УДК 518.734.321

ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С БУЛЕВЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Д.Г.Терзи

Задачи дискретного программирования имеют большое прикладное значение. Исследования их с каждым годом возрастают. Для некоторых специальных задач уже существуют достаточно эффективные алгоритмы [1] - [3]

Имеющиеся в настоящее время точные алгоритмы дискретного программирования были опробованы при решении реальных и тестовых задач. Для некоторых из них были получены оценки числа итераций [5], [6], [8].

Наряду с точными алгоритмами [7], [9] в последнее время начали публиковаться и приближенные [4], [13].

Приближенные методы, несмотря на то, что они не гарантируют нахождения оптимального решения в течение заданного времени, имеют ряд преимуществ по сравнению с точными: не чувствительны к ошибкам округления, устойчивы, их вычислительные схемы проще. Кроме того, они позволяют лучше учесть специфику задач, вводить разного рода управляющие параметры и т.д.

Вопрос о вычислительной эффективности приближенного алгоритма решается, как правило, машинным экспериментом достаточно большого объема.

В настоящей работе предлагается способ нахождения приближенного решения задачи линейного программирования, содержащей булевы переменные. Используемые здесь принципы в некоторых отношениях близки к работам [4], [10]-[12], [14].

I. Постановка задачи и краткая схема ее решения

Пусть требуется найти экстремум функции

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (I)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \, \omega_i \, b_i , \qquad (2)$$

$$x_j = 0 \text{ или } 1, \; j \in K, \; K \subseteq N = \{1, \dots, n\},$$
$$0 \leq x_j \leq d_j, \; j \bar{\in} K, \qquad (3)$$

где ω_i - отношение типа $\leq$, $=$ или $\geq$ и d_j - верхняя граница изменения x_j .

Приближенное решение задачи (I) - (3) находится путем решения конечной последовательности задач

$$T_0, T_1, \dots, T_z . \qquad (4)$$

Задача T_s имеет вид: найти вектор x , удовлетворяющий условиям (2), (3) и ограничению

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \geq M_1^s ,$$

если целевая функция максимизируется, или

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq M_2^s ,$$

если она минимизируется,

$$M_1^s = \begin{cases} -R, & s = 0, \\ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{s-1} + h^s, & s > 0. \end{cases}$$

$$M_2^s = \begin{cases} R, & s = 0, \\ \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{s-1} - h^s, & s > 0. \end{cases}$$

R - достаточно большое положительное число, x^{s-1} - вектор, найденный при решении задачи T^{s-1} , h^s (>0) - требуемая точность решения задачи (I) - (3), которая может меняться в зависимости от s .

Решение задачи T_s находится приближенно с помощью итерационного процесса минимизации некоторой функции $f_s(x)$ (описание процесса и построение T_s даны ниже).

Фиксируем k - натуральное число $\gg 1$, ε - достаточно малое положительное число, и минимизируем $f_s(x)$ на множестве

$$\mathcal{D}=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\,|\,0\le x_j\le 1,\ j\in K,\ 0\le x_j\le d_j,\ j\bar{\in} K\}.$$

Если в течение t итераций ($t\le k$)

$$\min_{x\in\mathcal{D}} f_s(x)=f_s(x^s)\le\varepsilon,$$

то говорим, T_s решена (разрешима). В этом случае переходим к решению задачи T_{s+1} . Если $\min\limits_{x\in\mathcal{D}} f_s(x)$, достигнутый за k итераций, больше ε , то считаем, что T_s неразрешима, и прерываем процесс.

В качестве приближенного решения задачи (I) - (3) берем вектор x^r со значением целевой функции

$$z^r=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^r,$$

где r - наибольший номер разрешимой задачи T_r . Если такой задачи нет ($r=0$), то вместо x^r и z^r берем $\tilde{x}$ и $\tilde{z}$:

$$\tilde{x}_j=\begin{cases}[x_j^0], & j\in K,\\ x_j^0, & j\bar{\in} K,\end{cases}$$

$$\tilde{z}=\sum_{j=1}^{n} c_j\tilde{x}_j.$$

2. Описание итерационного процесса для решения задач T_s

Допустим, что ограничения задачи T_s есть равенства. Если это не так, то введем неотрицательные переменные, чтобы преобразовать их в равенства (см. замечание 3).

Пусть эти ограничения имеют вид:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^s x_j=b_i^s,\ i=1,\ldots,m_1,$$

$$x_j=0 \text{ или } 1,\ j\in K,\ 0\le x_j\le d_j,\ j\bar{\in} K.$$

Здесь коэффициенты a_{ij}^3 матрицы размера $m_1 \times n_1=(m+1)(n+m+1)$ и b_i^3 очевидным образом вычисляются по коэффициентам ограничений задачи T_3 .

Построим функцию

$$f_3(x)=\sum_{i=1}\Big(b_i^3-\sum_{j=1} a_{ij}^3 x_j\Big)^2+\sum_{j\in K} v_j x_j(1-x_j),$$

где $v_j(>0)$ - "штраф" за невыполнение требования целочисленности x_j .

ТЕОРЕМА I. Всякий вектор x^3 такой, что

$$\min_{x\in\mathcal{D}} f_3(x)=f_3(x^3)=0,$$

является решением задачи T_3 .

Доказательство теоремы I следует по построению (см. п. I).

Для минимизации $f_3(x)$ строим последовательность

$$x_1^1,\ x_1^2,\ \ldots,\ x_1^k$$

такую, что

$$f_3(x_1^p)\geq f_3(x_1^q)$$

при $p<q$.

Пусть x_2^t ; $t = 1,\ldots,k$, - случайные векторы из $\mathcal{D}$.

Определим

$$x_1^1=x_2^1,$$

$$x_1^{t+1}=\alpha^t x_1^t+(1-\alpha^t)x_2^{t+1},\quad t=1,\ldots,k-1, \qquad (5)$$

где α^t - число такое, что I) $x_1^{t+1}\in\mathcal{D}$, и 2) функция $f_3(x)$ достигает своего минимума в точке x_1^{t+1} на отрезке, соединяющем x_1^t и x_2^{t+1} .

Дальше для упрощения записи расчетных формул примем обозначения

$$\alpha=\alpha^t,\ x=x_1^t,\ y=x_2^{t+1},\ u=x-y,\ N_1=\{1,\ldots,n_1\}. \qquad (6)$$

Для того, чтобы $x\in\mathcal{D}$, необходимо включение $\alpha\in[\alpha_1,\alpha_2]$, где

$$\alpha_1 = \max\left(-R, \max_{\substack{j\in N_1 \\ u_j>0}} \frac{-y_j}{u_j}, \max_{\substack{j\in N_1 \\ u_j<0}} \frac{d_j-y_j}{u_j}\right),$$

$$\alpha_2 = \min\left(R, \min_{\substack{j\in N_1 \\ u_j>0}} \frac{d_j-y_j}{u_j}, \min_{\substack{j\in N_1 \\ u_j>0}} \frac{-y_j}{u_j}\right). \tag{7}$$

Точное значение α для определения (5) находится из условия

$$\min_{\alpha\in[\alpha_1,\alpha_2]} f_1(\alpha x+(1-\alpha)y) = f_1(x_1^{t+1}). \tag{8}$$

Используя обозначения (6), выпишем формулы для вычисления следующих величин:

$$r_i = \sum_{j\in N_1} a_{ij}^1 x_j,\ s_i = \sum_{j\in N_1} a_{ij}^1 y_j,\ i\in M_1=\{1,\dots,m_1\},$$

$$A = \sum_{i\in M_1}(r_i-s_i)^2 - \sum_{j\in K} v_j u_j^2,$$

$$B = \sum_{i\in M_1}(b_i^1-s_i)(r_i-s_i) + \sum_{j\in K} v_j(y_j-1/2)u_j, \tag{9}$$

$$C = \sum_{i\in M_1}(b_i^1-s_i)^2 + \sum_{j\in K} v_j y_j(1-y_j).$$

Пусть функция

$$\varphi(\alpha) = A\alpha^2 - 2B\alpha + C.$$

Нужное нам α из (7) определяется формулами:

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_1, & A>0 \wedge B/A<\alpha_1 \vee A<0 \wedge \varphi(\alpha_1)\le\varphi(\alpha_2) \\ B/A, & A>0 \wedge \alpha_1\le B/A\le\alpha_2 \\ \alpha_2, & A>0 \wedge B/A>\alpha_2 \vee A<0 \wedge \varphi(\alpha_1)>\varphi(\alpha_2) \end{cases} \tag{10}$$

Таким образом, последовательность (5) полностью определена.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Для моделирования векторов x_2^t, $t=1,\dots,k$, можно пользоваться процедурой, обеспечивающей их равномерное распределение в области $\mathcal{D}$. В этом случае имеет место

ТЕОРЕМА 2. Предлагаемый метод (5) - -(10) будет сходящимся с вероятностью единицы при $k \to \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть точное решение задачи (1) - (3) есть вектор $\bar{x}$, а найденное приближенное решение есть $\hat{x}$ Тогда мера h - окрестности точки $\bar{x}$, определяемой множеством

$$B=\{x=(x_1,\ldots,x_n) \mid |x_j-\bar{x}_j|<1/2, j\in K, |x_j-\bar{x}_j|<h, j\bar{\in} K\},$$

равна $(1/2)^u\cdot(2h)^{n-u}$ (u - количество элементов множества K), и она строго положительна при любом $h>0$.

Пусть $P(\hat{x}\in B)$ - вероятность того, что $\hat{x}\in B$. Покажем, что $P(\hat{x}\in B)=P(\bar{x}\in B)=1$. Для этого представим себе процесс (5) - (10) как проведение k независимых испытаний на попадание вектора x_ℓ^t , $t=1,\ldots,k$, в B . Любой вектор x_ℓ^t , $t=1,\ldots,k$, попавший в B с последующим округлением x_j , $j\in K$, до ближайшего целого совпадает с $\bar{x}$. Вероятность α попадания случайного вектора x_ℓ^t при фиксированном t (при одном испытании) равна

$$p(x_\ell^t\in B)=\frac{mes\, B}{mes\, \mathcal{D}},$$

где $mes\, G$ - мера множества G , вследствие равномерной распределенности векторов x_ℓ^t в $\mathcal{D}$. Следовательно, α строго положительна. Отсюда следует, что

$$P(x_\ell^t\bar{\in} B)=1-\alpha,\quad 0<1-\alpha<1.$$

Так как испытания независимы, то

$$P(x_\ell^1\bar{\in} B\cap x_\ell^2\bar{\in} B\cap\ldots\cap x_\ell^k\bar{\in} B)=(1-\alpha)^k$$

Теперь напомним, что $\hat{x}$ - приближенное решение, достигнутое за k итераций, и оно таково, что если $x_\ell^t\in B$, $t=1,\ldots,k$, то тем более и $\hat{x}\in B$. Тогда

$$P(\hat{x}\in B)\geq P(x_\ell^t\in B,\ t=1,\ldots,k)=1-(1-\alpha)^k.$$

Отсюда $P(\hat{x}\in B)\to 1$ при $k\to\infty$. Теорема доказана.

В качестве приближения к требованию равномерной распределенности x_ℓ^t можно моделировать

$$x_2^t = (x_{21}^t, \ldots, x_{2n}^t)$$

по формулам

$$x_{2j}^t = \begin{cases} [1/2 + s_0], & j \in K, \\ s_0 \cdot d_j, & j \bar{\in} K, \end{cases} \qquad (11)$$

где s_0 определяется из рекуррентного соотношения $s_0 := \{\rho s_0 + t_0\}$, начальные s_0 и t_0 – случайные числа из $[0,1]$, ρ – положительная постоянная, $t = 1, \ldots, k$.

Теорема 2 может быть обобщена следующим образом.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть имеется любое распределение векторов x_2^t в $\mathcal{D}$, обеспечивающее положительную вероятность α попадания случайного вектора в множество B. Тогда процесс (5) – (10) сходится с вероятностью 1 при $k \to \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После выполнения одной итерации (одного испытания) процесса (5) – (10) вероятность попадания приближенного решения в окрестность B не меньше $\alpha = P(x_2^t \in B)$. Тогда $P(x_2^t \bar{\in} B) = 1 - \alpha$. Вероятность непопадания всех x_2^t, $t = 1, \ldots, k$, в B равна $(1-\alpha)^k$. Вероятность попадания за k итераций хотя бы одного x_2^t, $t = 1, \ldots, k$, в B равна $1 - (1-\alpha)^k$ и она стремится к 1 при $k \to \infty$.

Отсюда следует, что тем более и $\tilde{x} \in B$ с вероятностью 1. Теорема 3 доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В процессе решения некоторых задач оказывается полезным периодически, т.е. при $t = p, 2p, \ldots, p[\frac{k}{p}]$, p – натуральное число $\gg 1$, образовывать x_2^t не случайно, а с использованием результатов предыдущего счета. А именно, пусть вектор $y_2^0 = 0$,

$$y_{1j}^q = \begin{cases} [1/2 + x_{1j}^{pq}], & j \in K, \\ x_{1j}^{pq}, & j \bar{\in} K. \end{cases}$$

$$y_{2j}^{q+1} = \begin{cases} [1/2 + x_{1j}^{p(q+1)}], & j \in K, \\ x_{1j}^{p(q+1)}, & j \bar{\in} K, \end{cases}$$

$$q = 1, \ldots, [\frac{k}{p}].$$

Тогда если $y_{1j}^{q} = y_{2j}^{q+1}$, то $x_{2j}^{p(q+1)} = y_{1j}^{q}, j \in K$. Для остальных $j \in N$ $x_{2j}^{p(q+1)}$ – случайное число. В ряде примеров при таком способе порождения последовательности $\{x_2^t\}$ сходимость была лучше, чем при чисто случайной последовательности.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Вводимые неотрицательные переменные x_{n+i} (ω_i не есть отношение типа =) в задаче T_s, $0 \le s \le r$, при известных x_j, $j \in N$, вычисляются по формулам:

$$x_{n+i} = \begin{cases} 0, & t \le 0, \\ t, & t > 0, \end{cases}$$

$$t = (b_i^s - r_i^0)/\bar{r}_i, \quad r_i^0 = \sum_{j \in N} a_{ij}^s x_j,$$

$$\bar{r}_i = \begin{cases} -1, & \omega_i \text{ – отношение типа } \geq \\ 0, & = \\ 1, & \leq . \end{cases}$$

Тогда при $x = x_1^t$, $x = x_2^{t+1}$ соответственно

$$r_i = \sum_{j=1} a_{ij} x_{1j}^t + \bar{r}_i x_{1,n+i}^t, \quad s_i = \sum_{j=1} a_{ij} x_{2j}^{t+1} + \bar{r}_i x_{2,n+i}^{t+1}.$$

Формулы для вычисления α_1 и α_2 также изменятся. Вместо α_1 и α_2 надо брать $\bar{\alpha}_1$ и $\bar{\alpha}_2$, где

$$\bar{\alpha}_1 = \max\Big(\alpha_1, \max_{\substack{i \in M_1 \\ y_i^t > 0}} \frac{-x_{2,n+i}^{t+1}}{y_i^t}\Big),$$

$$\bar{\alpha}_2 = \min\Big(\alpha_2, \min_{\substack{i \in M_1 \\ y_i^t < 0}} \frac{-x_{2,n+i}^{t+1}}{y_i^t}\Big),$$

$$y_i^t = x_{i,n+i}^t - x_{2,n+i}^{t+1}.$$

3. Указание к реализации алгоритма и численный эксперимент

Пусть требуется найти

$$z = max(2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \qquad + x_5)$$

при ограничениях:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 \geq 6,$$

$$x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 \leq 1,$$

$$x_1 \qquad + x_3 + x_4 - x_5 = 2,$$

$$x_j = 0 \vee 1,\ j = 3,4, \quad 0 \leq x_j \leq 10,\ j = 1,2,5.$$

Для этой задачи принималось h = I – точность решения, p и q таковы, что $k = p \cdot q$ = I0.50 – максимальное число итераций,

$$s_0 = 0.3472089I \qquad \text{и} \qquad t_0 = 0.8374905I$$

– два случайных числа из $[0,I]$, матрица

$$\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 0 & I \\ I & I & 2 & 3 & -I \\ 0 & I & -I & -2 & 2 \\ I & 0 & I & I & -I \end{pmatrix}$$

вектор b = (0,6,I,2),

$\bar{\tau}$ = (-I,-I,I,0),

v и d n – мерные вектора,

$$v = (0, 0, v_3, v_4, 0) \qquad = (0,0,4,4,0)$$

$$d = (I0,I0,I,I,I0),$$

числа p, q, s_0, t_0 и ненулевые компоненты вектора (в нашем примере v_3 и v_4) являются параметрами алгоритма.

По алгоритму (5) – (II) было просчитано несколько задач, в том числе и описанная выше, в которых все переменные булевы. Результаты описаны в приведенной в тексте таблице. Задачи I, 2, 4, 5, 7 и 9 были решены точно. В задачах 6, 8 и I0 получены некоторые приближенные решения. При других параметрах реализации алгоритма эти решения могут быть улучшены. В задаче 3 нет целочисленных решений, поэтому приведенное значение $\tilde{z}$ =I4 означает, что существует некоторая целочисленная точка, зна-

№ задачи	m	n	k	$\bar{v}$	s_0	t_0	$\tilde{z}$	$\bar{z}$	Примечания
I	4	5	I3	I0	0.24534555	0.04453223	9	9	
2	7	I0	47	20	0.30699033	0.86400446	23	23	
3	5	9	64	I0	0.43556404	0.834I0663	I4	-	задача не имеет целочисленных решений
4	7	I2	53	5	0.3456409I	0.80097709	I3	I3	
5	7	23	2I544	I4	0.35644775	0.236578I9	8555	8555	
6	I4	46	II70	2	0.634792I6	0.2852I089	I7I6.2I	I327.93	
7	7	2I	777	I5	0.489234I7	0.582I792	504	504	
8	32	33	36	2	0.46734502	0.35720587	I0I942		точное значение неизвестно
9	I2	I6	86I	3	0.267093I6	0.3895I070	II6	II6	
I0	I6	30	I8II	I6	0.98I0834	0.3I223535	I32I	I043	

Таблица. Результаты счета.

чение целевой функции, в которой равно I4 и находится "достаточно близко" в смысле пункта I к допустимой области. Во всех задачах считалось, что вектор ϑ имеет одинаковые по значению компоненты, равные $\bar{\vartheta}$.

Литература

I. КОРБУТ А.А., ФИНКЕЛЬШТЕЙН Ю.Ю. Дискретное программирование. М., "Наука", 1969.

2. ВОЛКОВ Ю.И. Методы решения некоторых классов задач целочисленного и линейного программирования. Автореферат диссертации, представленной на соискание ученой степени канд. физ.-мат. наук, Новосибирск, 1969.

3. ДАНЦИГ Дж. Линейное программирование, его приложения и обобщения. М., "Прогресс", 1966.

4. ПЯТЕЦКИЙ-ШАПИРО И.И., ВОЛКОНСКИЙ В.А., ЛЕВИНА Л.В., ПОМАНСКИЙ А. Об одном итеративном методе решения задач целочисленного программирования. - ДАН СССР, 1966, 169, №6, 1289-1292.

5. КОРОБКОВ В.К. Приложение. - Кибернетический сборник. Новая серия, вып. 6, М., 1969, 253-258.

6. ФИНКЕЛЬШТЕЙН Ю.Ю. Оценка числа итераций для целочисленного алгоритма Гомори. - ДАН СССР, 1970, 193, № 3, 543-546.

7. КОЛОКОЛОВ А.А., ХОХЛЮК В.И. О двух алгоритмах линейного целочисленного программирования. - Оптимальное планирование, Новосибирск, 1970, 16, 33-46.

8. КОЛОКОЛОВ А.А. К оценке числа итераций для прямых алгоритмов метода отсечения в целочисленном линейном программировании. - Математический анализ экономических моделей. Часть I, Новосибирск, 1971, 137-164.

9. RAGHAVACHARI M. On connections between zero-one integer programming and concave programming under linear constraints.- Oper. Res., 1969, 17, N 4, 680-684.

10. БАГРИНОВСКИЙ К.А. Об одном способе минимизации выпуклой функции на выпуклом множестве. - Научные труды НГУ, серия экономическая, Новосибирск, 1966, вып.8, 67-78.

11. АНТИК М.И., ЧИТАИШВИЛИ А. Об одном методе решения задач целочисленного линейного программирования с булевыми переменными. - Изв. АН СССР. Техническая кибернетика, 1968, № 6, 21-26.

12. STEINBERG D.J. The fixed charge problem. - Nav. Res. Log. Quart., 1970, 17; N 2, 217-235.

13. BALINSKI M.L., SPIELBERG K. Methods for integer prigramming: algebraic, combinatorial, and enumerative. In. : Progress in operations research III, New York, Wiley, 1969, 195-282.

14. ФИНКЕЛЬШТЕЙН Ю.Ю. Метод отсечения и ветвления для решения задач целочисленного линейного программирования. В кн.: У Всесоюзное совещание по проблемам управления (Москва, 1971). Рефераты докладов. Часть I, М., "Наука", 1971, 242-244.

Поступила в ред.-изд. отд.
5. У. 1972 г.