УДК 519.3

АЛЬТЕРНАНСНЫЕ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ МИНИМАКСНЫХ ЗАДАЧ

В.Н.Малоземов, А.Б.Певный

1°. Пусть Q – некоторый компакт, содержащий не менее $n+1$ точки, а R^n – n-мерное евклидово пространство. Рассматривается задача

$$\max_{t\in Q}|\mathcal{F}(x,t)| \longrightarrow \min_{x\in R^n}, \qquad (1)$$

где $\mathcal{F}(x,t)$ – функция, непрерывная вместе с $\dfrac{\partial\mathcal{F}(x,t)}{\partial x}$ на $R^n\times Q$. Введем обозначение

$$\varphi(x)=\max_{t\in Q}|\mathcal{F}(x,t)|,$$

и предположим, что $\inf_{x\in R^n}\varphi(x)>0$. Тогда справедливы следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $a\in R^n$ – решение задачи (1) и система функций

$$\frac{\partial\mathcal{F}(a,t)}{\partial x_1},\ \dots,\ \frac{\partial\mathcal{F}(a,t)}{\partial x_n} \qquad (2)$$

является чебышевской на Q. тогда на Q существует $n+1$ точка $t_0, t_1, \ldots, t_n$, в которых $|\mathcal{F}(a, t_k)| = \varphi(a)$, а знаки $\xi_k = \operatorname{sign} \mathcal{F}(a, t_k)$ связаны соотношением

$$\xi_k = (-1)^k \xi_0 \cdot \operatorname{sign} \frac{\Delta_k}{\Delta_0}, \quad k \in 1:n, \qquad (3)$$

где Δ_k – определитель, составленный из столбцов

$$\frac{\partial \mathcal{F}(a, t_0)}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial \mathcal{F}(a, t_{k-1})}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{F}(a, t_{k+1})}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial \mathcal{F}(a, t_n)}{\partial x}.$$

Кроме того, найдутся $\gamma > 0$ и $\delta > 0$ такие, что

$$\varphi(x) \geq \varphi(a) + \gamma \|x - a\| \quad \text{при} \quad \|x - a\| \leq \delta. \qquad (4)$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть для некоторого $a \in R^n$ значение $\varphi(a)$ достигается в $n+1$ точке $t_0, t_1, \ldots, t_n$ из Q, причем определители Δ_k отличны от нуля и знаки $\xi_k = \operatorname{sign} \mathcal{F}(a, t_k)$ связаны соотношением (3). тогда a является точкой строгого локального минимума функции $\varphi(x)$ и, более того, выполнено (4).

ЗАМЕЧАНИЕ I. Пусть Q - компакт на вещественной оси и $\mathcal{F}(x,t)=x_1u_1(t)+\ldots+x_nu_n(t)-f(t)$, где $f(t)$ - непрерывная на Q функция, а $\{u_i(t)\}$ - система Чебышева на Q. Тогда система (2) является чебышевской при любом $a\in R^n$. Кроме того, функция $\varphi(x)$ выпукла на R^n, поэтому её точка строгого локального минимума является точкой глобального минимума и притом единственной. Таким образом, из теорем I и 2 следует обобщенная теорема Чебышева (см., например, [1]).

2.^{0} Доказательство теорем I и 2 опирается на следующие предложения теории минимакса.

Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна вместе с $\frac{\partial \mathcal{F}(x,y)}{\partial x}$ на $R^n\times\mathcal{D}$, где $\mathcal{D}$ -некоторый компакт.

Положим

$$\varphi(x)=\max_{y\in\mathcal{D}} f(x,y),$$

$$R(x)=\{y\in\mathcal{D}\mid f(x,y)=\varphi(x)\},$$

$$\mathcal{L}(x)=co\left\{\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,\middle|\, y\in R(x)\right\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Если $a\in R^n$ - точка минимума функции $\varphi(x)$ на R^n, то $0\in\mathcal{L}(a)$ (см. [2], стр. 243).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Если 0 - внутренняя точка множества $\mathcal{L}(a)$, то существуют $\gamma>0$ и $\delta>0$ такие, что

$$\varphi(x)\geq\varphi(a)+\gamma\|x-a\| \quad \text{при} \quad \|x-a\|\leq\delta$$

(см. [2], стр 82, 87).

В дальнейшем будет полезна также

ЛЕММА. Пусть столбцы $b_0, b_1, \ldots, b_n$ таковы, что определители $\Delta_k = |b_0 \ldots b_{k-1} b_{k+1} \ldots b_n|$ при всех $k \in 0:n$ отличны от нуля. Пусть, далее, каждое из чисел $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ равно $+1$ или -1. Тогда равносильны два утверждения:

а) $\xi_k = (-1)^k \xi_0 \cdot \operatorname{sign} \dfrac{\Delta_k}{\Delta_0}, \quad k \in 1:n;$

б) система уравнений

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \xi_k b_k = 0 \qquad (5)$$

имеет решение, в котором все α_k положительны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перенесем в (5) $\alpha_0 \xi_0 b_0$ в правую часть. По формулам Крамера получим

$$\alpha_k \xi_k = -\alpha_0 \xi_0 \frac{|b_1 \ldots b_{k-1} b_0 b_{k+1} \ldots b_n|}{|b_1 \ldots b_n|} = (-1)^k \alpha_0 \xi_0 \frac{\Delta_k}{\Delta_0}.$$

Поэтому система (5) эквивалентна системе

$$\alpha_k \xi_k = (-1)^k \alpha_0 \xi_0 \left(\operatorname{sign} \frac{\Delta_k}{\Delta_0}\right) \cdot \left|\frac{\Delta_k}{\Delta_0}\right|, \quad k \in 1:n.$$

Теперь равносильность а) и б) устанавливается без труда.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Положим $\mathcal{D} = Q \times \{-1, 1\}$, $y = (t, \xi) \in \mathcal{D}$, $f(x, y) = \xi \mathcal{F}(x, t)$. Тогда

$$\varphi(x) = \max_{t \in Q} |\mathcal{F}(x, t)| = \max_{y \in \mathcal{D}} f(x, y),$$

$$R(a) = \{(t, \xi) \in \mathcal{D} \mid \xi \mathcal{F}(a, t) = \varphi(a)\},$$

$$\mathcal{L}(a) = co\left\{\xi \frac{\partial \mathcal{F}(a, t)}{\partial x} \,\middle|\, (t, \xi) \in R(a)\right\}.$$

В силу предложения 1, существуют различные пары $(t_k, \xi_k) \in R(a)$, $k \in 0:r$, $r \leq n$, и положительные числа $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r$ такие, что

$$\sum_{k=0}^{r} \alpha_k \xi_k \frac{\partial \mathcal{F}(a, t_k)}{\partial x} = 0, \quad \sum_{k=0}^{r} \alpha_k = 1. \qquad (6)$$

По определению $R(a)$ будет $|\mathcal{F}(a, t_k)| = \varphi(a)$ и $\xi_k = sign\, \mathcal{F}(a, t_k)$. Отсюда, в частности, следует, что точки t_k попарно различны. Так как векторы

$$\frac{\partial \mathcal{F}(a, t_0)}{\partial x}, \frac{\partial \mathcal{F}(a, t_1)}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial \mathcal{F}(a, t_r)}{\partial x} \quad \text{при} \quad r \leq n-1 \quad \text{по}$$

условию линейно-независимы, то при $r \leq n-1$ равенства (6) невозможны. Поэтому $r = n$.

Столбцы $b_k = \frac{\partial \mathcal{F}(a, t_k)}{\partial x}$, $k \in 0:n$, удовлетворяют условию леммы, а $\xi_k = \pm 1$. По лемме $\xi_k = (-1)^k \xi_0 \cdot sign \frac{\Delta_k}{\Delta_0}$, $k \in 1:n$. Таким образом, выполнено (3), и первая часть теоремы доказана.

Неравенство (4) следует из предложения 2. Действительно, векторы

$$\xi_k \frac{\partial \mathcal{F}(a,t_k)}{\partial x} - \xi_0 \frac{\partial \mathcal{F}(a,t_0)}{\partial x}, \quad k \in 1:n,$$

линейно-независимы, ибо иначе равенства (6) выполнялись бы при $r<n$. Поэтому в силу (6)

$$0 \in \operatorname{int} \operatorname{co}\left\{\xi_k \frac{\partial \mathcal{F}(a,t_k)}{\partial x} \,\middle|\, k \in 0:n\right\} \subset \operatorname{int} \mathcal{L}(a),$$

т.е. 0 является внутренней точкой множества $\mathcal{L}(a)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Очевидно, теорема 1 остается справедливой, если Q – компакт на вещественной оси, а система (2) является чебышевской на некотором отрезке, содержащем Q. Если при этом считать, что $t_0<t_1<\ldots<t_n$, то знаки всех определителей Δ_k будут одинаковыми, так что (3) перепишется в виде

$$\xi_k = (-1)^k \xi_0, \quad k \in 1:n.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Положим $b_k = \frac{\partial \mathcal{F}(a,t_k)}{\partial x}$, $k \in 0:n$. По условию выполнено (3), поэтому по лемме существуют положительные $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ такие, что

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k \xi_k \frac{\partial \mathcal{F}(a,t_k)}{\partial x} = 0.$$

Можно считать, что $\alpha_0+\alpha_1+\ldots+\alpha_n=1$. Поскольку $(t_k,\xi_k)\in R(a)$ при всех $k \in 0:n$, то $0\in\mathcal{L}(a)$. Более того, $0\in \operatorname{int}\mathcal{L}(a)$ (доказательство такое же, как в теореме 1). Остается сослаться на предложение 2. Теорема доказана.

4°. Следующее утверждение является обобщением теоремы Валле-Пуссена (см., например, [1]).

ТЕОРЕМА 3. Пусть для некоторого $a \in R^n$ нашлись $n+1$ точка $t_0, t_1, \dots, t_n$ из Q такие, что определители Δ_k при всех $k \in 0:n$ отличны от нуля, а знаки $\xi_k = \operatorname{sign} \mathcal{F}(a, t_k)$ связаны соотношением (3). Пусть также функция

$$\psi(x) = \max_{k \in 0:n} \left\{ \xi_k \left(\mathcal{F}(x, t_k) - \mathcal{F}(a, t_k) \right) \right\}$$

выпукла на R^n. Тогда

$$\inf_{x \in R^n} \psi(x) \geq \min_{k \in 0:n} |\mathcal{F}(a, t_k)|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО легко следует из одной теоремы теории минимакса (см. [2], стр. 92).

Заметим, что если $\mathcal{F}(x,t) = x_1 u_1(t) + \dots + x_n u_n(t) - f(t)$, то функция $\psi(x)$ выпукла. Поэтому теорема 3 может оказаться полезной при оценке снизу величины наилучшего приближения функций одной и нескольких переменных.

5°. Пусть Q – компакт на вещественной оси и $f(t)$ – непрерывная на Q функция. Положим

$$P(t) = \sum_{k=1}^{n} x_k e^{y_k t} + \sum_{i=1}^{r} z_i e^{d_i t}, \tag{7}$$

где x_k, y_k, z_i – произвольные параметры, а d_i – фиксированные попарно различные числа. Требуется найти x_k, y_k, z_i так, чтобы уклонение

$$\|f - P\| = \max_{t \in Q} |f(t) - P(t)|$$

было наименьшим.

С каждой функцией $P(t)$ вида (7) свяжем число $N(P)$. Для этого приведем $P(t)$ к виду

$$P(t)=\sum_{k=1}^{q} a_k e^{b_k t} + \sum_{i=1}^{r} c_i e^{d_i t}, \qquad (8)$$

где $0 \le q \le n$, $b_1, \dots, b_q, d_1, \dots, d_r$ попарно различны и все a_k отличны от нуля. Теперь положим

$$N(P) = n+q+r+1.$$

Пусть $\inf_{\{P\}} \|f-P\| > 0$. Тогда справедлива

ТЕОРЕМА 4. Для того чтобы $P(t)$ наименее уклонялась от $f(t)$ на Q, необходимо и достаточно, чтобы существовал $N(P)$-точечный альтернанс, т. е. точки $t_1 < t_2 < \dots < t_{N(P)}$ из Q, в которых разность $f(t)-P(t)$ принимает с чередующимися знаками значение $\|f-P\|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть функция $P(t)$ наименее уклоняется от $f(t)$ на Q. Приведем ее к виду (8) и выберем $b_{q+1}, \dots, b_n$ так, чтобы числа $b_1, \dots, b_q, b_{q+1}, \dots, b_n, d_1, \dots, d_r$ остались попарно различными. Очевидно, $P(t)$ наименее уклоняется от $f(t)$ также среди функций вида

$$S(t)=\sum_{k=1}^{q} x_k e^{y_k t} + \sum_{k=q+1}^{n} x_k e^{b_k t} + \sum_{i=1}^{r} z_i e^{d_i t}.$$

Система функций

$$\frac{\partial S}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial x_n}, \frac{\partial S}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial y_q}, \frac{\partial S}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial z_r},$$

т.е. система

$$e^{b_1 t}, \dots, e^{b_n t}, a_1 t e^{b_1 t}, \dots, a_q t e^{b_q t}, e^{d_1 t}, \dots, e^{d_r t}$$

является чебышевской на любом отрезке, содержащем Q (см. например, [3], стр. 115). Поэтому в силу замечания 2 существует $N(P)$ - точечный альтернанс.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Пусть нашлась функция $P_1(t)$ такая, что $\|f-P_1\| < \|f-P\|$. Тогда в точках альтернанса t_k разность

$$P_1(t)-P(t)=[f(t)-P(t)]-[f(t)-P_1(t)]$$

принимает ненулевые значения с чередующимися знаками и, следовательно, $P_1(t)-P(t)$ имеет не менее $n+q+r$ нулей. С другой стороны,

$$P_1(t)-P(t)=\sum_{k=1}^{s} \alpha_k e^{\beta_k t},$$

где $s \le n+q+r$ и β_k попарно различны. Поэтому $P_1(t)-P(t)$ имеет не более $s-1$ нулей. Полученное противоречие завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Функция наилучшего приближения может не существовать. Так, если Q содержит хотя бы три точки, $P(t)= =xe^{yt}+z$, $f(t)=\alpha t+\beta$, $\alpha \ne 0$, то $\inf\limits_{\{P\}} \|f-P\|=0$, но функции наилучшего приближения, очевидно, не существует.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Функция наилучшего приближения, если она существует, единственна.

Это легко доказывается от противного путем подсчета корней.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Аппроксимация экспонентами рассматривалась также в [4].

6°. Дадим новое доказательство теоремы Чебышева для задачи дробно-рациональной аппроксимации (см. [5], стр. 66). Зафиксируем n и m. С каждой дробью

$$R(t)=\frac{x_0+x_1 t+\ldots+x_n t^n}{y_0+y_1 t+\ldots+y_m t^m}, \tag{9}$$

у которой знаменатель не равен тождественно нулю, свяжем число $M(R)$. Для этого приведем $R(t)$ к виду

$$R(t)=\frac{a_0+a_1 t+\ldots+a_{n-\nu} t^{n-\nu}}{b_0+b_1 t+\ldots+b_{m-\mu} t^{m-\mu}}=\frac{A(t)}{B(t)}, \tag{10}$$

где $0\le\nu\le n$, $0\le\mu\le m$, $a_{n-\nu}\ne 0$, $b_{m-\mu}\ne 0$ и дробь $A(t)/B(t)$ несократима. Положим

$$M(R) = n+m-d+2,$$

где $d=\min\{\nu,\mu\}$. Если $R(t)\equiv 0$, то $M(R)=n+2$.

Пусть $f(t)$ – непрерывная на отрезке $Q=[\alpha,\beta]$ функция и

$$\min_{\{R\}} \max_{t\in Q} |f(t)-R(t)|>0.$$

Тогда справедлива

ТЕОРЕМА ЧЕБЫШЕВА. Для того чтобы дробь $R(t)$ наименее уклонялась от $f(t)$ на Q среди всех других дробей вида (9), необходимо и достаточно существование $M(R)$ – точечного альтернанса.

Докажем только необходимость. Простое доказательство достаточности имеется в [5].

НЕОБХОДИМОСТЬ. Если $R(t)\equiv 0$, то $R(t)$ наименее уклоняется от $f(t)$ среди всех полиномов степени не выше n и потому существует $M(R)=n+2$ точек альтернанса.

Пусть $R(t)\not\equiv 0$ и $d=\nu$ (случай $d=\mu$ рассматривается аналогично). Приведем $R(t)$ к виду (10) и заметим, что $R(t)$ наименее уклоняется от $f(t)$ также среди дробей вида

$$V(t)=\frac{x_0+x_1t+\ldots+x_{n-\nu-1}t^{n-\nu-1}+a_{n-\nu}t^{n-\nu}}{y_0+y_1t+\ldots+y_mt^m}.$$

По теореме 1 существует $M(R)$ точек альтернанса, если только система функций

$$\frac{\partial V}{\partial x_0},\ldots,\frac{\partial V}{\partial x_{n-\nu-1}},\frac{\partial V}{\partial y_0},\ldots,\frac{\partial V}{\partial y_m},$$

т.е. система

$$\frac{1}{B(t)},\frac{t}{B(t)},\ldots,\frac{t^{n-\nu-1}}{B(t)},-\frac{A(t)}{B^2(t)},-\frac{tA(t)}{B^2(t)},\ldots,\frac{-t^mA(t)}{B^2(t)}$$

является чебышевской на Q. Так как $B(t)\neq 0$ на Q, то достаточно доказать, что система

$$B(t), tB(t), \ldots, t^{n-\nu-1}B(t), A(t), tA(t), \ldots, t^m A(t)$$

является чебышевской. Последнее устанавливается без труда. Действительно, возьмем произвольные $c_0, c_1, \ldots, c_{n-\nu-1}$, $d_0, d_1, \ldots, d_m$, не все равные нулю, и покажем, что полином

$$\Phi(t) = B(t)\sum_{k=0}^{n-\nu-1} c_k t^k + A(t)\sum_{k=0}^{m} d_k t^k =$$

$$= B(t)C_{n-\nu-1}(t) + A(t)\mathcal{D}_m(t)$$

имеет на $(-\infty, \infty)$ не более $M(R)-2$ нулей. Очевидно, $\Phi(t) \not\equiv 0$, ибо иначе получили бы, что $\mathcal{D}_m(t)$ делится на $B(t)$, т.е. $\mathcal{D}_m(t) = B(t)G(t)$, где $G(t) \not\equiv 0$, и потому

$$C_{n-\nu-1}(t) + A(t)G(t) \equiv 0.$$

Но это невозможно, так как коэффициент при $t^{n-\nu}$ в $A(t)$ отличен от нуля. Полученное противоречие убеждает нас в том, что $\Phi(t) \not\equiv 0$. Осталось заметить, что $\Phi(t)$ – полином степени не выше $M(R)-2$ и потому имеет на $(-\infty, \infty)$ не более $M(R)-2$ нулей. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Для обобщенной дробно-рациональной аппроксимации теорема Чебышева доказана в [6].

7^0. В заключение авторы благодарят М.К.Даугавета за обсуждение результатов работы и ценные советы.

Литература

1. Зуховицкий С.И. О приближении действительных функций в смысле П.Л. Чебышева. УМН, II:2 (1956), 123-159.
2. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. Введение в минимакс. М., Наука, 1972.
3. Ремез Е.Я. Основы численных методов чебышевского приближения. К., Наукова думка, 1969.

4. Rice J.R. Chebyshev approximation by exponentials. J. Soc. Indust. Appl. Math., 10:1(1962), 149-161.
5. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М., Наука, 1965.
6. Cheney E.W. Approximation by generalised rational functions. В сб.: Approximation of functions, Amsterdam, Elsevier, 1965.

Поступила в ред.-изд. отд.
6. XII. 1972 г.