредством последовательного решения однопериодных задач, начиная с $t = 1$. Более того, решение всей задачи можно получить, лишь один раз решая следующую однопериодную задачу: найти Δx из условий:

$$\Delta x_j = \max_i \gamma_{ij}(x(0), \Delta x_i),$$

$$x(0) + \Delta x \geq \max_t y(t),$$

Δx лежит на границе Парето.

Тогда решение задачи (I0) - (I3) определяется так: $x(t) = x(0)+\Delta x$ для всех t.

В действительности же предположение о линейности функций γ_{ij} нереально при динамической постановке задачи. Дело в том, что функция γ_{ij} относится к единичному временному интервалу (году). Число $\gamma_{ij}(x,z)$ показывает величину прироста уровня темы j над x_j для того, чтобы уровень x_i возрос на величину z в течение года. Для повышения уровня x_i на z в течение, скажем, двух лет требуемый уровень разработки темы j, как правило, ниже чем $x_j+\gamma_{ij}(x,z)$. Во всяком случае естественно считать, что выполняется неравенство $x_j+\gamma_{ij}(x,z) \geq x_j+\gamma_{ij}(x,z/2)+\gamma_{ij}(x',z/2)$ для всех x, z. Здесь x' отличается от x двумя компонентами: вместо x_i взято $x_i+z/2$, а вместо x_j $x_j+\gamma_{ij}(x,z/2)$. Левая часть неравенства показывает уровень темы j, который необходим для прироста z уровня темы i в течение одного года. Правая часть показывает величину уровня темы j, которая необходима для прироста z темы i в течение двух лет. Следовательно, неравенство говорит о том, что прироста в течение года достигнуть не легче, чем за два года с точки зрения требуемых затрат темы j. Так или иначе это рассуждение обосновывает предположение о выпуклости (вниз) функций γ_{ij} по аргументу z.

Отсюда ясно, что замечание о распространении теоремы из § 2 на случай выпуклых вверх по z функций имеет небольшую ценность. Однако этим замечанием можно воспользоваться для иллюстрации следующего соображения. Коль скоро функции γ_{ij} выпуклы вниз по z, то значения соответствующих частных производных возрастают с возрастанием z. Поэтому при сравнительно малых приростах тем можно надеяться, что матрица, составленная из значений частных производных будет продуктивной, а при больших приростах продуктивность будет потеряна. Отсюда следует вывод о том, что достижения высокого уровня разработки тем надо достигать равномерно по годам, без резких скачков.

Теперь о характере зависимости от x. По-видимому, будет не слишком большим огрублением действительности считать, что значения γ_{ij} зависят лишь от аргументов x_i и x_j и не зависят от величины уровней остальных тем. Зависимость от остальных тем учитывается посредством всего набора функций

$\{\gamma_{ij}\}$ с помощью решения задачи баланса.

Естественно считать, что чем выше уровень темы i, тем больше должен быть прирост уровня темы j для обеспечения фиксированного приращения уровня темы i. Следовательно, по x_i функция γ_{ij} возрастает. По x_j же, наоборот, γ_{ij} убывает, причем для заданных z и x_i всегда найдется такой уровень x_j°, начиная с которого γ_{ij} равна нулю. Это означает, что если тема j уже достаточно высоко развита, то для обеспечения заданного развития другой темы ее дополнительно не надо развивать.

Итак, окончательно можно предположить, что функции γ_{ij} являются функциями от трех аргументов z, x_i и x_j, выпуклы (вниз) по каждому из них, возрастают по z и по x_i и убывают по x_j. Предположение о выпуклости по x_i и x_j является, конечно, спорным. Зато оно хорошо тем, что в результате получается задача выпуклого программирования, в которой нет локальных экстремумов. Действительно, задача (10) - - (13) представляет собой задачу математического программирования, в которой множество допустимых значений задано неравенствами, поскольку условие (10) можно заменить на систему неравенств

$$\Delta x_j(t) \geq \gamma_{1j}(x(t-1), \Delta x_1(t)),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta x_j(t) \geq \gamma_{nj}(x(t-1), \Delta x_n(t)).$$

В зависимости от типа функций γ_{ij} получаются задачи линейного, выпуклого и т.д. программирования.

В заключение отметим, что рассмотренный в работе в простейшей статической и динамической постановках баланс научных разработок сравнительно просто может быть усложнен в тех же направлениях, что и классический баланс производства и распределения продукции. Такими направлениями, в частности, являются

1) учёт ограничений по трудовым и природным ресурсам,
2) учёт вариантов разработки научных тем,
3) учёт запаздываний,
4) учёт затрат продукции и фондов, и т.д.

Поступила в ред.-изд. отд.
1. VI. 1973 г.