УДК 519.8 : 62 50

# НАХОЖДЕНИЕ МИНИМАКСА ПРИ СВЯЗАННЫХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

А.Б.Певный

## Введение

Под задачей нахождения минимакса при связанных ограничениях будем понимать задачу нахождения

$$\inf_{x \in X} \max_{y \in \Omega(x)} f(x,y),$$

где множества $\Omega(x)$ зависят от $x$. Эта задача рассматривалась, например, в [1]. К ней сводится нахождение положений равновесия в некоторых экономико-математических моделях (см. [2]).

В § 1 рассматриваемая задача с помощью штрафных функций сводится к последовательности дискретных минимаксных задач. В § 2 даются некоторые оценки погрешности, вызываемой введением штрафа. В § 3 исходная задача сводится к последовательности дискретных минимаксиминных задач.

## § 1. Сведение к дискретной минимаксной задаче

Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на произведении $X \times Y$ компактов $X$ и $Y$ и для каждого $x \in X$ определено непустое замкнутое множество $\Omega(x) \subset Y$. Требуется найти величину

$$m = \inf_{x \in X} \max_{y \in \Omega(x)} f(x,y). \tag{1}$$

Допустим, что существует функция $\psi(x,y)$, непрерывная на $X\times Y$ и такая, что $\psi(x,y)=0$ при $y\in\Omega(x)$, $\psi(x,y)>0$ при $y\notin\Omega(x)$ для любого $x\in X$. Если $\Omega(x)$ заданы в виде

$$\Omega(x)=\{y\in Y \mid h_i(x,y)\leq 0,\ i=1,\dots,p\}, \qquad (2)$$

где функции $h_i(x,y)$ непрерывны на $X\times Y$, то в качестве $\psi(x,y)$ можно взять функцию

$$\psi(x,y)=\sum_{i=1}^{p}\theta(h_i^+(x,y)),$$

где $h_i^+(x,y)=\max\{0;h_i(x,y)\}$, $\theta(t)$ - произвольная функция, непрерывная на $[0,\infty)$, $\theta(0)=0$, $\theta(t)>0$ при $t>0$.

Задачей со штрафом будем называть задачу нахождения

$$m(\lambda)=\min_{x\in X}\max_{y\in Y}[f(x,y)-\lambda\psi(x,y)],\ \lambda>0. \qquad (3)$$

По общей теореме Ю.Б.Гермейера [3] о методе штрафных функций для любого $x\in X$

$$\varphi(x)=\max_{y\in\Omega(x)}f(x,y)=\lim_{\lambda\to\infty}\max_{y\in Y}[f(x,y)-\lambda\psi(x,y)]. \qquad (4)$$

С помощью (4) в [I] было показано, что

$$m=\lim_{\lambda\to\infty}m(\lambda). \qquad (5)$$

Таким образом, задача нахождения (I) приближенно сводится к задаче нахождения (3).

Для разыскания (3) можно поступить следующим образом. Введем сетку $G\subset Y$, состоящую из конечного числа точек, и положим

$$m(\lambda,G)=\min_{x\in X}\max_{y\in G}[f(x,y)-\lambda\psi(x,y)]. \qquad (6)$$

Для нахождения (6) могут быть использованы методы книги [4]. Положим

$$\Phi(x,\lambda,G)=\max_{y\in G}[f(x,y)-\lambda\psi(x,y)].$$

Пусть $x_0$ есть $\varepsilon$-минимальная точка функции $\Phi(x,\lambda,G)$ на $X$, т.е.

$$\Phi(x_0, \lambda, G) - \min_{x \in X} \Phi(x, \lambda, G). \tag{7}$$

Оценим величины $\Phi(x_0, \lambda, G) - m$ и $\varphi(x_0) - m$, где $m$ и $\varphi(x)$ определены в (I) и (4). Введем число

$$\rho = \max_{y \in Y} \min_{z \in G} \| y - z \|,$$

которое назовем густотой сетки $G$. Ясно, что

$$0 \le m(\lambda) - m(\lambda, G) \le \omega(f; \rho) + \lambda \omega(\psi; \rho), \tag{8}$$

где $\omega(f; \rho)$ – модуль непрерывности функции $f$ на $X \times Y$. Имеем

$$\Phi(x_0, \lambda, G) - m = \Phi(x_0, \lambda, G) - m(\lambda, G) + m(\lambda, G) - m(\lambda) + m(\lambda) - m.$$

Отсюда и из (7), (8) получаем оценку

$$-[\omega(f; \rho) + \lambda \omega(\psi; \rho)] \le \Phi(x_0, \lambda, G) - m \le \varepsilon + m(\lambda) - m. \tag{9}$$

Заметим, что $\omega(f; \rho) \to 0$ при $\rho \to 0$. Далее имеем

$$\varphi(x_0) \le \Phi(x_0, \lambda) = \max_{y \in Y} [f(x, y) - \lambda \psi(x, y)],$$

$$0 \le \varphi(x_0) - m \le \Phi(x_0, \lambda) - m = \Phi(x_0, \lambda) - \Phi(x_0, \lambda, G) + \Phi(x_0, \lambda, G) - m.$$

С учетом (9) окончательно получаем

$$0 \le \varphi(x_0) - m \le \omega(f; \rho) + \lambda \omega(\psi; \rho) + \varepsilon + m(\lambda) - m. \tag{10}$$

Соотношения (5), (9) и (10) показывают, что задача нахождения (I) сводится к решению последовательности дискретных минимаксных задач. Точное утверждение содержит следующая

ТЕОРЕМА I. Пусть $x_k$ есть $\varepsilon_k$-минимальная точка функции $\Phi(x, \lambda, G_k)$ на $X$, а $\rho_k$ – густота сетки $G_k$. Если $\lambda_k \to \infty$, $\rho_k \to 0$, $\lambda_k \omega(\psi; \rho_k) \to 0$, $\varepsilon_k \to 0$, то является минимизирующей последовательностью для функции $\varphi(x)$ на $X$, т.е. $\lim_{k \to \infty} \varphi(x_k) = m$. Кроме того, $\lim_{k \to \infty} \Phi(x_k, \lambda_k, G_k) = m$.

## § 2. Некоторые оценки

В этом параграфе даются оценки погрешности $m(\lambda)-m$, вызываемой введением штрафа.

Нам понадобится одна лемма об оценке погрешности метода штрафов для задач максимизации. Пусть

$$a=\max_{y\in\Omega} f(y),\ \Omega=\{y\,|\in Y\,|\,h_i(y)\le 0,\ i=1,\dots,p\},$$

где функции $f$, $h_1,\dots,h_p$ непрерывны на компакте $Y$.

Введем функцию

$$F_q(y,\lambda)=f(y)-\lambda\sum_{i=1}^{p}[h_i^+(y)]^q,$$

$$h_i^+(y)=\max\{0,h_i(y)\},\ 1\le q\le z.$$

Положим

$$a_q(\lambda)=\max_{y\in Y} F_q(y,\lambda). \qquad (12)$$

Через $\rho(y,\Omega)$ обозначим расстояние от точки $y$ до множества $\Omega$.

ЛЕММА I. Пусть функция $f(y)$ удовлетворяет условию Липшица на $Y$ и существует $\beta>0$ и $\gamma>0$ такие, что

$$\max_{1\le i\le p} h_i^+(y)\ge\beta[\rho(y,\Omega)]^{\gamma}\quad (y\in Y). \qquad (13)$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

I. Если $q\gamma\le 1$, то существует $\lambda_0$ такое, что $a_q(\lambda)=a$ при $\lambda>\lambda_0$.

2. Если $q\gamma>1$, то $0\le a_q(\lambda)-a\le B\lambda^{-1/(q\gamma-1)}$, где $B$ не зависит от $\lambda$.

Доказательство этой леммы можно найти в [5].

Лемма I обобщает результаты, полученные в [6]. Она остается справедливой, если использовать функцию

$$F_q(y,\lambda)=f(y)-\lambda[\max_{1\le i\le p} h_i^+(y)]^q.$$

В [5] отмечено, что условию (I3) удовлетворяет одно линейное ограничение $h_1(y)=(b,y)+c\geq 0$. Другой важный случай рассматривается в следующей лемме.

ЛЕММА 2. Пусть $Y$ выпукло, функция $h(y)=\max\limits_{1\leq i\leq p} h_i(y)$ выпукла на $Y$ и существует $y_0\in Y$ такое, что $h(y_0)=-\delta<0$. Тогда условие (I3) выполнено с константой $\gamma=1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $y_1\in Y\setminus\Omega$. Так как $h(y_1)>0$, $h(y_0)=-\delta<0$, то на отрезке $[y_0,y_1]$ существует точка $y_2$, в которой $h(y_2)=0$. Так как функция $h(y)$ выпукла, то

$$\frac{h(y_1)-h(y_2)}{\|y_1-y_2\|}\geq\frac{h(y_2)-h(y_0)}{\|y_2-y_0\|}$$

(см. [7], стр. 38). Далее $\|y_2-y_0\|\geq\tau$, где $\tau$ - расстояние от $y_0$ до $\partial\Omega=\{y\in\Omega\mid h(y)=0\}$. Отсюда

$$h(y_1)\geq\frac{\delta}{\tau}\|y_1-y_2\|\geq\frac{\delta}{\tau}\rho(y_1,\Omega)$$

и условие (I3) выполнено с константами $\beta=\frac{\delta}{\tau}$ и $\gamma=1$. Лемма доказана.

Вернемся к задаче нахождения (I). В дальнейшем будем предполагать, что множества $\Omega(x)$ заданы в виде (2), где функции $h_i(x,y)$ непрерывны на $X\times Y$. Положим

$$F_q(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\sum_{i=1}^{p}[h_i^+(x,y)]^q,\ 1\leq q\leq 2 \qquad (I4)$$

$$m_q(\lambda)=\min_{x\in X}\max_{y\in Y}F_q(x,y,\lambda). \qquad (I5)$$

Заметим, что функция (I4) дифференцируема, если $q>1$ и дифференцируемы $f$, $h_1,\dots,h_p$.

Как уже отмечалось, $m_q(\lambda)\to m$ при $\lambda\to\infty$. Нас интересует оценка разности $m_q(\lambda)-m$.

Пусть $M_q(\lambda)$ и $M$ - множества точек $x$ из $X$, реализующих минимаксы (I5) и (I) соответственно.

ТЕОРЕМА 2. Пусть инфимум по $x \in X$ в (I) достигается в некоторой точке $x^*$, функция $f(x^*, y)$ удовлетворяет условию Липшица на $Y$ и существует $\beta > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что

$$\max_{1 \le i \le p} h_i^+(x^*, y) \ge \beta [\rho(y, \Omega(x^*))]^r \quad (y \in Y).$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

I. Если $q\gamma \le 1$, то существует $\lambda_0$ такое, что $m_q(\lambda) = m$ и $M_q(\lambda) \subset M$ при $\lambda > \lambda_0$.

2. Если $q r > 1$, то $0 \le m_q(\lambda) - m \le B\lambda^{-1/(qr-1)}$, где $B$ не зависит от $\lambda$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$a = \max_{y \in \Omega(x^*)} f(x^*, y), \quad \Omega(x^*) = \{y \in Y \mid h_i(x^*, y) \le 0,\ i = 1, \ldots, p\},$$

$$a_q(\lambda) = \max_{y \in Y} F_q(x^*, y, \lambda).$$

Очевидно, что $m_q(\lambda) \le a_q(\lambda)$, $m = a$, поэтому

$$0 \le m_q(\lambda) - m \le a_q(\lambda) - a.$$

Применив лемму I, получим оценки для $m_q(\lambda) - m$. Покажем теперь, что из равенства $m_q(\lambda) = m$ следует включение $M_q(\lambda) \subset M$. Действительно, если $x(\lambda) \in M_q(\lambda)$ и $m_q(\lambda) = m$, то

$$m \le \varphi(x(\lambda)) \le \max_{y \in Y} F_q(x(\lambda), y, \lambda) = m_q(\lambda) = m,$$

и, следовательно, $x(\lambda) \in M$. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Нельзя утверждать даже в условиях теоремы, что из равенства $m_q(\lambda) = m$ следует равенство $M_q(\lambda) = M$. Это показывает следующий пример:

$$X = Y = [0,1], \quad \Omega(x) = \{y \in Y \mid xy - x^2 \le 0\} = \begin{cases} [0,1] & \text{при } x = 0, \\ [0,x] & \text{при } 0 < x \le 1, \end{cases}$$

$f(x,y)=y-x$ . Ясно, что

$$\varphi(x)=\max_{y\in\Omega(x)} f(x,y)=\begin{cases} 1, & x=0, \\ 0, & 0<x\leq 1, \end{cases}$$

и для функции $\varphi(x)$ множество точек минимума $M=(0,1]$ . Если взять $x^*=1$ , то условия теоремы выполняются. Так как $\Omega(x^*)=Y$ , то $m_q(\lambda)=m$ при любом $\lambda$ . С другой стороны, нетрудно подсчитать, что при $q=1$ множество $M_1(\lambda)=[\frac{1}{\lambda},1]$ при $\lambda\geq 1$ .

## § 3. Сведение к дискретной минимаксиминной задаче

Введем штрафную функцию

$$\Psi(x,y)=\max_{i\in[0:p]} h_i(x,y),$$

где $h_0(x,y)\equiv 0$ . Тогда (3) примет вид

$$m(\lambda)=\min_{x\in X}\max_{y\in Y}\min_{i\in[0:p]}[f(x,y)-\lambda h_i(x,y)]. \tag{16}$$

Остается справедливым соотношение (5), $m(\lambda)\to m$ при $\lambda\to\infty$ и справедлива

ТЕОРЕМА 3. Если выполнены условия теоремы 2 с константой $\gamma=1$ , то существует $\lambda_0$ такое, что

$$m(\lambda)=m \text{ при } \lambda>\lambda_0. \tag{17}$$

Если $M$ - множество точек $x\in X$ , реализующих минимакс (1), а $M(\lambda)$ - множество $x\in X$ , реализующих минимаксимин (16), то $M(\lambda)\subset M$ при $\lambda>\lambda_0$.

Доказательство такое же, как и в теореме 2.

Заменим $Y$ на конечную сетку $G=\{y_1,\ldots,y_N\}$ . Получим задачу минимизации на $X$ функции

$$\Phi(x,\lambda,G)=\max_{j\in[1:N]}\min_{i\in[0:p]}[f(x,y_j)-\lambda h_i(x,y_j)].$$

Для её решения может быть применен метод [8].

Пусть $x_0$ есть $\varepsilon$-минимальная точка функции $\Phi(x,\lambda,G)$ на $X$, $\rho$-густота сетки $G$. Тогда в силу (9), (10) и (17) при $\lambda>\lambda_0$ имеем

$$-[\omega(f;\rho)+\lambda\omega(\psi;\rho)]\leqslant\Phi(x_0,\lambda,G)-m\leqslant\varepsilon,$$
$$0\leqslant\psi(x_0)-m\leqslant\omega(f;\rho)+\lambda\omega(\psi;\rho)+\varepsilon.$$

Взяв $\lambda>\lambda_0$ и достаточно малые $\rho$ и $\varepsilon$, мы сколь угодно точно найдем минимакс (1).

## Литература

1. ГОРЕЛИК В.А. Приближенное нахождение максимина с ограничениями, связывающими переменные.- "Ж. вычисл. матем. и матем. физ.", 1972, т.12, № 2, с. 510-517.
2. ПРИМАК М.Е. Об одной общей равновесно-оптимальной задаче и некоторых моделях экономики.- "Докл. АН СССР", 1971, т. 200, № 3, с. 552-555.
3. ГЕРМЕЙЕР Ю.Б. Введение в теорию исследования операций. М., "Наука", 1971.
4. ДЕМЬЯНОВ В.Ф., МАЛОЗЕМОВ В.Н. Введение в минимакс. М., "Наука", 1972.
5. ФЕДОРОВ В.В. О методе штрафных функций в задаче определения максимина.- "Ж. вычисл. матем. и матем. физ.", 1972, т. 12, № 2, с. 321-333.
6. ЕРЕМИН И.И. О методе "штрафов" в выпуклом программировании.- "Кибернетика", 1967, № 4, с. 63-67
7. ПШЕНИЧНЫЙ Б.Н. Необходимые условия экстремума. М., "Наука", 1969.
8. ДЕМЬЯНОВ В.Ф. К решению минимаксиминных задач.- "Ж. вычисл. матем. и матем. физ.", 1970, т.10, № 3, с. 587-596.

Поступила в ред.-изд. отд.
6. XII. 1972 г.