1973 г. ОПТИМИЗАЦИЯ Выпуск 10(27)

УДК 519.8

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ ПО НАПРАВЛЕНИЯМ ФУНКЦИЙ МАКСИМУМА И МАКСИМИНА

Т.К.Виноградова, В.Ф.Демьянов, А.Б.Певный

Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = \max_{x \in \Omega(z)} f(x,z), \tag{1}$$

где $z \in E_p$, $\Omega(z)$ - множества из E_n, зависящие от z и заданные в виде

$$\Omega(z) = \Omega \cap \{x \mid h_i(x,z) \le 0,\ i=1,\dots,N\} \tag{2}$$

(Ω - множество, не зависящее от z).

Нас интересуют производные $\varphi(z)$ по направлениям:

$$\varphi'(z_0; g) = \lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha}[\varphi(z_0+\alpha g) - \varphi(z_0)].$$

Эти вопросы рассматривались также в [1-2].

Пусть $x \in \Omega(z_0)$. Введем множество

$$\gamma(x) = \{v \in E_n \mid \exists \alpha_0 > 0 : x + \alpha v \in \Omega(z_0 + \alpha g) \text{ при } 0 < \alpha < \alpha_0\}.$$

Замыкание $\gamma(x)$ обозначим $\Gamma(x)$ и назовем множеством допустимых направлений. Нетрудно доказать следующую лемму (см. также [2]).

ЛЕММА 1. *Пусть множество Ω выпукло и замкнуто, функции $h_i(x,z)$ непрерывно дифференцируемы по $[x,z]$, при $z=z_0$ выпуклы по x и удовлетворяют условию Слейтера: сущест-*

вует $x_0 \in \Omega$ такая, что

$$h_i(x_0, z_0) < 0, \quad i = 1, \ldots, N. \qquad (3)$$

Тогда $\Gamma(x)$ не пусто и имеет вид

$$\Gamma(x) = \Gamma(\Omega, x) \cap \{v \mid (h_{ix}, v) + (h_{iz}, g) \le 0, \ i \in Q(x)\},$$

где производные берутся в точке $[x, z_0]$, $Q(x) = \{i \mid h_i(x, z_0) = 0\}$, а $\Gamma(\Omega, x)$ -конус допустимых направлений для Ω в точке x.

Предположим, что функция $f(x,z)$ непрерывна по $[x,z]$ и дифференцируема по любому направлению $[v, g]$, т.е. существует конечный предел

$$f'(x, z_0; v, g) = \lim_{\alpha \to +0} \frac{1}{\alpha}[f(x + \alpha v, z_0 + \alpha g) - f(x, z_0)].$$

Пусть выполнены условия:

1) Если $v_k \to v$, то $f'(x, z_0; v, g) \le \overline{\lim_{k \to \infty}} f'(x, z_0; v_k, g)$.

2) Если $x_k = \bar{x} + \alpha_k v_k + O(\alpha_k)$, $\alpha_k \to +0$, $\bar{x} \in R(z_0)$, $\alpha_k v_k \to 0$, $v_k \in \Gamma(\bar{x})$, то

$$f(x_k, z_0 + \alpha_k g) - f(\bar{x}, z_0) \le \alpha_0 f'(\bar{x}, z_0; v_k, g) + O(\alpha_k).$$

Здесь и далее

$$R(z) = \{x \in \Omega(z) \mid \varphi(z) = f(x, z)\}.$$

ТЕОРЕМА I. Пусть выполнены условия леммы I, множества $\Omega(z)$ ограничены в совокупности для z из некоторой окрестности точки z_0. Пусть также функция $f(x,z)$ удовлетворяет условиям I) и 2). Тогда существует производная $\varphi'(z_0; g)$ и

$$\varphi'(z_0; g) = \sup_{x \in R(z_0)} \sup_{v \in \Gamma(x)} f'(x, z_0; v, g). \qquad (4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Фиксируем $x \in R(z_0)$ и $v \in \Gamma(x)$. Тогда $x + \alpha v \in \Omega(z_0 + \alpha g)$ при малых α и

$$\varphi(z_0+\alpha g)\geq f(x+\alpha v;\, z_0+\alpha g)=\varphi(z_0)+\alpha f'(x,z_0;\, v,g)+O(\alpha).$$

Отсюда

$$\underline{\varphi'(z_0;g)}=\underline{\lim}\,\frac{1}{\alpha}\left[\varphi(z_0+\alpha g)-\varphi(z_0)\right]\geq f'(x,z_0;\, v,g).$$

В силу произвольности $x\in R(z_0)$ и $v\in\gamma(x)$

$$\varphi'(z_0;g)\geq \sup_{x\in R(z_0)}\ \sup_{v\in\gamma(x)} f'(x,z_0;\, v,g). \qquad (5)$$

В силу условия I) и равенства $\Gamma(x)=\overline{\gamma(x)}$

$$\sup_{v\in\gamma(x)} f'(x,z_0;\, v,g)=\sup_{v\in\Gamma(x)} f'(x,z_0;\, v,g). \qquad (6)$$

Выберем $\{x_k\}$ и $\{\alpha_k\}$ так, чтобы

$$\frac{1}{\alpha_k}\left[\varphi(z_0+\alpha_k g)-\varphi(z_0)\right]\to\varphi'(z_0;g),\quad x_k\in R(z_0+\alpha_k g),$$

$$x_k\to\bar{x},\quad \alpha_k\to+0.$$

В силу непрерывности $f(x,z)$ и условий, наложенных на $\Omega(z)$, функция $\varphi(z)$ будет непрерывной при $z=z_0$. Поэтому из равенства $\varphi(z_0+\alpha_k g)=f(x_k,z_0+\alpha_k g)$ следует $\varphi(z_0)=f(\bar{x},z_0)$, т.е. $\bar{x}\in R(z_0)$. Представим x_k в виде $x_k=\bar{x}+\alpha_k v_k'$, $\alpha_k v_k'\to 0$. Для $i\in Q(\bar{x})$ имеем

$$0\geq h_i(x_k,z_0+\alpha_k g)=\alpha_k\left[(h_{ix},v_k')+(h_{iz},g)\right]+O(\alpha_k),$$

$$(h_{ix},v_k')+(h_{iz},g)\leq\varepsilon_k,\ \varepsilon_k\to 0.$$

В силу условия Слейтера (3) существует $v_0\in\Gamma(\Omega,\bar{x})$ такое, что $(h_{ix},v_0)\leq -1$, $i\in Q(\bar{x})$. Положим теперь $v_k=v_k'+|\varepsilon_k|v_0$. Тогда для x_k получим представление

$$x_k=\bar{x}+\alpha_k v_k+O(\alpha_k),\ v_k\in\Gamma(\bar{x}),\ \alpha_k v_k\to 0.$$

В силу условия 2) получим

$$\varphi(z_0+\alpha_k g)-\varphi(z_0)=f(x_k,z_0+\alpha_k g)-f(\bar{x},z_0)\leq$$

$$\leq\alpha_k f'(\bar{x},z_0;\, v_k,g)+O(\alpha_k),$$

$$\overline{\varphi'(z_0;g)}\leq\overline{\lim_{k\to\infty}} f'(\bar{x},z_0;\, v_k,g)\leq\sup_{x\in R(z_0)}\ \sup_{v\in\Gamma(x)} f'(x,z_0;\, v,g). \qquad (7)$$

Из (5), (6) и (7) следует утверждение теоремы.

Пусть теперь

$$f(x,z)=\min_{y\in\Omega_1}\Phi(x,y,z). \tag{8}$$

т.е. речь идет о дифференцируемости по направлениям функции максимина

$$\varphi(z)=\max_{x\in\Omega(z)}\min_{y\in\Omega_1}\Phi(x,y,z). \tag{9}$$

Пусть множества $\Omega(z)$ удовлетворяют условиям теоремы I, Ω_1 – ограниченное замкнутое множество в E_m, а функция $\Phi(x,y,z)$ непрерывна по $[x,y,z]$. Введем множество

$$S(x,z)=\{y\in\Omega_1 \mid f(x,z)=\Phi(x,y,z)\}.$$

Предположим, что $\Phi(x,y,z)$ непрерывно дифференцируема по $[x,z]$ и выполнено условие:

3) Для любого $\bar{x}\in R(z_0)$ существует $\delta>0$ такое, что

$$\Phi(x,y,z_0)-\Phi(\bar{x},y,z_0)\le(\Phi_x(\bar{x},y,z_0),x-\bar{x})$$

для всех $x:\ \|x-\bar{x}\|<\delta$ и $y\in S(\bar{x},z_0)$.

Другими словами, график функции $\Phi(x,y,z_0)$ в окрестности точки $\bar{x}$ лежит ниже касательной плоскости в точке $\bar{x}$. Поэтому 3) выполнено, если $\Phi(x,y,z_0)$ вогнута по x в окрестности $\bar{x}$.

ТЕОРЕМА 2. При сделанных предположениях для функции (9) существует $\varphi'(z_0;g)$ и

$$\varphi'(z_0;g)=\sup_{x\in R'(z_0)}\ \sup_{v\in\Gamma(x)}\ \min_{y\in S(x,z_0)}[(\Phi_x(x,y,z_0),v)+(\Phi_z(x,y,z_0),g].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция (8) непрерывна по $[x,z]$ и дифференцируема по любому направлению $[v,g]$ (см. [3 - 4]), причем

$$f'(x,z_0;v,g)=\min_{y\in S(x,z_0)}[(\Phi_x(x,y,z_0),v)+(\Phi_z(x,y,z_0),g)].$$

Поэтому теорема 2 будет следовать из теоремы I, если нам удастся проверить условие 2). Проверим это условие. Пусть

$$x_k=\bar{x}+\alpha_k v_k+O(\alpha_k),\quad \alpha_k\to+0,\quad \bar{x}\in R(z_0),\quad \alpha_k v_k^2\to 0.$$

Имеем, используя условие 3),

$$f(x_k, z_0+\alpha_k g) - f(\bar{x}, z_0) \le \min_{y\in S(\bar{x}, z_0)} [\Phi(x_k, y, z_0+\alpha_k g) - \Phi(\bar{x}, y, z_0)] =$$

$$= \min_{y\in S(\bar{x}, z_0)} [\Phi(x_k, y, z_0+\alpha_k g) - \Phi(x_k, y, z_0) + \Phi(x_k, y, z_0) - \Phi(\bar{x}, y, z_0)] \le$$

$$\le \min_{y\in S(\bar{x}, z_0)} [(\Phi_z(\bar{x}, y, z_0), \alpha_k g) + O(\alpha_k) + (\Phi_x(\bar{x}, y, z_0), x_k - \bar{x})] \le$$

$$\le \alpha_k \min_{y\in S(\bar{x}, z_0)} [(\Phi_z(\bar{x}, y, z_0), g) + (\Phi_x(\bar{x}, y, z_0), v_k)] + O(\alpha_k).$$

Таким образом, условие 2) выполняется.

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЯ I. Производные $\varphi'(z_0; g)$ могут быть использованы при построении методов последовательных приближений для минимизации функций (I) и (9).

2. В [5] рассмотрена функция (9) для случая, когда не только $\Omega(z)$, но множество Ω_1 зависит от z. При доказательстве теоремы о производной $\varphi'(z_0, g)$ основным моментом, по существу, была проверка условия 2).

Литература

I. СОТСКОВ А.И. О необходимых условиях минимакса на связанных множествах. -"Кибернетика," 1970, № 4, с. 96-102.

2. ДЕМЬЯНОВ В.Ф. О задаче минимакса при связанных ограничениях. - Ж.вычисл.матем. и матем.физ., 1972, 12, № 3,с.799-805.

3. ДЕМЬЯНОВ В.Ф., ПЕВНЫЙ А.Б. Вычисление первых и вторых маргинальных значений в задачах математического программирования. - "Оптимизация", Новосибирск, 1972, вып.5(22).

4. ГОЛЬШТЕЙН Е.Г. Выпуклое программирование (элементы теории). - М., "Наука", 1970.

5. HOGAN W.W. Directional derivatives for extremal value functions. Western Management Science Institute, Working Paper No. 177, Los Angeles, 1971.

6. ДЕМЬЯНОВ В.Ф., МАЛОЗЕМОВ В.Н. Введение в минимакс. М., "Наука", 1972.

7. ПШЕНИЧНЫЙ Б.Н. Необходимые условия экстремума. М., "Наука", 1969.

Поступила в ред.-изд. отд.
I. XII. 1972 г.