УДК 519.8

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ СО СВЯЗАННЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Е.Ф.Войтон, Л.Н.Полякова

Задачи минимизации функции вида

$$\varphi(X) = \max_{Y\in\Omega} F(X,Y), \tag{1}$$

где $X\in E_n$ *, Ω – ограниченное замкнутое множество в E_m, достаточно полно изучены (см., например, [1]). В ряде случаев, представляющих практический интерес, в задачах вида (1) множество Ω зависит от состояния X, причем множество Ω задается системой неравенств. Ниже рассматривается одна из таких задач.

Требуется найти

$$\min_{X\in G} \max_{Y\in\Omega(X)} F(X,Y) \quad \text{или} \quad \max_{X\in G} \max_{Y\in\Omega(X)} F(X,Y), \tag{2}$$

где

$$G=\{X\in E_n \mid f_j(X,Y_0)\leqslant 0,\ \forall j\in J\},\quad \Omega=\{Y\in E_m \mid f_j(X,Y)\leqslant 0,\ \forall j\in J\},$$

J – конечное множество индексов, $Y_0\in E_m$ – фиксированная точка.

В [2] показано, что при некоторых естественных предположениях о виде функций $F(X,Y)$ и $f_j(X,Y)$ функция $\varphi(X)$ является дифференцируемой по направлениям $g\in E_n$, причем

$$\frac{\partial\varphi(X)}{\partial g} \overset{df}{=} \lim \frac{\varphi(X+\alpha g)-\varphi(X)}{\alpha} = \max_{Y\in R(X)} \left[\left(\frac{\partial F(X,Y)}{\partial X}, g\right) + \max_{v\in T(g)}\left(\frac{\partial F(X,Y)}{\partial Y}, v\right)\right], \quad (3)$$

где

$$R(X)=\{Y\in\Omega(X)\,|\,F(X,Y)=\varphi(X)\},\quad \theta(Y)=\{j\in J\,|\,f_j(X,Y)=0\},$$
$$T(g)=\left\{v\in E_m\,\middle|\,\left(\frac{\partial f_j(X,Y)}{\partial X}, g\right)+\left(\frac{\partial f_j(X,Y)}{\partial Y}, v\right)\leqslant 0,\ \ j\in\theta(Y)\right\}.$$

Среди задач (2) представляют особый интерес экстремальные задачи, требующие максимизации или минимизации меры множества $\Omega(X)$. К задачам подобного класса может быть сведен, в частности, ряд проблем оптимизации электрических цепей по полосе пропускания, чувствительности, разбросу параметров и т.д. Ниже приводится формулировка экстремальных задач указанного класса, а также рассматривается методика их решения. С целью упрощения изложения предполагается, что $Y\in E_1$.

Пусть $f(X,y)$ – непрерывно дифференцируемая функция. Требуется найти набор параметров X^*, при котором значение функции $f(X,y)$ не превышает b на отрезке $y\in[y_0, y_{max}]$ максимально возможной длины. Тогда для решения задачи потребуется найти

$$\max_{X\in G}\ \max_{y\in\Omega(X)} y, \qquad (4)$$

где

$$G=\{X\in E_n\,|\,f(X,y_0)\leqslant b\},\quad \Omega(X)=\{y\in E_1\,|\,f(X,y)\leqslant b\}.$$

Следует отметить, что (4) не является тривиальной задачей максимизации в силу зависимости множества Ω от X.

Положим $\varphi(X)=\max\limits_{y\in\Omega(X)} y$. Ясно, что $\varphi(X)$ есть первый корень уравнения $f(X,y)=b$, лежащий справа от точки $y=y_0$ (рис.I). Тогда на границе множества $\Omega(X)$ $f(X,y)=f(X,\varphi(X))$. В дальнейшем предполагаем, что $\frac{\partial f(X,\varphi(X))}{\partial y}\neq 0$.

Возьмем произвольное $g\in E_n$, $\|g\|=1$ и найдем производную функции $\varphi(X)$ по направлению g. В данном случае множество $R(X)$ состоит из одной точки $y=\varphi(X)$.

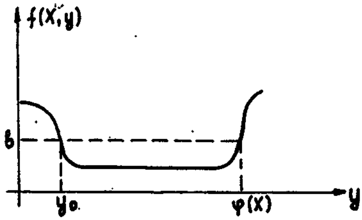

Рис. I.

Кроме того,

$$\frac{\partial F(X,y)}{\partial X}=0, \quad \frac{\partial F(X,y)}{\partial y}=1, \quad T(g)=\left\{v\leqslant -\left(\frac{\partial f(X,\varphi(X))}{\partial X},g\right)\left(\frac{\partial f(X,\varphi(X))}{\partial y}\right)^{-1}\right\}.$$

Поэтому в соответствии с (3)

$$\frac{\partial \varphi(X)}{\partial g}=\max_{y\in R(X)}\ \max_{v\in T(g)}\left\{\left(\frac{\partial F(X,y)}{\partial X},g\right)+\left(\frac{\partial F(X,y)}{\partial y},v\right)\right\}=\max_{v\in T(g)} v.$$

Отсюда

$$\frac{\partial \varphi(X)}{\partial g}=(V(X),g),$$

где

$$V(X)=-\left(\frac{\partial f(X,\varphi(X))}{\partial X}\right)\left(\frac{\partial f(X,\varphi(X))}{\partial y}\right)^{-1}.$$

Легко показать, что функция $V(X)$ непрерывна в окрестности любой точки $X\in G$, для которой $\frac{\partial f(X,\varphi(X))}{\partial y}\neq 0$. Поэтому функция $\varphi(X)$ является непрерывно дифференцируемой, причем

$$\frac{\partial \varphi(X)}{\partial X}=V(X).$$

Таким образом, использование формулы (3) позволило установить дифференцируемость $\varphi(X)$.

Если точка X^* доставляет максимум $\varphi(X)$ и $X^* \in \operatorname{int} G$, то $V(X^*)=0$. Если же X^* лежит на границе G, т.е. $f(X^*, y_0)=b$, то предыдущее условие заменится условием

$$V(X^*)=\lambda \frac{\partial f(X^*, y_0)}{\partial X}, \ \lambda \geqslant 0.$$

При $V(X) \neq \dfrac{\partial f(X, \varphi(X))}{\partial X}$ направлением наискорейшего подъема функции $\varphi(X)$ в точке X на множестве G является направление от начала координат к ближайшей точке отрезка, соединяющего $V(X)$ и $-\dfrac{\partial f(X, \varphi(X))}{\partial X}$.

Введем малое положительное число ε. Точка X^* в дальнейшем называется ε - стационарной точкой функции $\varphi(X)$, если выполнено одно из двух условий:

а/ если $f(X^*, y_0) < b-\varepsilon$ и $V(X^*)=0$,

б/ либо $b-\varepsilon \leqslant f(X^*, y_0) \leqslant b$ и $V(X^*)=\lambda \dfrac{\partial f(X^*, y_0)}{\partial X}, \lambda \geqslant 0.$

Теперь может быть описан метод последовательных приближений для нахождения ε - стационарной точки. Выберем произвольное $X_0 \in G$. Пусть точки $X_0, \dots, X_k$ из G уже построены. Если X_k есть ε - стационарная точка, то процесс завершен. Если же X_k не является ε - стационарной точкой, то находим направление подъема g_k по правилу:

$$g_k = \begin{cases} \dfrac{V(X_k)}{\|V(X_k)\|}, & \text{если } f(X_k, y_0) < b-\varepsilon, \\ \dfrac{Z_k}{\|Z_k\|}, & \text{если } b-\varepsilon \leqslant f(X_k, y_0) \leqslant b, \end{cases}$$

где Z_k - точка отрезка, соединяющего $V(X_k)$ и $-\dfrac{\partial f(X, \varphi(X))}{\partial X}$, ближайшая к началу координат.

Далее находим $\alpha_k > 0$ такое, что

$$\varphi(X_k + \alpha_k g_k) = \max\{\varphi(X_k + \alpha g) \mid \alpha \geqslant 0, \ X_k + \alpha g \in G\}.$$

Положим $X_{k+1} = X_k + \alpha_k g_k$. Можно показать, что в с я к а я п р е д е л ь н а я т о ч к а п о с л е д о в а т е л ь н о с т и $\{X_k\}$, п о с т р о е н н о й у к а з а н н ы м о б р а з о м , я в л я е т с я ε - с т а ц и о н а р н о й т о ч к о й (см., например, [I]).

ПРИМЕР. Рассмотрим задачу: определить значения элементов $\alpha = (\alpha_2, \alpha_3)$ электрической цепи со структурой фильтра нижних частот, обеспечивающей получение максимально возможной полосы пропускания $\gamma \in [1, \gamma_{max}]$ при заданном предельно допустимом значении модуля входного коэффициента отражения Γ_0

Эта задача запишется в следующем виде. Найти

$$\max_{\alpha \in G} \max_{\gamma \in \Omega(\alpha)} \gamma ,$$

где

$$G = \{\alpha \in E_2 \,|\, |\Gamma(\alpha, 1)| \le \Gamma_0\}, \quad \Omega(\alpha) = \{\gamma \in E_1 \,|\, |\Gamma(\alpha,\gamma)| \le \Gamma_0\} .$$

Здесь

$$\Gamma(\alpha,\gamma) = \frac{Z-1}{Z+1}, \quad Z = \frac{A_{11}R_H + A_{12}}{A_{21}R_H + A_{22}}, \quad A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

$$A_{11} = 1 + \frac{Z_2}{Z_1}, \quad A_{12} = Z_2, \quad A_{21} = \frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{Z_1 Z_2}, \quad A_{22} = 1 + \frac{Z_2}{Z_3},$$

$$Z_1 = (j\alpha_1 \gamma \omega_0)^{-1}, \; Z_2 = j\alpha_2 \gamma \omega_0, \; Z_3 = (j\alpha_3 \gamma \omega_0)^{-1}, \; R_H = \frac{1}{K}, \; j = \sqrt{-1} .$$

Результаты решения задачи для параметров ω_0 = 0.I, K = 2.0, α_1 = I.0 и четырех значений Γ_0 приведены в таблице I (γ_{max} - значения максимизируемой функции, к - число итераций).

Таблица I

Γ_0	Начальное приближение		Стационарная точка		к
	α	γ_{max}	α^*	γ_{max}	
0.I000	(4.77 , 9.05)	I.25	(4.48 , 8.49)	I.34	7
0.I352	(4.77 , 9.05)	I.3I	(4.I7 , 7,87)	I.50	I0
0.2000	(4.40 , 7.70)	I.56	(3.50 , 6.55)	I.92	I2
0.3000	(4.40 , 7.70)	I.72	(I.94 , 5.37)	4.08	20

Вычисления производились с $\mathcal{E} = 5.10^{-4}$. Время счета на ЭВМ М-222 составляло 3 - 10 минут в зависимости от варианта.

В заключение следует заметить, что увеличение размерности переменной Y в рассмотренном классе задач приведет к усложнению операции нахождения функции максимума, которая в новых условиях может быть определена, например, с помощью метода Ньютона.

Авторы благодарны В.Ф. Демьянову и А.Б. Певному за весьма полезное обсуждение.

Литература

1. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Ведение в минимакс, М., Наука, 1972.
2. Демьянов В.Ф. О задаче минимакса при связанных ограничениях, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 12 : 3 (1972), 799-805.

Поступила в ред.-изд. отд.
6. XII. 1972 г.