1973 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 10(27)

УДК 519.3

ПРИНЦИП МИНИМАКСА В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ

Т.К. Виноградова, В.Ф. Демьянов

1.^{0} Пусть на $[0,T]$ ($T>0$ фиксировано) задана система дифференциальных уравнений

$$\frac{dX(t)}{dt} = f(X(t), u(t), t), \tag{1}$$

$$X(0) = X_0 . \tag{2}$$

Здесь $X = (x_1, \ldots, x_n)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $u = (u_1, \ldots, u_r)$, вектор-функция $f(X,u,t)$ непрерывна по t и имеет непрерывные частные производные по X и u, удовлетворяющие условию Липшица и ограниченные при всех допустимых X, u, t.

Вектор-функция $u(t) \in L_2[0,T]$ и при всех $t \in [0,T]$ удовлетворяет ограничению $u(t) \in W \subset E_r$, где W - выпуклое компактное множество. Такие функции $u(t)$ будем называть допустимыми управлениями. Их множество обозначим через U. Для любого $u \in U$ через $X(t,u)$ обозначим решение системы (1) с начальным условием (2).

Пусть

$$J(u,z) = \int_0^T g(X(t,u), u(t), t, z)\, dt, \tag{3}$$

где $z \in Z$, $Z \subset E_p$ – компактное множество, вещественная функция $g(X,u,t,z)$ непрерывна по t и z и имеет ограниченные непрерывные частные производные по X и u, удовлетворяющие условию Липшица.

Введем обозначение

$$J(u) = \max_{z \in Z} J(u,z)$$

Управление $u^* \in U$ оудем называть оптимальным, если

$$J(u^*) = \min_{u \in U} J(u) \qquad (4)$$

Положим

$$R(u) = \left\{ z \in Z \mid J(u,z) = J(u) \right\}.$$

Очевидно, $R(u)$ – компактное множество.
используя [I,2], можно получить следующий результат

ТЕОРЕМА I. Для того, чтобы управление $u^* \in U$ удовлетворяло (4), необходимо, чтобы

$$\min_{u \in U} \max_{z \in R(u^*)} \int_0^T \sum_{j=1}^{r} \left[\left(\frac{\partial f(\tau)}{\partial u_j} \right)^* \psi_z(\tau) + \frac{\partial g_z(\tau)}{\partial u_j} \right] \left(u_j(\tau) - u_j^*(\tau) \right) d\tau = 0, \qquad (5)$$

где

$$f(\tau) = f(X(\tau, u^*), u^*(\tau), \tau),$$

$$g_z(\tau) = g(X(\tau, u^*), u^*(\tau), \tau, z),$$

$$\frac{d\psi_z(\tau)}{d\tau} = -\left(\frac{\partial f(\tau)}{\partial X}\right)^* \psi_z(\tau) - \frac{\partial g_z(\tau)}{\partial X},$$

$$\psi_z(T) = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial g_z}{\partial X} = \left(\frac{\partial g_z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial g_z}{\partial x_n}\right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial X} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Условие (5) является обобщением на минимаксный случай "линеаризованного принципа максимума " (см., например, [3]).Если множество Z состоит из единственной точки, то (3) имеет вид

$$J(u) = \int_0^T g\big(X(t,u), u(t), t\big)\, dt, \tag{7}$$

и (см. [4-7]) оптимальное управление $u^* \in U$, доставляющее минимум функционалу (7), должно удовлетворять следующему условию (принцип максимума Л.С. Понтрягина):

$$\min_{v \in W}\Big[f\big(X(\tau,u^*), v, \tau\big)\psi(\tau) + g\big(X(\tau,u^*), v, \tau\big)\Big] =$$

$$= f\big(X(\tau,u^*), u^*(\tau), \tau\big)\psi(\tau) + g\big(X(\tau,u^*), u^*(\tau), \tau\big) \tag{8}$$

почти для всех $\tau \in [0,T]$. Здесь $\psi(\tau)$ удовлетворяет (6) (где отсутствует индекс z).

Естественно ожидать, что условие (8) обобщается на рассматриваемый нами случай. Действительно, вводя игольчатые вариации (см. [4-5]) и рассуждая как, в [4-7] , получим такое условие.

ТЕОРЕМА 2. Для того, чтобы управление $u^* \in U$ удовлетворяло (4), необходимо, чтобы почти для всех $\tau \in [0, T]$ выполнялось соотношение

$$\min_{v \in W} \max_{z \in R(u^*)} \left[H_z(X(\tau, u^*), v, \tau) - H_z(X(\tau, u^*), u^*(\tau), \tau) \right] = 0, \quad (9)$$

где

$$H_z(X(\tau, u^*), v, \tau) = f(X(\tau, u^*), v, \tau) \Psi_z(\tau) + g(X(\tau, u^*), v, \tau, z).$$

Условие (9) назовем поточечным принципом минимакса. Оказывается, условие (9) может быть усилено.

ТЕОРЕМА 3. Для того, чтобы управление $u^* \in U$ удовлетворяло (4), необходимо, чтобы

$$\min_{u \in U} \max_{z \in R(u^*)} \int_0^T \left[H_z(X(\tau, u^*), u(\tau), \tau) - H_z(X(\tau, u^*), u^*(\tau), \tau) \right] d\tau = 0. \quad (10)$$

Условие (10) назовем интегральным принципом минимакса. Очевидно, что условие (10) является " более необходимым" , чем условие (9). Сравнивая (10) с (5) , можно заметить, что (5) является в некотором смысле линеаризацией условия (10). Доказательство теоремы 3 основано на использовании игольчатых вариаций по нескольким отрезкам (см., например, [4-6]) ЗАМЕЧАНИЕ. Можно также доказать, что условие (9) справедливо и для других классов управлений (например, интегрального типа).

2^0. Рассмотрим систему

$$\frac{dX(t)}{dt} = f(X(t), u(t), v(t), t), \tag{11}$$

$$X(0) = X_0. \tag{12}$$

Пусть

$$J(u,v) = \int_0^T g(X(t), u(t), v(t), t)\, dt,$$

где вектор-функция $f(X, u, v, t)$ и функция $g(X, u, v, t)$ непрерывны по t и имеют непрерывные частные производные по X, u, v, удовлетворяющие условию Липшица и ограниченные при всех допустимых X, u, v, t.

Вектор-функция $u(t)$ такая же, как и в начале пункта 1^0, вектор-функция $v \in L_2[0,T]$, $v(t) \in W_1 \subset E_s$ для всех $t \in [0,T]$, где W_1 - выпуклое компактное множество.

Множество таких управлений v обозначим через V.

Пусть $u \in U$, $v \in V$. Решение системы (11) с начальным условием (12) при выбранных u и v обозначим через $X(t, u, v)$.

Положим

$$J(u) = \sup_{v \in V} J(u,v).$$

Если для некоторого $u^* \in U$ оказалось

$$J(u^*) = \min_{u \in U} J(u),$$

то управление u^* называется оптимальным.

Пусть $u^* \in U$ - оптимальное управление.

Допустим, что все $\sup_{v \in V} J(u^*, v)$ достигаются. Их мно -

жество обозначим через $R(u^*)$:

$$R(u^*) = \left\{ v^* \in V \;\middle|\; \mathfrak{J}(u^*, v^*) = \mathfrak{J}(u^*) \right\}.$$

По необходимому условию максимума (см. [4-7]) $v^* \in R(u^*)$ удовлетворяют соотношениям

$$\max_{w \in W} \Big[\Big(f^*(X(t, u^*, v^*), u^*(t), w, t) \psi_{u^*, v^*}(t) + $$
$$+ g(X(t, u^*, v^*), u^*(t), w, t) \Big] = f^*(t) \psi_{u^*, v^*}(t) + g(t)$$

почти для всех $t \in [0, T]$.

Здесь

$$\frac{d\psi_{u^*, v^*}(t)}{dt} = -\left(\frac{\partial f(t)}{\partial X} \right)^* \psi_{u^*, v^*}(t) - \frac{\partial g(t)}{\partial X},$$

$$\psi_{u^*, v^*}(T) = 0,$$

$$f(t) = f(X(t, u^*, v^*), u^*(t), v^*(t), t),$$

$$g(t) = g(X(t, u^*, v^*), u^*(t), v^*(t), t).$$

Справедлива следующая теорема, являющаяся обобщением условия (9)

ТЕОРЕМА 4. Для оптимальности управления $u^* \in U$ необходимо, чтобы

$$\min_{u \in U} \max_{v^* \in R(u^*)} \int_0^T \Big[f^*(X(t, u^*, v^*), u(t), v^*(t), t) \psi_{u^*, v^*}(t) +$$
$$+ g(X(t, u^*, v^*), u(t), v^*(t), t) - f^*(t) \psi_{u^*, v^*}(t) - g(t) \Big] dt = 0.$$

Литература

1. Демьянов В.Ф. К минимизации максимального уклонения, Вестник ЛГУ, № 7 (1966), 21-28.
2. Демьянов В.Ф. Оптимизация нелинейных систем управления при ограничениях на фазовые координаты, Вестник ЛГУ, № 13 (1966), 11-17.
3. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Минимизация гладкого выпуклого функционала на выпуклом множестве, Вестник ЛГУ, № 19 (1964), 5-17.
4. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф., Математическая теория оптимальных процессов, М., Физматгиз, 1961.
5. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления, М., "Наука," 1969.
6. Моисеев Н.Н. Численные методы в теории оптимальных систем, М., "Наука", 1971.
7. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов, М., "Наука," 1971.

Поступила в ред.-изд. отд.
6. XII. 1972 г.