УДК 658.012.122

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕСУРСОВ В ОТРАСЛИ

В.Д.Маршак

С точки зрения системного подхода к планированию и управлению развитием народного хозяйства задача отрасли (как составной части народного хозяйства) заключается в нахождении оптимального плана развития при выделенных ресурсах и заданных условиях по выпуску конечной продукции (объемы производства, структура выпуска, цены и т.п.). Поскольку каждая отрасль распадается на ряд объектов, специализирующихся на выпуске определенной продукции, постольку перед управляющим органом отрасли (министерством) стоит задача распределения ресурсов между данными подотраслями при условии достижения максимального эффекта в целом для всей отрасли.

Процесс нахождения оптимального распределения ресурсов в отрасли должен быть построен таким образом, чтобы министерство с помощью управляемых параметров (распределяемых ресурсов) могло бы оперативно реагировать на изменяющиеся условия в народном хозяйстве и в подотраслях.

В данной работе описывается алгоритм определения оптимального плана отрасли, когда отраслевая задача в целом представляется как матрица с диагональными блоками, связанными между собой общими ограничениями по ресурсам и общим вектором конечного выпуска отрасли, интенсивность использования которого следует максимизировать. Блок-схема такой задачи приводится ниже.

x_1	. . .	x_k	. . .	x_l	Z		
0	. . .	0	. . .	0	$+\sum_k d_k$		max
0	. . .	0	. . .	Φ_l	0	$\leq$	N_l
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .		. . .
0	. . .	Φ_k	. . .	0	0	$\leq$	N_k
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .		. . .
Φ_1	. . .	0	. . .	0	0	$\leq$	N_1
0	. . .	0	. . .	A_l	$-d_l$	$\geq$	0
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .			. . .
0	. . .	A_k	. . .	0	$-d_k$	$\geq$	0
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .			. . .
A_1	. . .	0	. . .	0	$-d_1$	$\geq$	0
R_1	. . .	R_k	. . .	R_l	0	$\leq$	B

Рис. I. Блок-схема отраслевой задачи в целом

Здесь:

A_k - матрица технологических способов подотрасли k, $k=1,\ldots,l$;

$d=\{d_{ki}\}, i=1_k,\ldots,n_k; k=1,\ldots,l$ - вектор конечного выпуска продукции отрасли;

Φ_k - матрица коэффициентов использования производственных мощностей технологическими способами подотрасли k при единичной интенсивности их использования,

R_k - матрица коэффициентов использования общих для всей отрасли ресурсов технологическими способами подотрасли k при единичной интенсивности их использования;

$B=(b_1,\ldots,b_{n_0})$ - вектор ограничений по общим ресурсам;

N_k, $k=1,\ldots,l$ - вектор ограничений по производственным мощностям подотрасли k.

В введенных обозначениях задача распределения ресурсов между подотраслями (схема которой приведена выше) можно записать как задачу линейного программирования в следующем виде:

требуется определить векторы X_k, $k=1,\ldots,l$; и число Z при условиях:

$$
\begin{aligned}
&1.\quad X_k \geq 0, \; k=1,\dots,\ell; \\
&2.\quad \Phi_k X_k \leq N_k, \; k=1,\dots,\ell. \\
&3.\quad A_k X_k - d_k Z \geq 0, \; k=1,\dots,\ell. \\
&4.\quad \sum_k R_k X_k \geq B. \\
&5.\quad Z \longrightarrow max.
\end{aligned} \tag{1}
$$

В результате решения задачи (I) мы получим искомое распределение ресурсов между подотраслями при условии, что данная модель может решаться как единая задача линейного программирования. Однако на практике решение такой задачи невозможно из-за большого числа подотраслей, т.е. из-за большой размерности задачи по включенным неравенствам. Кроме того, имеющий место на практике процесс распределения ресурсов в отрасли не соответствует решению задачи (I). Министерство, как управляющий орган всей отраслью, распределяет ресурсы, исходя из некоторых управляющих параметров, не решая задачи вида (I). Следовательно, министерство не рассматривает весь поток информации из подотраслей, характеризующий их технологическое состояние. Поэтому, исходя из того, что мы не можем решать общей задачи (I) по соображениям математического характера (размерность) и по соображениям экономического порядка (несоответствие фактического процесса управления отраслью и процесса управления в условиях полной централизации - решение задачи (I)), рассмотрим другой подход к решению данной проблемы.

Пусть план развития каждой подотрасли определяется при помощи решения следующей задачи:

определить вектор X_k и число Z_k при условиях:

$$
\begin{aligned}
&1.\quad X_k \geq 0, \; k=1,\dots,\ell. \\
&2.\quad \Phi_k X_k \leq N_k. \\
&3.\quad A_k X_k - d_k Z_k \geq 0. \\
&4.\quad R_k X_k \leq C_k. \\
&5.\quad Z_k \longrightarrow max.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Таким образом, решая ℓ задач вида (2), мы решаем задачу (I) при условии, что значения C_{ki}, $k=1,\dots,\ell$, $i=1,\dots,n_0$;

совпадают с потреблением ресурса вида i подотраслью k в задаче (I).

Оптимальный план, полученный в результате решения задачи (I) обладает свойством, что общий уровень выпуска конечной продукции (Z) будет единым и максимальным для всех подотраслей.

Рассматриваемый ниже алгоритм управления развитием подотраслей реализует получение от любого допустимого решения такой последовательности значений общего для всех подотраслей уровня выпуска конечной продукции, которая сходится к максимальному значению, равному для всех задач (2).

§ I. Общее описание алгоритма

Общая идея, которая была положена в основу алгоритма управления развитием подотраслей как процесса распределения ресурсов между подотраслями, заключается в следующем:

I. Начнем решение задач (2) с некоторого допустимого распределения ресурсов, т.е. чтобы выполнялось условие, что $\sum_k R_k X_k(1) \leq B$. Здесь $X_k(1)$ - вектор интенсивностей технологических способов подотрасли k на первом шаге реализации алгоритма.

2. Допустимым решением для всей системы задач (2) будет минимальное значение уровня выпуска конечной продукции - $Z_m(1)$, которое достигается в некоторой подотрасли $k = m$. Значение функционала для всей системы будет в этом случае $L(1) = Z_m(1)$. Относительно значения $Z_m(1)$ изымем из всех других подотраслей ресурсы, обеспечивающие превышение $Z_k(1)$ над $Z_m(1)$.

3. По некоторому критерию перераспределяем изъятые ресурсы между всеми подотраслями.

Процесс повторяется до тех пор, пока на некотором шаге r не получаем, что

$$\frac{\max\limits_k Z_k(r) - \min\limits_k Z_k(r)}{\min\limits_k Z_k(r)} \leq \varepsilon ,$$

где ε - заданная точность разброса значений $Z_k(r)$ минимального и максимального. В практических расчетах ε должно быть меньше по абсолютному значению, чем точность данных, используемых в задачах.

Изложенная выше схема процесса перераспределения ресурсов может быть реализована по-разному. Однако в любом случае должно выполняться условие, что изъятие ресурсов из подотраслей на сдвиг $Z_k(\gamma) - Z_m(\gamma)$ обеспечивает наличие допустимого плана для каждой задачи (2), при котором $Z_m(\gamma) \leq Z_k(\gamma+1)$. В этом случае можем утверждать, что при любом дальнейшем перераспределении изъятых ресурсов между всеми подотраслями последовательность значений $\min_k Z_k(\gamma)$ будет монтонно возрастающая.

Наиболее простым и очевидным способом изъятия ресурсов из подотраслей до общего допустимого уровня производства конечной продукции было бы решение задач (2) с критерием на минимум суммарного объема ресурсов при условии, что выполняется достигнутый общий для всей системы уровень производства конечной продукции, т.е. что $Z_k(\gamma) = Z_m(\gamma)$. Однако практическая реализация такого подхода нежелательна, потому что будет фактически удвоено время использования ЭВМ. Для того, чтобы избежать двойного счета на каждой итерации процесса распределения ресурсов, необходимо применить некоторую интерполяцию значений $C_{ki}(\gamma)$ в точке $Z_m(\gamma)$.

§ 3. Алгоритм распределения ресурсов между подотраслями

I. Начальный шаг ($\gamma = 1$). На начало процесса распределения ресурсов имеются ℓ задач (2), в которых не определены только размеры выделенных ресурсов вида $C_{ki}(1)$, $i = 1, \dots, n_o$; $k = 1, \dots, \ell$. В целом для всей системы задач (2) заданы значения B_i, $i = 1, \dots, n_o$.

а) Предположим, что нам известен максимально возможный объем потребления ресурса i ($i = 1, \dots, n_o$) в каждой из подотраслей.

При начальном распределении ресурсов мы предполагаем, что все подотрасли являются равноэффективными с точки зрения увеличения значения функционала отрасли в целом. Поэтому распределяем ресурсы пропорционально потребности в них при полной загрузке производственных мощностей. Если V_{ki} - максимально возможный объем использования ресурса вида i (i=I,...,n_0) в подотрасли k, то начальное распределение ресурсов определяется как

$$C_{ki}(1) = V_{ki} \cdot \frac{B_i}{\sum_k V_{ki}}, \quad i=1,\ldots,n_0;\; k=1,\ldots,\ell.$$

б) При полученных значениях $C_{ki}(1)$ решаем задачи (2).

2. Описание r шага алгоритма.

Имеются: $C_{ki}(r)$, $Z_k(r)$, $\pi_{ki}(r)$ - информация, которой располагает управляющий орган отрасли - министерство.

а) По заданному критерию точности реализации алгоритма проверяется результат решения задач (2):

процесс завершен, если

$$\frac{\max\limits_k Z_k(r) - \min\limits_k Z_k(r)}{\min\limits_k Z_k(r)} \le \varepsilon; \tag{3}$$

процесс следует продолжить, если

$$\frac{\max\limits_k Z_k(r) - \min\limits_k Z_k(r)}{\min\limits_k Z_k(r)} > \varepsilon. \tag{4}$$

Если разброс в значениях $Z_k(r)$ не удовлетворяет заданному ε, переходим к определению $C_{ki}(r+1)$.

б) Определение размеров ресурсов, необходимых для выполнения минимального из достигнутых по подотраслям уровней выпуска конечной продукции.

На r шаге реализации алгоритма распределения ресурсов в результате решения задач (2) получаем соответствующие значения переменных $Z_k(r)$, k=I,..., ℓ, для которых выполняется условие (4). Минимальное значение $Z_k(r)$ получает в подотрасли $k=m$. Это значение $Z_m(r)$ и является допустимым значением уровня конечного выпуска для всех задач (2). Значение функционала для всей системы задач (2) будет равно $\mathcal{L}(r) = \mathcal{Z}_m(r)$. Из всех подотраслей, у которых уровень выпуска конечной продукции выше, чем в подотрасли $k=m$ $(\mathcal{Z}_k(r) > \mathcal{Z}_m(r))$, следует изъять ресурсы, которые обеспечивают превышение $\mathcal{Z}_k(r)$ над $\mathcal{Z}_m(r)$.

Зависимость уровня производства конечной продукции $(\mathcal{Z}_k(r))$ от размера используемого ресурса ($C_{ki}(r)$, $i=1,\ldots,n_0$) будет выражаться в виде вогнутой кусочно-линейной функции. На каждом из линейных участков данной функции прирост производства обеспечивается за счет использования одних и тех же производственных мощностей или равноэффективных им с точки зрения использования ресурса вида i.

Будем определять размер ресурса, необходимый для производства продукции на уровне $\mathcal{Z}_m(r)$, предполагая, что существует прямо пропорциональная зависимость уровня производства от объема ресурса от точки ($C_{ki}(r), \mathcal{Z}_k(r)$) до точки (0,0), т.е. что

$$\bar{C}_{ki}(r) = C_{ki}(r) \cdot \frac{\mathcal{Z}_m(r)}{\mathcal{Z}_k(r)}, \quad i=1,\ldots,n_0;\ k=1,\ldots,\ell. \tag{5}$$

Отметим, что определение размеров ресурсов в точке $\mathcal{Z}_m(r)$ происходит не по всем видам ресурсов одновремéнно. На каждой итерации алгоритма выбирается ресурс $i=\mu$ с максимальным разбросом оценок по подотраслям. Все дальнейшие операции по изъятию и перераспределению на итерации r идут относительно данного ресурса $i=\mu$. Экономическая сторона этого условия означает, что производится перераспределение ресурса, который наиболее эффективен на данном шаге с точки зрения роста общего для всех подотраслей уровня выпуска конечной продукции.

Изымая ресурс вида $i=\mu$ с максимальным разбросом значений оценок $\pi_{k\mu}(r)$ по подотраслевым задачам (2), нельзя утверждать, что в таком же размере (или в такой же пропорции) произойдет изъятие и других ресурсов вида $i \neq \mu$. Изъятие "излишков" ресурса вида μ, обеспечивающих по подотраслям $k \neq m$ превышение над общим допустимым значением уровня выпуска конечной продукции – $\mathcal{Z}_m(r)$, вызовет неизбежно повышение дефицитности других ресурсов вида $i=\mu$. Следовательно, и размер этих ресурсов вида $i \neq \mu$ при уровне выпуска конечной продукции, равной $Z_m(r)$, будет превышать их величину, которая определялась бы по формулам (5).

Поскольку заранее не известна заменяемость ресурсов в общей допустимой точке $Z_m(r)$, постольку и изъятие и перераспределение "излишков" проводится лишь с наиболее дефицитным ресурсом на данном шаге r.

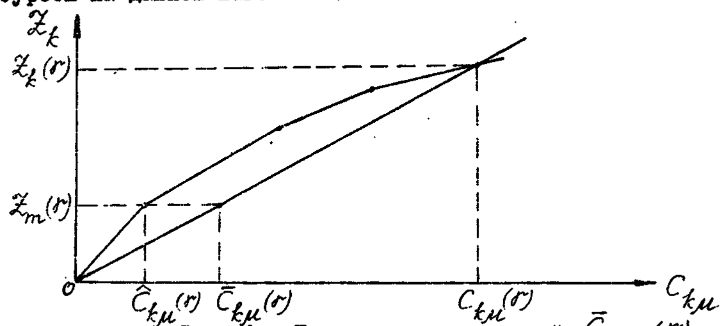

Рис. 2. Интерполяция значений $\bar{C}_{k\mu}(r)$.

Определяя по формуле (5) размер ресурса $\bar{C}_{k\mu}(r)$, мы, как это хорошо видно на рис. 2, обеспечиваем для каждой подотрасли k на шаге r уровень производства конечной продукции не меньший, чем был достигнут на предыдущем шаге в подотрасли $k=m$. Для всех подотраслей, исключая подотрасль $k=m$, за счет линеаризации зависимости $Z_k(r)$ от $C_{k\mu}(r)$ дается несколько больше ресурса, чем это необходимо для достижения уровня $Z_m(r)$ на величину, равную $\bar{C}_{k\mu}(r)-\hat{C}_{k\mu}(r)$ (см. рис. 2). Здесь $\hat{C}_{k\mu}(r)$ – фактический размер ресурса μ при $Z_k(r)=Z_m(r)$ по аналитическому выражению функции $Z_k(r)=f(C_{k\mu}(r))$.

Поскольку изъятый ресурс из всех подотраслей $k \neq m$ мы будем перераспределять между всеми подотраслями, включая $k=m$, то, очевидно, что на следующем шаге $r+1$ получим $\min\limits_k Z_k(r) < \min\limits_k Z_k(r+1)$. На шаге $r+1$ интерполяционный отрезок $(Z_k(r+1), Z_m(r+1))$ будет меньше, чем на предыдущем шаге. Следовательно, и ошибка в определении ресурса $C_{k\mu}(r+1)$ при уровне $Z_m(r+1)$ будет меньше, чем на предыдущем шаге. Если последовательность значений $\min\limits_k Z_k(r)$ сходится к единому значению для всех задач (2), то можно записать, что

$\lim\limits_{r\to\infty}(\bar{C}_{ki}(r)-\hat{C}_{ki}(r))=0$, $i=1,\ldots,n_0$. Данное выражение отражает тот факт, что при сближении значений уровней производства в подотраслях ошибка в определении ресурса $\bar{C}_{ki}(r)$ (необходимого для выполнения минимального уровня производства) уменьшается и при достаточно большом числе итераций будет незначительна.

б). Определение размера ресурса $\Delta B_\mu(r)$, подлежащего распределению между подотраслями.

В целом для всей системы задач (2) заданы размеры ресурса B_μ. Определив размеры ресурсов по минимальному уровню $Z_m(r)$, мы можем вычислить и размер ресурса вида μ, подлежащий распределению, следующим образом:

$$\Delta B_\mu(r)=B_\mu-\sum_{k=1}^{\ell}\bar{C}_{k\mu}(r). \qquad (6)$$

г). Перераспределение $\Delta B_\mu(r)$.

К решению подотраслевых задач (2) мы подходим с точки зрения достижения единого и максимального уровня выпуска конечной продукции для всей системы задач. Некоторый единый уровень был достигнут на шаге r при распределении ресурсов $C_{ki}(r)$. Теперь необходимо распределить свободный ресурс μ, который был изъят из подотраслей, т.к. использовался для производства продукции сверх допустимого для всей системы уровня $Z_m(r)$.

Для сдвига всех подотраслей от уровня $Z_m(r)$ необходимо учитывать эффективность ресурсов в подотраслях, т.е. их оценки $\pi_{k\mu}(r)$, $k=1,\ldots,\ell$. Для всей отрасли в целом максимизируется общий для всех задач (2) вектор конечной продукции. Поэтому сдвиг на один и тот же шаг с достигнутого допустимого уровня производства конечной продукции при различной эффективности использования ресурсов в подотраслях потребует разных добавок ресурса $\Delta B_\mu(r)$. Если, например, в подотрасли $k=1$, $\pi_{1\mu}(r)=1,0$, а в подотрасли $k=2$, $\pi_{2\mu}(r)=2,0$, то сдвиг на единицу в увеличении значения общего функционала $L(r)=Z_m(r)$ потребует для подотрасли № 1 в два раза больше добавки ресурса, чем для подотрасли № 2. Очевидно, что если мы добиваемся увеличения интенсивности использования общего для всей системы задач (2) вектора конечного выпуска, то необходимо для сдвига с точки $Z_m(r)$ ресурс $\Delta B_\mu(r)$ распределять обратно пропорционально его оценкам в подотраслевых задачах (2).

На предыдущих операциях определены $\bar{C}_{k\mu}(r)$ - размеры ресурсов, обеспечивающих единый допустимый (с точки зрения общей задачи (I)) уровень выпуска конечной продукции - $x_m(r)$. Определен и размер ресурса, подлежащего перераспределению между подотраслями - $\Delta B_\mu(r)$. Необходимо теперь определить оценки, соответствующие полученным значениям ресурсов - $\bar{C}_{k\mu}(r)$. Эти оценки и явятся инструментом перераспределения "излишков" ресурсов - $\Delta B_\mu(r)$. Данные оценки можно получить, если решать задачи подотраслей при полученных значениях $\bar{C}_{k\mu}(r)$. Чтобы избежать двойного счета, будем интерполировать значения оценок $\bar{\pi}_{k\mu}(r)$ на отрезке $[0, V_{k\mu}]$, т.к. нам неизвестно аналитическое выражение функции $\pi_{k\mu} = f(C_{k\mu}(r))$.

В задачах производственного планирования зависимость величины оценок от размера используемого ресурса выражается в виде ломаной ступенчатой функции, показанной на рис. 3.

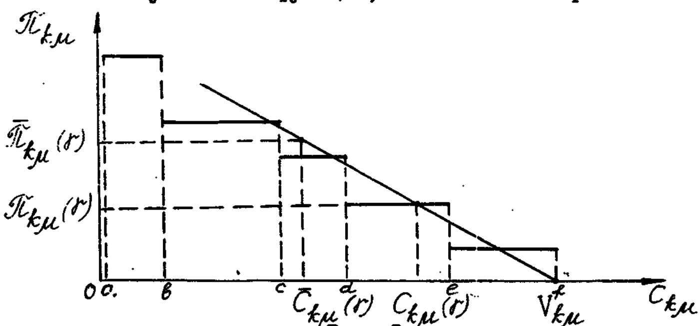

Рис. 3.

Следует отметить, что угловые точки кусочно - линейной функции, показанной на рис. 2, соответствуют одним и тем же значениям $C_{k\mu}(r)$, что и точки разрыва на рис. 3 в одних и тех же задачах (2) и для одних и тех же ресурсов. Те и другие точки соответствуют моменту подключения новых технологических способов, менее эффективных с точки зрения использования данных ресурсов.

Если выделяем подотрасли ресурс в размере от величины в точке a до величины в точке b, то используем один и тот же наилучший технологический способ до его максимально возможной интенсивности применения. Естественно, что на отрезке

$[a, b)$ оценка ресурса μ будет постоянной, т.к. используется один и тот же технологический способ. При выделении подотрасли дополнительного размера ресурса μ увеличение выпуска конечной продукции возможно при применении другого менее эффективного способа. В этом случае оценка ресурса уменьшится и будет постоянной на отрезке (b, c), т.е. до предельной интенсивности использования дополнительного способа, и т.д. до точки f, величина ресурса в которой является насыщающей для данной подотрасли и, следовательно, оценка ресурса равна нулю $(\pi_{k\mu}(f) = 0)$.

При линейной интерполяции значений оценок $\bar{\pi}_{k\mu}(r)$ при ресурсах $C_{k\mu}(r)$ (см. рис.3) имеем, что

$$\frac{\bar{\pi}_{k\mu}(r) - \pi_{k\mu}(f)}{\pi_{k\mu}(r) - \pi_{k\mu}(f)} = \frac{V_{k\mu} - \bar{C}_{k\mu}(r)}{V_{k\mu} - C_{k\mu}(r)} .$$

Но поскольку при максимально возможном использовании ресурса μ оценка его $\pi_{k\mu}(f) = 0$, то

$$\bar{\pi}_{k\mu}(r) = \pi_{k\mu}(r) \quad \frac{V_{k\mu} - \bar{C}_{k\mu}(r)}{V_{k\mu} - C_{k\mu}(r)} . \tag{7}$$

Очевидно, что поскольку распределение ресурсов на каждом шаге алгоритма увеличивает значение $\min_k Z_k(r)$ и, следовательно, уменьшает значение максимального уровня конечного выпуска $\max_k Z_k(r)$, то $\lim_{r\to\infty} \bar{\pi}_{k\mu}(r) = \pi_{k\mu}(r)$.

После определения оценок $\bar{\pi}_{k\mu}(r)$ определяем перераспределение ресурсов $\Delta B_\mu(r)$ между подотраслями:

$$\Delta C_{k\mu}(r) = \frac{\Delta B_\mu(r)}{\sum_k 1/\bar{\pi}_{k\mu}(r)} \cdot \frac{1}{\bar{\pi}_{k\mu}(r)}, \quad k = 1, \ldots, l \tag{8}$$

д) Определение размеров ресурсов $C_{kl}(r+1)$.

Объем ресурсов, выделяемых для решения задач (2) на шаге $r+1$, определяется как сумма ресурсов, обеспечивающих выполнение уже достигнутого уровня выпуска конечной продукции (общего для всей системы) и ресурсов, перераспределяемых обратно пропорционально оценкам для сдвига з достигнутого общего уровня.

$$C_{k\mu}(r+1) = \bar{C}_{k\mu}(r) + \Delta C_{k\mu}(r); \; k=1,\dots,\ell. \qquad (9)$$

Для $i \neq \mu$ $C_{ki}(r+1) = C_{ki}(r)$, $k=1,\dots,\ell$.

Следующий шаг алгоритма начинается с решения задач (2) при выделенных ресурсах $C_{k\mu}(r+1)$ и $C_{ki}(r)$ для $i \neq \mu$.

§ 4. Общее исследование алгоритма распределения ресурсов в отрасли

На каждом шаге r для всей системы задач (2) допустимым значением уровня конечного выпуска будет минимальный уровень, достигаемый в подотрасли $k=m$. Значение функционала на шаге r будет, следовательно, равно $Z_m(r)$.

Как уже отмечалось выше, определение ресурсов, необходимых для выполнения каждой подотраслью допустимого уровня конечного выпуска (равного $Z_m(r)$), по формулам (5) обусловливает достижение этого уровня и на следующем шаге. Так как мы уменьшаем значение ресурсов $C_{k\mu}(r)$ для всех $k \neq m$ при сдвиге на минимальный уровень $Z_m(r)$, то всегда, когда не достигнут единый общий уровень конечного выпуска, будет выполняться условие, что

$$B_\mu > \sum_k \bar{C}_{k\mu}(r).$$

В этом случае свободный остаток ресурса, подлежащий перераспределению $\Delta B_\mu(r) > 0$.

Изымая ресурсы у всех подотраслей, превысивших минимальный уровень конечного выпуска, и добавляя всем подотраслям дополнительно часть ресурса $\Delta B_\mu(r)$, исчисляемую по формулам (7), (8), мы получим при решении задач (2) на всех последующих шагах, что

$$\min_k Z_k(r) < \min_k Z_k(r+1) < \dots \qquad (10)$$

Очевидно, что данная последовательность (I0) является ограниченной, т.к. каждый из технологических способов задач (2) имеет ограничение на интенсивность его использования и заданный размер общих ресурсов ограничивает суммарную интенсивность этих способов. Поскольку последовательность (I0) монотонно возрастающая и ограниченная, то существует предел (некоторое положительное число P), к которому данная последовательность сходится:

$$\lim_{r \to \infty} \min_k Z_k(r) = P.$$

Очевидно, что при достижении минимального уровня конечного выпуска, равного P, мы получаем при некотором $r = \alpha$, что

$$Z_1(\alpha) = \ldots \; . = Z_\ell(\alpha) = P. \qquad (II)$$

Предположим, что при $r = \alpha$ не выполняется условие (II). В этом случае произведем изъятие ресурсов по минимальному уровню конечного выпуска и распределим свободный излишек по формулам (7), (8) между всеми подотраслями. Тогда получим, что

$$\min_k Z_k(\alpha + 1) > P.$$

В силу того, что число P является пределом последовательности (I0), данное условие не может иметь места и, следовательно, справедливо условие (II).

Таким образом, описанный процесс распределения ресурсов в отрасли приводит к равному и максимальному уровню производства конечной продукции для всех задач (2). По-видимому, нельзя доказать, что в общем случае распределение ресурсов между подотраслями по описанному алгоритму приводит к решению задачи (I). Однако проведенная серия экспериментальных расчетов показала, что последовательность допустимых значений уровней производства задач (2) приводит к решению задачи (I), т.е. к решению задач подотраслей в рамках единой задачи линейного программирования, с точностью до заданного ε .

§ 5. Некоторые практические расчеты по реализации алгоритма распределения ресурсов в отрасли

Данный алгоритм управления развитием отрасли посредством распределения ресурсов между подотраслями был реализован на задаче перспективного планирования отрасли "Приборостроение". Задача рассчитывалась как динамическая, т.е. включала в себя два периода планирования – девятую и десятую пятилетки. Требовалось определить на каждую пятилетку распределение ресурсов (капиталовложений в виде машин и оборудования и в виде строительно-монтажных работ) между четырьмя подотраслями при достижении общего максимального уровня производства конечной продукции.

Общая задача отрасли представляла собой задачу большой размерности: 218 ограничений на 612 переменных. Данная задача решалась по изложенному выше алгоритму на ЭВМ М-220 и при заданном $\varepsilon = 0{,}02$ заняла 35 минут машинного времени. Задание более высокой точности в экономических задачах не имеет смысла, т.к. они оперируют с информацией, точность которой будет гораздо меньше. Результаты расчетов приведены на рис.4.

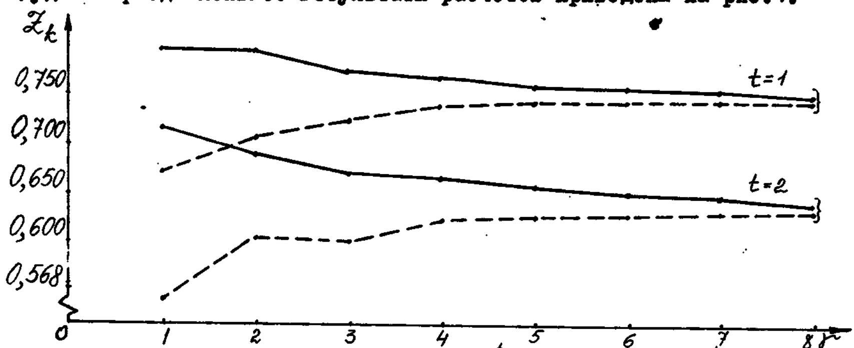

Рис. 4. Динамика $\min\limits_k \mathcal{Z}_k^t(r)$ и $\max\limits_k \mathcal{Z}_k^t(r)$.

В результате расчетов на шаге $r=8$ было получено: для первого периода планирования –

$$\frac{\max\limits_k \mathcal{Z}_k^1(8) - \min\limits_k \mathcal{Z}_k^1(8)}{\min\limits_k \mathcal{Z}_k^1(8)} = \frac{0{,}651-0{,}643}{0{,}643} = 0{,}013 < \varepsilon,$$

для второго периода планирования –

$$\frac{\max\limits_{k} Z_k^2(8) - \min\limits_{k} Z_k^2(8)}{\min\limits_{k} Z_k^2(8)} = \frac{0,735-0,732}{0,732} = 0,003 < \varepsilon.$$

Другими словами, разброс в значениях минимального и максимального уровня выпуска конечной продукции по подотраслям составил для первого планового периода 1,3%, для второго – 0,3%.

Значение функционала (суммарный конечный выпуск отрасли), полученное на шаге $r = 8$ было на 500 млн. руб. больше, чем значение функционала, полученное из решения подотраслевых задач при директивном распределении ресурсов.

Если же директивное решение рассматривать с точки зрения общего допустимого уровня выпуска конечной продукции (т.е. по минимальному уровню, достигнутому в некоторой подотрасли $k = m$), то значение функционала было в 2,5 раза ниже, чем при решении задачи с помощью рассмотренного выше алгоритма.

В заключение следует отметить, что изложенный выше алгоритм распределения ресурсов в отрасли можно рассматривать с двух точек зрения.

С математической точки зрения данный алгоритм представляет собой итеративный метод решения блочно-диагональных задач большой размерности, которые можно свести к задаче (I). Как было показано, алгоритм приводит к достижению единого равного и максимального значения уровня производства конечной продукции для всех подотраслей, описываемых как задачи (2). В данной работе не доказывается, что решение отдельных задач (2), проводимое при предложенном выше методе распределения ресурсов, приводит к решению общей задачи отрасли, сформулированной как задача (I). Экспериментальные расчеты показали, что такое решение практически достигается с точностью до заданного ε .

Преимуществом данного алгоритма является отсутствие координирующей части, что позволяет решать на ЭВМ средней мощности задачи с блочно-диагональной структурой матриц (вида задачи (I)) сколь угодно большой размерности при условии, что каждую из подзадач (2) можно решать при помощи стандартной программы линейного программирования. Другими словами, число задач (2) не ограничено, но размерность самой подзадачи (2) ограничена возможностью используемой стандартной программы линейного программирования. Ввиду того, что каждая из подзадач (2) будет небольшой по размерности, каждая из итераций алгоритма займет небольшое время использования ЭВМ. Так, при расчете задачи "Приборостроение" одна итерация занимала 4 минуты 20 секунд. Для достижения равного и максимального значения уровня производства для всех подзадач (2) с точностью разброса уровней, не превосходящей 2%, потребовалось на восемь итераций всего 35 минут на ЭВМ средней мощности - М-220.

С экономической точки зрения изложенный алгоритм моделирует процесс управления подотраслями (предприятиями) посредством распределения общих ресурсов для достижения общего отраслевого максимального выпуска конечной продукции. При постановке задачи необходимо учитывать, что реализация изложенного процесса распределения ресурсов возможна, если все предприятия, производящие одноименную продукцию, находятся в одной подзадаче (2).

Преимущества данного подхода к распределению ресурсов в отрасли заключаются в следующем:

I. В управляющий орган (министерство) поступает небольшой объем информации. Это-информация о достигнутых уровнях конечного выпуска ($Z_k(r)$, k =I,..., l) и об оценках распределяемых ресурсов ($\pi_{ki}(r)$, i =I,...,n_0, k =I,..., l), т.е. всего $l(1+n_0)$ чисел. Здесь l - число подотраслей, n_0 - число распределяемых ресурсов.

2. Для выработки сигнала о новых размерах ресурсов управляющему органу системы нет необходимости решать какую-либо задачу в агрегированном (или ином)виде . Для этого проводится ряд несложных вычислительных операций по формулам (5) - (9).

3. Возможность решения задач распределения ресурсов в отрасли практически любой размерности.

4. Небольшие затраты машинного времени позволяют провести за короткое время серию расчетов, необходимых обычно для сравнения различных модельных подходов при формулировке как общей отраслевой модели, так и моделей отдельных подотраслей и предприятий.

В последующих работах автор предполагает рассмотреть общую проблему распределения ресурсов в отрасли в различных её постановках и место данного алгоритма в решении этой задачи.

Поступила в ред.-изд. отд.
5. IX. 1972 г.