УДК 519.8

УСКОРЕНИЕ СХОДИМОСТИ В НЕПРЕРЫВНЫХ МИНИМАКСНЫХ ЗАДАЧАХ

Л.Е. Брокан

Пусть имеются два множества $\mathcal{H}$ и Ω, заданные следующим ооразом:

$$\mathcal{H}=\{x\in E_n \mid h_j(x)\le 0,\ j\in \mathcal{J}=[1:N_1]\},$$
$$\Omega=\{y\in E_e \mid \omega_k(y)\le 0,\ k\in \mathcal{K}=[1:N_2]\},$$

где $h_j(x)$ и $\omega_k(y)$ – дважды непрерывно дифференцируемые, выпуклые функции. Очевидно, множества $\mathcal{H}$ и Ω являются выпуклыми и замкнутыми.

Пусть на множестве $\mathcal{H}\times\Omega$ задана функция $f(x,y)$, дважды непрерывно дифференцируемая по ооеим переменным и имеющая непрерывные смешанные производные.

Рассмотрим функцию $\varphi(x)=\max\limits_{y\in\Omega} f(x,y)$ и оудем минимизировать ее на множестве $\mathcal{H}$, т.е. искать такую точку $x^*\in\mathcal{H}$, что

$$\varphi(x^*)=\min_{x\in\mathcal{H}}\varphi(x)=\min_{x\in\mathcal{H}}\max_{y\in\Omega} f(x,y).$$

Для минимизации функции $\varphi(x)$ существуют различные итеративные методы, в том числе методы градиентного типа (см., напр.,[3]) и комбинированный метод, сочетающии наискорейший спуск с выравниванием максимумов (см.[2, 5]).

Недостаток градиентных методов заключается в том, что они, являясь методами первого порядка, медленно сходятся в "близкой" окрестности стационарных точек. Поэтому на заключительном этапе вычислений используются методы более высокого порядка. Для дискретных минимаксных задач такие методы были разработаны в [I, 2].

В настоящей работе результаты из [I] обобщаются на случай непрерывных минимаксных задач. Пусть $x \in \mathcal{H}$, $y \in \Omega$. Введем множества: $R(x)=\{y \in \Omega \mid \varphi(x)=f(x,y)\}$;

$$Q^1(x)=\{j \in J \mid h_j(x)=0\};$$

$$Q^2(y)=\{k \in K \mid \omega_k(y)=0\}.$$

Последние два множества могут быть пустыми.

Будем далее предполагать, что:

а) матрицы $\dfrac{\partial^2 f(x^*,y_i^*)}{\partial x^2}$, где $y_i^* \in R(x^*)$, строго положительно определены;

б) матрицы $\dfrac{\partial^2 f(x^*,y_i^*)}{\partial y^2}$, строго отрицательно определены;

в) множество $R(x^*)$ конечно; тогда содержащиеся в нем точки можно перенумеровать: $y_1^*, y_2^*, \dots, y_m^*$ (условие в) будет, например, выполняться, если множество Ω ограничено; изолированность точек y_i^* следует из б));

г) для множеств $\mathcal{H}$ и Ω выполнены условия Слейтера, а именно: $\min\limits_{x\in\mathcal{H}} \max\limits_{j\in J} h_j(x) < 0$, $\min\limits_{y\in\Omega} \max\limits_{k\in K} \omega_k(y) < 0$ (отсюда следует, что множества $\mathcal{H}$ и Ω имеют внутренние точки).

Тогда для того, чтобы точка x^* была точкой локального (по крайней мере) минимума функции $\varphi(x)$ на $\mathcal{H}$, необходимо и достаточно (см. [3, 4, 6]), чтобы существовали такие неотрицательные коэффициенты α_i^*, β_j^*, что

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^* \frac{\partial f(x^*,y_i^*)}{\partial x} + \sum_{j\in Q^1(x^*)} \beta_j^* \frac{\partial h_j(x^*)}{\partial x} = 0, \text{ причем, } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^* = 1, \quad (I)$$

а для того, чтобы точки y_i^* были точками локального (по крайней мере) максимума функции $f(x^*,y)$ на Ω, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие неотрицательные коэффициенты λ^*_{ik}, что

$$\sum_{k\in Q^2(y_i^*)} \lambda^*_{ik} \frac{\partial \omega_k(y_i^*)}{\partial y} - \frac{\partial f(x^*,y_i^*)}{\partial y} = \mathbb{0} \text{ для всех } i\in[1:m]. \quad (2)$$

Представления (I) и (2) могут быть неединственными. Выберем из них минимальные, т.е. такие, которые содержат наименьшее число положительных коэффициентов (вообще говоря, даже эти представления могут быть неединственными). Допустим, что минимальные представления, соответствующие (I) и (2), имеют вид :

$$\sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i^* \frac{\partial f(x^*,y_i^*)}{\partial x} + \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j^* \frac{\partial h_j(x^*)}{\partial x} = \mathbb{0} ; \quad (3)$$

$$\sum_{s=1}^{n_i} \lambda^*_{is} \frac{\partial \omega_{is}(y_i^*)}{\partial y} - \frac{\partial f(x^*,y_i^*)}{\partial y} = \mathbb{0},\ i\in[1:m_1]. \quad (4)$$

Здесь $\left\{y_i^* \mid i\in[1:m_1]\right\} \subset R(x^*)$;

$$\left\{j\in[1:m_2]\right\} \subset Q^1(x^*);$$

$$\left\{\omega_{is}(y) \mid s\in[1:n_i]\right\} \subset \left\{\omega_k(y) \mid k\in Q^2(y_i^*)\right\} \text{ для } i\in[1:m_1].$$

Очевидно, среди функций $\omega_{is}(y)$ с разными индексами i одни и те же функции $\omega_k(y), k\in K$, могут встречаться несколько раз. Коэффициенты представлений (3), (4) строго положительны.

Если представления (3), (4) минимальны, то (см., напр., [4], стр. 783) векторы

$$\frac{\partial f(x^*,y_i^*)}{\partial x} - \frac{\partial f(x^*,y_{m_1}^*)}{\partial x},\ i\in[1:m_1-1];\ \frac{\partial h_j(x^*)}{\partial x},\ j\in[1:m_2], \quad (5)$$

линейно-независимы в совокупности (если $m_1=1$, то это относится к векторам $\frac{\partial h_j(x^*)}{\partial x}, j\in[1:m_2]$), а векторы

$$\frac{\partial \omega_{is}(y_i^*)}{\partial y},\ s\in[1:n_i], \quad (6)$$

линейно-независимы для всех $i \in [1:m_1]$.

Теперь рассмотрим систему:

$$\left\{\begin{array}{l}
\sum\limits_{i=1}^{m_1} \alpha_i \frac{\partial f(x,y_i)}{\partial x} + \sum\limits_{j=1}^{m_2} \beta_j \frac{\partial h_j(x)}{\partial x} = \mathbb{0}\,; \\
f(x,y_i) - f(x,y_{m_1}) = 0,\ i \in [1:m_1-1]\,; \\
h_j(x) = 0,\ j \in [1:m_2]\,; \\
\sum\limits_{s=1}^{n_i} \lambda_{is} \frac{\partial \omega_{is}(y_i)}{\partial y} - \frac{\partial f(x,y_i)}{\partial y} = \mathbb{0},\ i \in [1:m_1]\,; \\
\omega_{1s}(y_1) = 0,\ s \in [1:n_1]\,; \\
\omega_{2s}(y_2) = 0,\ s \in [1:n_2]\,; \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
\omega_{m_1 s}(y_{m_1}) = 0,\ s \in [1:n_{m_1}]\,; \\
\sum\limits_{i=1}^{m_1} \alpha_i = 1\,; \\
\alpha_i > 0, i \in [1:m_1]\,; \beta_j > 0, j \in [1:m_2]\,; \lambda_{is} > 0, i \in [1:m_1], s \in [1:n_i].
\end{array}\right. \qquad (7)$$

Здесь неизвестными являются :

$$\begin{array}{l}
x = (x_1, \dots, x_n)\,; \\
\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{m_1})\,; \\
\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{m_2})\,; \\
y_i = (y_{i1}, \dots, y_{i\ell}),\ i \in [1:m_1]\,; \\
\lambda_i = (\lambda_{i1}, \dots, \lambda_{in_i}),\ i \in [1:m_1].
\end{array}$$

Число уравнений системы (7) равно числу неизвестных и равно $n + m_1 + m_2 + m_1 \times \ell + \sum\limits_{i=1}^{m_1} n_i$. Точка $W^* = (x^*, \alpha^*, \beta^*, y_1^*, \dots, y_{m_1}^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_{m_1}^*)$ удовлетворяет системе (7), значит, решение системы (7) существует.

Из последнего уравнения системы имеем:

$$\alpha_{m_1} = 1 - \sum_{i=1}^{m_1-1} \alpha_i\,.$$

Подставив это в первое уравнение, получим :

$$
\begin{cases}
\sum\limits_{i=1}^{m_1-1} \alpha_i \left(\dfrac{\partial f(x,y_i)}{\partial x} - \dfrac{\partial f(x,y_{m_1})}{\partial x} \right) + \dfrac{\partial f(x,y_{m_1})}{\partial x} + \sum\limits_{j=1}^{m_2} \beta_j \dfrac{\partial h_j(x)}{\partial x} = \mathbb{0}; \\
f(x,y_i) - f(x,y_{m_1}) = 0, \ i \in [1:m_1-1]; \\
h_j(x) = 0, \ j \in [1:m_2]; \\
\sum\limits_{s=1}^{n_i} \lambda_{is} \dfrac{\partial \omega_{is}(y_i)}{\partial y} - \dfrac{\partial f(x,y_i)}{\partial y} = \mathbb{0}, \ i \in [1:m_1]; \\
\omega_{1s}(y_1) = 0, \ s \in [1:n_1]; \\
\omega_{2s}(y_2) = 0, \ s \in [1:n_2]; \\
\dots\dots\dots\dots \\
\omega_{m_1 s}(y_{m_1}) = 0, \ s \in [1:n_{m_1}]; \\
\alpha_i > 0, i \in [1:m_1]; \ \beta_j > 0, j \in [1:m_2]; \ \lambda_{is} > 0, i \in [1:m_1], s \in [1:n_i].
\end{cases} \tag{8}
$$

(Число неизвестных, как и число уравнений, теперь уменьшилось на единицу.).

Для того, чтобы построить и решить систему (8) каким-либо итеративным методом второго порядка, нужно иметь хорошее начальное приближение к x^*. Его можно получить с помощью методов первого порядка.

Введем множества :

$$
\mathcal{R}_\varepsilon(x) = \left\{ y = y_i(x) \in \Omega \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \le \varphi(x) - f(x, y_i(x)) \le \varepsilon, \ \varepsilon > 0; \\ y_i(x) \ - \text{точка локального максимума функции } f(x,y) \text{ на } \Omega \end{array} \right\};
$$

$$
Q^1_\mu(x) = \left\{ j \in \mathcal{J} \;\middle|\; -\mu \le h_j(x) \le 0, \mu > 0 \right\};
$$

$$
Q^2_\nu(y) = \left\{ \kappa \in \mathcal{K} \;\middle|\; -\nu \le \omega_\kappa(y) \le 0, \ \nu > 0 \right\}.
$$

Можно показать, что существуют такие $\delta > 0$, $\varepsilon > 0, \mu > 0, \nu > 0$, что при $\|x - x^*\| \le \delta$ верно следующее:

а) множество $\mathcal{R}_\varepsilon(x)$ содержит такое же число точек, что и множество $\mathcal{R}(x^*)$, причем эти точки $y_i(x)$ близки к точкам y_i^* ;

б) множество $Q^1_\mu(x)$ совпадает с множеством $Q^1(x^*)$;

в) множества $Q^2_\nu(y_i(x))$ совпадают с множествами $Q^2(y_i^*)$.

Итак, зная множества $\mathcal{R}_\varepsilon(x)$, $Q^1_\mu(x)$, $Q^2_\nu(y_i(x))$ при x, достаточно близких к x^* и соответствующих ε, μ, ν, мы мы уже имеем информацию о множествах $\mathcal{R}(x^*)$, $Q^1(x^*)$, $Q^2(y_i^*)$. Множества же $\{y_i^* \mid i\in[1:m_1]\}$, $\{h_j(x) \mid j\in[1:m_2]\}$, $\{\omega_{is}(y) \mid s\in[1:n_i]\}$ для $i\in[1:m_1]$ могут быть выделены соответственно из множеств $\mathcal{R}(x^*)$, $\{h_j(x) \mid j\in Q^1(x^*)\}$, $\{\omega_k(y) \mid k\in Q^2(y_i^*)\}$ для $i\in[1:m_1]$ с помощью соображений линейной независимости векторов (5),(6) (т.е. из соображений минимальности представлений (3),(4)).

Пусть x_0 -начальное приближение для x^*, полученное каким-либо методом первого порядка, например, методом наискорейшего спуска. При этом могут быть получены также начальные приближения для остальных неизвестных, а именно : $\alpha(x_0)$ для α^* ; $\beta(x_0)$ для β^* ; $y_i(x_0)$ для y_i^* , $i\in[1:m_1]$; $\lambda_i(x_0)$ для λ_i^* , $i\in[1:m_1]$. Естественно, все эти приближения зависят от x_0 (что и отражено в их обозначениях).

При $x_0 \longrightarrow x^*$ будет: $\alpha(x_0)\longrightarrow\alpha^*$; $\beta(x_0)\longrightarrow\beta^*$; $y_i(x_0)\longrightarrow y_i^*$, $i\in[1:m_1]$; $\lambda_i(x_0)\longrightarrow\lambda_i^*$, $i\in[1:m_1]$.

При этом невязки системы (8) стремятся к нулю.

Рассмотрим матрицу Якоби для системы (8) в точке x^* . Обозначим ее $S(x^*)$ и запишем в виде:

$$
S(x^*)=\left(\begin{array}{cccccccc}
 & n & m_1-1 & m_2 & m_1\times l & \sum_{i=1}^{m_1} n_i & \\
n & \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & \mathcal{A}_3 & C_\alpha & \mathbb{0} & \text{I г.н.}\\
m_1-1 & \mathcal{A}_2' & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathcal{D} & \mathbb{0} & \text{II г.н.}\\
m_2 & \mathcal{A}_3' & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \text{III г.н.}\\
m_1\times l & -C' & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_2 & \text{IV г.н.}\\
\sum_{i=1}^{m_1} n_i & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathbb{0} & \mathcal{B}_2' & \mathbb{0} & \text{V г.н.}\\
 & \text{I в.н.} & \text{II в.н.} & \text{III в.н.} & \text{IV в.н.} & \text{V в.н.} &
\end{array}\right)
$$

Каждая клетка, на которые разделена матрица $S(x^*)$, представляет собой блок-матрицу (размерности этих блок-матриц указаны слева и вверху).

Символами "$\mathbb{O}$" обозначены нулевые матрицы соответствующих размерностей, штрих означает транспонирование. Здесь

$$\mathcal{A}_1 = \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i^* \frac{\partial^2 f(x^*, y_i^*)}{\partial x^2} + \sum_{j=1}^{m_2} \beta_j^* \frac{\partial^2 h_j(x^*)}{\partial x^2};$$

$$\mathcal{A}_2 = \left(\frac{\partial f(x^*, y_1^*)}{\partial x} - \frac{\partial f(x^*, y_{m_1}^*)}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial f(x^*, y_{m_1-1}^*)}{\partial x} - \frac{\partial f(x^*, y_{m_1}^*)}{\partial x} \right);$$

$$\mathcal{A}_3 = \left(\frac{\partial h_1(x^*)}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial h_{m_2}(x^*)}{\partial x} \right);$$

$$\mathcal{B}_1 = \begin{pmatrix} \sum\limits_{s=1}^{n_1} \lambda_{1s}^* \frac{\partial^2 \omega_{1s}(y_1^*)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f(x^*, y_1^*)}{\partial y^2}, & \mathbb{O}_{\ell \times (m_1-1)\ell} \\ \vdots & \ddots \\ \mathbb{O}_{\ell \times (m_1-1)\ell}, & \sum\limits_{s=1}^{n_{m_1}} \lambda_{m_1 s}^* \frac{\partial^2 \omega_{m_1 s}(y_{m_1}^*)}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f(x^*, y_{m_1}^*)}{\partial y^2} \end{pmatrix};$$

$$-C' = \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 f(x^*, y_1^*)}{\partial y \partial x} \\ \vdots \\ -\frac{\partial^2 f(x^*, y_{m_1}^*)}{\partial y \partial x} \end{pmatrix};$$

$$C_\alpha = \left(\alpha_1^* \frac{\partial^2 f(x^*, y_1^*)}{\partial x \partial y}, \ldots, \alpha_{m_1}^* \frac{\partial^2 f(x^*, y_{m_1}^*)}{\partial x \partial y} \right);$$

$$
\mathfrak{D}=\begin{pmatrix}
\left(\frac{\partial f(x^*,y_1^*)}{\partial y}\right)', & \mathbb{O}_{1\times(m_1-2)\ell}, & \left(-\frac{\partial f(x^*,y_{m_1}^*)}{\partial y}\right)' \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
\mathbb{O}_{1\times(m_1-2)\ell}, & \left(\frac{\partial f(x^*,y_{m_1-1}^*)}{\partial y}\right)', & \left(-\frac{\partial f(x^*,y_{m_1}^*)}{\partial y}\right)'
\end{pmatrix};
$$

$$
\mathfrak{B}_2'=\begin{pmatrix}
\left(\frac{\partial \omega_{11}(y_1^*)}{\partial y}\right)', & \mathbb{O}_{1\times(m_1-1)\ell} \\
\vdots & \vdots \\
\left(\frac{\partial \omega_{1n_1}(y_1^*)}{\partial y}\right)', & \mathbb{O}_{1\times(m_1-1)\ell} \\
\vdots & \vdots \\
\mathbb{O}_{1\times(m_1-1)\ell}, & \left(\frac{\partial \omega_{m_1 1}(y_{m_1}^*)}{\partial y}\right)' \\
\vdots & \vdots \\
\mathbb{O}_{1\times(m_1-1)\ell}, & \left(\frac{\partial \omega_{m_1 n_{m_1}}(y_{m_1}^*)}{\partial y}\right)'
\end{pmatrix}
$$

Напомним, что все коэффициенты здесь строго положительны (следствие минимальности представлений (3),(4)).

Покажем, что матрица $S(x^*)$ неособенная. Для удобства изложения будем считать, что $S(x^*)$ состоит из пяти верти - кальных или пяти горизонтальных "полос". Выше эти "полосы" обозначены римскими цифрами (г.п.- горизонтальная полоса ; в.п. - вертикальная полоса).

Воспользуемся соотношениями :

$$
\frac{\partial f(x^*,y_i^*)}{\partial y}=\sum_{s=1}^{n_i}\lambda_{is}^*\,\frac{\partial \omega_{is}(y_i^*)}{\partial y}\;,\; i\in[1:m_1].
$$

Прибавляя к строкам II г.п. соответствующие линейные комбинации строк V г.п., получим:

$$\det S(x^*) = \det \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & \mathcal{A}_3 & C_\alpha & 0 \\ \mathcal{A}_2' & 0 & 0 & \mathcal{D} & 0 \\ \mathcal{A}_3' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C' & 0 & 0 & \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{B}_2' & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & \mathcal{A}_3 & C_\alpha & 0 \\ \mathcal{A}_2' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{A}_3' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C' & 0 & 0 & \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{B}_2' & 0 \end{pmatrix}$$

Разделим столбцы IУ в.п. на соответствующие коэффициенты α_i^* с тем, чтобы вместо матрицы C_α получилась матрица C. При этом преобразовании изменятся также матрицы $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2'$. Обозначим получившиеся из них матрицы $\mathcal{B}_1^\alpha$ и $(\mathcal{B}_2^\alpha)'$. Теперь умножим строки У г.п. на соответствующие коэффициенты α_i^* для того, чтобы вместо матрицы $(\mathcal{B}_2^\alpha)'$ снова получилась матрица $\mathcal{B}_2'$. Будем иметь :

$$\det S(x^*) = \prod_{i=1}^{m_1} (\alpha_i^*)^{\ell - n_i} \cdot \det \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & \mathcal{A}_3 & C & 0 \\ \mathcal{A}_2' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{A}_3' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C' & 0 & 0 & \mathcal{B}_1^\alpha & \mathcal{B}_2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{B}_2' & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим матрицу

$$\bar{S}(x^*) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 & \mathcal{A}_2 & \mathcal{A}_3 & C & 0 \\ \mathcal{A}_2' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{A}_3' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C' & 0 & 0 & \mathcal{B}_1^\alpha & \mathcal{B}_2 \\ 0 & 0 & 0 & \mathcal{B}_2' & 0 \end{pmatrix}$$

Здесь матрица $\mathcal{A}_1$ строго положительно определена, т.к. матрицы $\frac{\partial^2 f(x^*,y_i^*)}{\partial x^2}$, $i\in[1:m_1]$, строго положительно определены по предположению, а матрицы $\frac{\partial^2 h_j(x^*)}{\partial x^2}$, $j\in[1:m_2]$, положительно определены в силу выпуклости функций $h_j(x)$. Матрица $\mathcal{B}_1^d$ тоже строго положительно определена, т.к. она отличается от матрицы $\mathcal{B}_1$ лишь множителями диагональных матричных клеток, а матрица $\mathcal{B}_1$ является строго положительно определенной, т.к. матрицы $\frac{\partial^2 \omega_{is}(y_i^*)}{\partial y^2}$, $i\in[1:m_1]$, $s\in[1:n_i]$, положительно определены в силу выпуклости функций $\omega_{is}(y)$, а матрицы $\frac{\partial^2 f(x^*,y_i^*)}{\partial y^2}$, $i\in[1:m_1]$, строго отрицательно определены по предположению, следовательно, матрицы $-\frac{\partial^2 f(x^*,y_i^*)}{\partial y^2}$, $i\in[1:m_1]$, строго положительно определены. Кроме того, совокупность векторов (5), образующая матрицы $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{A}_3$, линейно-независима, а векторы (6) линейно-независимы при всех $i\in[1:m_1]$. Тогда все столбцы матрицы $\mathcal{B}_2$ являются линейно-независимыми в совокупности.

Теперь нетрудно показать, что $\det\bar{S}(x^*)\neq 0$. Но $\det S(x^*)$ отличается от $\det\bar{S}(x^*)$ лишь ненулевым множителем. Значит, $\det S(x^*)\neq 0$, т.е. матрица $S(x^*)$ является неособенной.

Следовательно, в точке x^* матрица Якоби для системы (8) является неособенной. Тогда (по непрерывности) это же будет верно и для некоторой окрестности точки x^*.

Итак, мы получили, что

а) матрица Якоби для системы (8) является неособенной в некоторой окрестности точки x^*;

б) невязка системы (8) может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора начального приближения для x^*

Выполнение этих двух условий дает возможность применять для решения системы (8) метод Ньютона и гарантирует его сходимость.

ЗАМЕЧАНИЯ. I. Система (8) значительно упрощается, если $\mathcal{X} = E_n$ или $\Omega = E_\ell$. Например, при выполнении обоих этих условий она имеет вид :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m_1-1} \alpha_i \left(\frac{\partial f(x,y_i)}{\partial x} - \frac{\partial f(x,y_{m_1})}{\partial x} \right) + \frac{\partial f(x,y_{m_1})}{\partial x} = \mathbb{O} ; \\ f(x,y_i) - f(x,y_{m_1}) = 0 , \; i \in [1:m_1-1] ; \\ \frac{\partial f(x,y_i)}{\partial y} = \mathbb{O} , \; i \in [1:m_1] \end{cases}$$

2. Очевидно, $m_1 + m_2 \leq n+1$, а все $n_i \leq \ell$, $i \in [1:m_1]$. Особый интерес представляет случай, когда $m_1 + m_2 = n+1$; $n_i = \ell$, $i \in [1:m_1]$

Тогда для нахождения точки x^* достаточно решить систему :

$$\begin{cases} f(x,y_i) - f(x,y_{m_1}) = 0 , \; i \in [1:m_1-1] ; \\ h_j(x) = 0 , \; j \in [1:m_2] ; \\ \omega_{is}(y_i) = 0 , \; i \in [1:m_1] , s \in [1:\ell] . \end{cases}$$

Я благодарю Демьянова В.Ф. за большую помощь в работе и Малоземова В.Н. за ценные замечания.

Литература

I. Демьянов В.Ф. Ускорение сходимости при решении минимаксных задач. Ж. вычисл.матем. и матем.физ., I2:I (I972), 5I-60.

2. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. К теории нелинейных минимаксных задач. Успехи матем.наук, 26:3 (I59) (I97I), 53-I04.

3. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. М., "Наука," I972.

4. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., "Мир," I964.

5. Митчелл Б.Ф. Метод выравнивания максимумов. В сб."АЛГОЛ-процедуры ". Л., Изд-во ВЦ ЛГУ, 1972, № 9.

6. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума. М.,"Наука," 1969.

Поступила в ред.-изд. отд.
6. XII. 1972 г.