УДК 519.8

МИНИМАКСИМИННАЯ ЗАДАЧА С ВЫРОЖДЕННОЙ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИЕЙ

В. Н. Малоземов

1.[0] Приводится полное исследование следующей задачи :

$$\max_{\{x_i\}} \min_{i\in 1:n} f_i(x_i) g_i(y_i) \longrightarrow \min_{\{y_i\}}, \tag{1}$$

где

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = a, \qquad x_i \geqslant 0; \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = b, \qquad y_i \geqslant 0 \tag{3}$$

$$(a>0,\ b>0,\ n\geqslant 2).$$

Начнем с одной леммы, имеющей и самостоятельный интерес.

ЛЕММА. Пусть $\mathcal{F}_i(t)$, $i\in 1:n$, - непрерывные строго возрастающие на $[0,a]$

функции, равные нулю при $t=0$. Тогда задача

$$\min_{i\in 1:n} \mathcal{F}_i(x_i) \longrightarrow \max_{\{x_i\}} \tag{4}$$

при ограничениях (2) имеет единственное решение:

$$x_i^* = \mathcal{F}_i^{-1}(t^*),$$

где t^* - единственный положительный корень уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i^{-1}(t) = a. \tag{5}$$

При этом справедливо равенство

$$\max_{\{x_i\}} \min_{i\in 1:n} \mathcal{F}_i(x_i) = t^*. \tag{6}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначения

$$h(t)=\sum_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i^{-1}(t), \qquad c=\min_{i\in 1:n} \mathcal{F}_i(a)$$

Функция $h(t)$ является непрерывной и строго возрастающей на $[0,c]$, причем $h(0)=0$ и $h(c)>a$. Значит, уравнение (5) имеет единственный положительный корень. Обозначим его через t^*. Покажем, что числа

$x_i^* = \mathcal{F}_i^{-1}(t^*),\ i \in 1:n$, дают решение задачи (4) .

Прежде всего, очевидно, что эти числа удовлетворяют ограничениям (2) . В дальнейшем через Ω_1 будем обозначать множество векторов $X = (x_1, \dots, x_n)$, компоненты которых удовлетворяют (2). Положим $X^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ и

$$\varphi(X) = \min_{i \in 1:n} \mathcal{F}_i(x_i).$$

Требуется установить, что для любого $X \in \Omega_1$, $X \neq X^*$, будет $\varphi(X) < \varphi(X^*)$. Для этого заметим, что если $X \in \Omega_1$, $X \neq X^*$, то найдется индекс $i \in 1:n$, при котором

$$\mathcal{F}_i(x_i) < \mathcal{F}_i(x_i^*). \tag{7}$$

Действительно, если это не так, то

$$\mathcal{F}_i(x_i) \geq \mathcal{F}_i(x_i^*) \quad \forall i \in 1:n,$$

причем поскольку $X \neq X^*$, хотя бы один раз последнее неравенство выполняется как строгое. Но тогда получим

$$\sum x_i = \sum \mathcal{F}_i^{-1} \mathcal{F}_i(x_i) > \sum \mathcal{F}_i^{-1} \mathcal{F}_i(x_i^*) = \sum x_i^* = a,$$

т.е. $\sum x_i > a$, что невозможно. Итак, установлено (7). Отсюда следует, что $\varphi(X) < \mathcal{F}_i(x_i^*)$, а поскольку

$\mathcal{F}_1(x_1^*) = \dots = \mathcal{F}_n(x_n^*) = t^*$, то $t^* = \varphi(X^*)$ и

$$\varphi(X) < \varphi(X^*) \ .$$

Лемма доказана.

2.^{0} Обратимся к задаче (I). Предполагается, что функции $f_i(t)$ непрерывны, строго возрастают на $[0, a]$ и обращаются в нуль при $t=0$. Функции $g_i(t)$ считаются непрерывными и положительными на $[0, b]$. Через Ω_1 и Ω_2 будем обозначать множества векторов, компоненты которых удовлетворяют соответственно ограничениям (2) или (3).

Зафиксируем $\bar{Y} \in \Omega_2$, и пусть

$$\mu(\bar{Y}) = \max_{X \in \Omega_1} \min_{i \in 1:n} f_i(x_i) g_i(\bar{y}_i).$$

Согласно лемме, $\mu(\bar{Y})$ есть единственный положительный корень уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^{-1}\left(\frac{t}{g_i(\bar{y}_i)}\right) = a. \qquad (8)$$

Чтобы найти минимум $\mu(Y)$ по $Y \in \Omega_2$, нужно решить следующую задачу:

$$t \longrightarrow \min \qquad (9)$$

при ограничениях (3) и

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^{-1}\left(\frac{t}{g_i(y_i)}\right) = a. \qquad (10)$$

Покажем, что последняя задача имеет решение. Уравнение (10) определяет t как функцию от y : $t=t(y)$, причем в силу неравенств

$$0<\frac{t}{g_i(y_i)}<\min_{k\in 1:n} f_k(a)$$

эта функция является ограниченной на Ω_2 .

Докажем, что функция $t(y)$ непрерывна на Ω_2 . Для этого достаточно проверить, что из условия $y_s\to\bar{y}$ следует $t(y_s)\to t(\bar{y})$. Будем писать $t_s=t(y_s)$, $\bar{t}=t(\bar{y})$. Если $t_s\not\to\bar{t}$, то в силу ограниченности последовательности $\{t_s\}$ найдется подпоследовательность $\{t_{s_k}\}$, сходящаяся к некоторому числу $\bar{t}'\neq\bar{t}$. Переходя в равенстве

$$\sum_{i=1}^{n} f_i^{-1}\left(\frac{t_{s_k}}{g_i(y_i^{(s_k)})}\right)=a$$

к пределу при $s_k\to\infty$, получим, что уравнение (8) имеет два корня $\bar{t}'$ и $\bar{t}$. Но это исключено. Итак, функция $t(y)$ непрерывна на Ω_2 и , значит, достигает своего минимального значения. Тем самым доказана разрешимость задачи (9) при ограничениях (3) и (10).

Подытожим сказанное.

ТЕОРЕМА. Пусть $[t^*, y^*]$ - решение вспомогательной задачи (9) при ограничениях (3) и (10) . Тогда

$$\min_{y\in\Omega_2}\ \max_{x\in\Omega_1}\ \min_{i\in 1:n} f_i(x_i)g_i(y_i)=t^*,$$

причем минимум по Y достигается в точке Y^*, а соответствующий максимум по X – в точке X^* с координатами

$$x_i^* = f_i^{-1}\left(\frac{t^*}{g_i(y_i^*)}\right), \quad i \in 1:n.$$

3°. ПРИМЕР. Пусть

$$f_i(x_i) = x_i, \quad g_i(y_i) = v_i e^{-\alpha_i y_i},$$

где $v_i > 0$, $\alpha_i > 0$ при всех $i \in 1:n$. В этом случае уравнение (10) примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{t}{v_i e^{-\alpha_i y_i}} = a.$$

Отсюда

$$t = a \Big/ \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{v_i} e^{\alpha_i y_i}.$$

Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{v_i} e^{\alpha_i y_i} \longrightarrow max \qquad (11)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = b, \qquad y_i \geqslant 0.$$

поскольку функция в (11) строго выпуклая, то ее максимум на Ω_2 достигается в крайних точках. Таким образом,

$$\max_{y\in\Omega_2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{v_i} e^{\alpha_i y_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{v_i} + \max_{k\in 1:n} \left\{ \frac{e^{\alpha_k b} - 1}{v_k} \right\}. \quad (12)$$

Обозначим максимум в правой части (12) через T^*, индекс, на котором достигается этот максимум, через k^* (если таких индексов несколько, берем любой из них), а сумму $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{v_i} + T^*$ через M^*. Тогда

$$\min_{y\in\Omega_2} \max_{X\in\Omega_1} \min_{i\in 1:n} v_i x_i e^{-\alpha_i y_i} = \frac{a}{M^*},$$

причем минимум по y достигается на векторе y^*, у которого k^* - я компонента равна b, а остальные нулю. Соответствующий максимум по X достигается на векторе X^* с компонентами

$$x_i^* = \begin{cases} \dfrac{a}{M^* v_i}, & \text{если } i \neq k^*, \\ \dfrac{a}{M^* v_i} e^{\alpha_i b}, & \text{если } i = k^*. \end{cases}$$

4.[0] В заключение отметим, что минимаксиминные задачи другого вида исследовались в [1], глава VI.

Литература

1. Данскин Дж.М. Теория максимина. М., "Советское радио", 1970 .

Поступила в ред.-изд. отд.
6. XII. 1972 г.