УДК 513.88.

ОБ АСИМПТОТИКЕ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Л.С.Маергойз

Р.Т.Рокфеллер [1] показал, что асимптотический конус надграфика [2]

$$\det V=\{(u,b)\in E\times R^1: u\in \mathrm{dom}\,V, b\geq V(u)\}, \mathrm{dom}\,V=\{u\in E: V(u)<\infty\}$$

замкнутой выпуклой функции V *), заданной на линейном топологическом пространстве E, является надграфиком ее асимптотической функции ρ_V:

$$\rho_V(u)=\lim_{t\to\infty} t^{-1}[V(ut+a)-V(a)], \quad a\in \mathrm{dom}\,V. \qquad (1)$$

В данной статье для надграфика $\det V$ выпуклой функции V, определенной на вещественном n-мерном гильбертовом пространстве H^n, вводится и исследуется понятие "асимптотического тела" $B(V)$, поверхность которого – своеобразная огибающая асимптот $\det V$. Доказывается, что $B(V)=\det\delta_V$, где функция δ_V в определенной ситуации дает существенно лучшее асимптотическое приближение функции V по сравнению с ρ_V. Функция δ_V применяется для построения качественно новых шкал роста выпуклых функций и целых функций многих комплексных переменных (ср. [3,4,5]). Именно в интересах этих приложений здесь рассматриваются выпуклые функции $\{V\}$ класса $\mathfrak{M}_n=\{V: \mathrm{dom}\,V=\mathrm{dom}\,\rho_V=H^n\}$, хотя нижеследующие построения применимы и для изучения асимптотики выпуклой функции в общем случае в конусе $\mathrm{dom}\,\rho_V\neq 0$. Основные результаты ра-

---

*) $A(V)$ – максимальный выпуклый конус с вершиной в $0\in E\times R^1$, сдвиг которого можно поместить в $\det V$ [1] (R^1 – одномерное пространство).

боты были ранее анонсированы автором в [12]. Преобладающий метод исследования – теория двойственности выпуклых функций [2].

§ I. Асимптотическое тело и асимптотические цилиндры надграфика выпуклой функции

I. Ниже используются обозначения: $V^*(y)=\sup\limits_{u\in H^n}[(u,y)-V(y)]$ – функция, сопряженная к $V^{(2)}$; (u, y) – скалярное произведение векторов u, y; $D=\operatorname{dom}V^*$.

Изучение асимптотики функций класса $\mathfrak{M}_n$ сводится к случаю $\dim D=n$, что показывает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.*) Замкнутая выпуклая функция V допускает в гильбертовом пространстве H^n разложение вида

$$V(u_1+u_2)=V_1(u_1)+V_2(u_2)\ ,\quad \forall u_i\in X_i\ ,\quad i=1,2, \qquad (2)$$

где $\{X_i\}$ – взаимно ортогональные подпространства в H^n, функция $V_2(u_2)$ линейна на X_2, $\dim X_1=\dim D=\dim\operatorname{dom}V_1^{**}$, причем это разложение единственно и

$$V_1(u_1)=V(u_1)\ ,\quad V_2(u_2)=\rho_V(u_2)\ ,\quad \forall u_i\in X_i\ .$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}(\mathcal{D})$ – аффинное многообразие, порожденное множеством $\mathcal{D}$, т.е. его аффинная оболочка; X_1 – линейное подпространство в H^n, параллельное $m(\mathcal{D})$, $X_2=X_1^\perp$, в гильбертовом пространстве H^n существует единственное разложение вида $m(\mathcal{D})=X_1+y_0$, $\mathcal{D}=\mathcal{D}'+y_0$, где $\mathcal{D}'\subset X_1$, $y_0\in X_2$. Положим

$$F_1(y_1)=\begin{cases} V^*(y_1+y_0), & y_1\in \mathcal{D}' \\ \infty & y_1\in X\setminus\mathcal{D}' \end{cases};\quad F_2(y_2)=\begin{cases} 0\ , & y_2=y_0\ , \\ \infty\ , & y_2\in X_2\setminus\{y_0\}. \end{cases}$$

Имеем: $F_1(y_1)+F_2(y_2)=V^*(y_1+y_2),\ \forall y_i\in X_i\ ,\quad i=1,2,$

причем $\operatorname{dom}F_1+\operatorname{dom}F_2=\operatorname{dom}V^*$. Так как V замкнута и выпукла, то $V^*(u_1+u_2)=F_1^*(u_1)+F_2^*(u_2),\ \forall u_i\in X_i\ ,\quad i=1,2,$

---

*) Большая часть предложения I содержится в теореме 5.I работы [5]. Здесь предлагается иное доказательство, которое будет использовано ниже.

т.е. $V_1(u_1)=F_1^*(u_1)$, $V_2(u_2)=F_2^*(u_2)-(u_2,y_0)$ – искомые функции. Единственность разложения (2) доказывается аналогично проведением рассуждений в обратную сторону. Наконец, из разложения (2) и формулы ([1], стр.52)

$$\rho_V(u)=\sup_{x\in \mathrm{dom} V}[V(x+u)-V(x)], \quad \forall u\in H^n \tag{3}$$

вытекает справедливость последнего утверждения леммы.

Таким образом, при $\dim D=K<n$ функция V определяется своими значениями на K-мерном линейном многообразии. Если $K=0$, то V – линейная функция. Всюду в дальнейшем мы рассматриваем случай $K\geq 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для того чтобы для функции V из $\mathfrak{M}_n$ выполнялось условие $\dim D=n$, необходимо и достаточно, чтобы $\rho_V(-u)\neq-\rho_V(u)$, $\forall u\neq 0$ (т.е. чтобы функция V обладала асимптотическим конусом, не содержащим прямых на своей поверхности).

<u>Необходимость.</u> Предположим, что существует $u^0\in H^n\setminus\{0\}$, такое, что $\rho_V(-u^0)=-\rho_V(u^0)$. Тогда из определения опорной функции легко заключаем, что $K_V\subset\{y\in H^n: (u^0,y)=\rho_V(u^0)\}$, где K_V – выпуклый компакт, опорной функцией которого является ρ_V. $\bar{D}=K_V$, поскольку ([1], стр.52)

$$\sup_{y\in D}(u,y)=\rho_V(u) \quad D=\mathrm{dom} V^*. \tag{4}$$

Получаем противоречие. Методом от противного убеждаемся и в справедливости достаточности.

2. Введем асимптотическую характеристику функции V, учитывающую её аналитическую структуру (разложение (2)).

Пусть $\Gamma=\partial D$ – граница множества D по отношению к его аффинной оболочке $m(D)$; $T=\Gamma\cap D$. Ниже предполагаем $T\neq\varnothing$.

О п р е д е л е н и е I. Гиперасимптотой (или предельной опорной гиперплоскостью) L_y, надграфика $\mathrm{epi}\, V$ функции V назовем любую гиперплоскость из множества

$$A=\{(u,u_{n+1})\in H^n\times R^1: u_{n+1}=(u,y)-V^*(y), \ y\in T\}.$$

Такое название элементов множества A мотивируется геометрическим смыслом сопряженной функции V^* [2]. Если $L_y\cap \mathrm{epi}\, V=\varnothing$, то это понятие совпадает с известным понятием n-мерной асимптоты замкнутого выпуклого множества $\mathrm{epi}\, V$ (6), поскольку

$$\inf_{u\in H^n}\{V(u)+V^*(y)-(u,y)\}=0,\quad \forall y\in T\ (H^n=R^n).^{*)}$$

О п р е д е л е н и е 2. Асимптотическим телом $B(V)$ надграфика функции V назовем пересечение всех полупространств, ограниченных гиперасимптотами множества A и содержащих $\det V$.

Согласно этому определению, $B(V)=\det\delta_V$, где

$$\delta_V(u)=\sup[(u,y)-V^*(y)]=\sup_{y\in\Gamma}[(u,y)-V^*(y)]. \quad (5)$$

Функция δ_V , как и V , разлагается на сумму 2-х слагаемых, одно из которых линейно, а другое – нет.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I$'$. В обозначениях предложения I имеем $\&\ H^n$:

$$\delta_V(u_1+u_2)=\delta_{V_1}(u_1)+V_2(u_2),\quad \forall u_i\in X_i,\quad i=1,2. \quad (6)$$

Предложение I$'$ – следствие предложения I и его доказательства: роль $\mathcal{D}$ играет $T=D\cap\partial D=D'\cap\partial D'+y_0$.

З а м е ч а н и е. Функция $\delta_{V_1}(u_1)$ линейная лишь в том случае, когда множество T вырождается в точку.

О п р е д е л е н и е 3. Невертикальную прямую

$$L=\{(xt+u,\gamma t+\delta)\in H^n\times R^1,\ \ |t|<\infty\},\qquad x\neq 0,$$

назовем x – одномерной асимптотой надграфика функции V , если

$$\lim_{t\to\infty}[V(xt+u)-\gamma t-\delta]=0,$$

(т.е. L – асимптота кривой $\varphi(t)=V(xt+u)$, $t>0$). Это понятие также является аналогичным обобщением соответствующего понятия, принадлежащего Кли [6]. Заметим, что асимптота L параллельна лучу

$$L_x=\{(xt,\beta_V(x)t)\in H^n\times R^1,\quad t>0\} \quad (7)$$

асимптотического конуса $A(V)$ (см. [I]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Каков бы ни был элемент $x\in H^n\setminus\{0\}$, у надграфика $\det V$, $V\in\mathfrak{M}_n$, либо не существует x – одномерных асимптот, либо они образуют поверхность некоторого выпуклого цилиндра $\mathcal{J}_x(V)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Последовательность $f_t(u)=V(xt+u)-t\beta_V(x)$ не возрастает при $t\to\infty$, так как "со-

---

*)В.Кли [6] называет K-мерной асимптотой замкнутого выпуклого множества C в евклидовом пространстве R^m K-мерную плоскость L в R^n , если $C\cap L=\varnothing$, $\inf_{x\in C,y\in L}|x+y|=0$ $(K<m)$.

пряженная" к ней последовательность $f_t^*(y)=V^*(y)+t(\rho_v(x)-(y,x))$ не убывает: $\rho_v(x)$ – опорная функция множества $dom\,V^*$ (см. [4]). Поэтому существует предел

$$\delta_v^x(u) \overset{onp}{=} \lim_{t\to\infty}[V(xt+u)-t\rho_v(x)]. \qquad (8)$$

Поскольку δ_v^x – выпуклая функция, то либо $\delta_v^x=-\infty$, либо $|\delta_v^x(u)|<\infty$ для всех $u\in H^n$. Множество $\mathcal{J}_x(V)=det\,\delta_v^x$ – искомый выпуклый цилиндр:

$$\delta_v^x(xt+u)=\delta_v^x(u)+t\rho_v(x), \quad \forall u\in H^n, \quad t\in R^1. \qquad (9)$$

Определение 4. Элементы системы $\{\mathcal{J}_x(V), x\in H^n\setminus\{0\}\}$ назовем асимптотическими цилиндрами надграфика $det\,V$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $V\in\mathfrak{M}_n$, $\rho_v(x)=\{y\in K_v:(y,x)=\rho_v(x)\}$ – грань компакта K_v (см. выше), соответствующая лучу $\{xt\in H^n: t\geqslant 0\}$ ([7], стр.134). Тогда

$$\delta_v^x(u)=\sup_{y\in\gamma\rho_v(x)}[(u,y)-V^*(y)], \quad \forall u\in H^n, \quad x\in H^n\setminus\{0\}. \qquad (10)$$

Иначе говоря, если $\mathcal{J}_x(V)\neq H^n\times R^1$, то $\mathcal{J}_x(V)$ – пересечение определенного множества полупространств, содержащих $det\,V$ и ограниченных гиперасимптотами, некоторые параллельные сдвиги которых являются опорными гиперплоскостями асимптотического конуса $A(V)$, проходящими через луч L_x (см. [7]).

Доказательство. Имеем $\delta_v^x(u)=\inf_{t>0} f_t(u)$ (см. выше). Тогда ([2], стр.57) $\varphi_x=\sup_{t>0} f_t^*$ – функция, сопряженная к δ_v^x. Поскольку $dom\,f_t^*=dom\,V^*$, $t>0$, то $dom\,\varphi_x=dom\,V^*\cap\partial\rho_v(x)$ ж) Так как δ_v^x – замкнутая выпуклая функция, то она совпадает со своей двойной сопряженной. Поэтому формула (10) справедлива.

СЛЕДСТВИЕ. Если $H^n=R^n$ и функция $\rho_v(x)$ дифференцируема в точке $x\in R^n\setminus\{0\}$ и $\mathcal{J}_x(V)\neq R^{n+1}$, то $\mathcal{J}_x(V)$ – полупространство $det\left[\sum_{i=1}^n u_i\frac{\partial\rho_v}{\partial x_i}-V^*\left(\frac{\partial\rho_v}{\partial x_1},\dots\frac{\partial\rho_v}{\partial x_n}\right)\right]$.

Теорема I. В обозначениях предложения I имеем для $V\in\mathfrak{M}_n$

ж) См. формулу (4).

$$B(V)=\bigcap_{x\in X_1\setminus\{0\}} \mathcal{J}_x(V), \qquad \delta_V=\sup_{x\in X_1\setminus\{0\}} \delta_V^x . \qquad (11)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $V_1(u_1)$, участвующую в разложении (2). Из формулы (4) следует, что $KV_1=\overline{dom\,V_1^*}$ - выпуклый компакт $dom\,V_1^*=dom\,V^*\cdot y_0$. Поэтому ([8], стр.125)

$$K_{V_1}=\{\alpha\in X_1:(\alpha,u_1)\leqslant\rho_{V_1}(u_1),\ u_1\in X_1\}. \qquad (12)$$

Так как $dim\,K_{V_1}=dim\,X_1$ (предложение I), то $\partial K_{V_1}=\bigcup_{u_1\in X_1\setminus\{0\}}\partial\rho_{V_1}(u_1)$, где $\partial\rho_{V_1}(u_1)$ - грань компакта K_{V_1}, соответствующая лучу $\{u_1 t\in X_1,\quad \tau>0\}$ (см. выше). Используя формулу (10) и учитывая, что полунепрерывная сверху функция $\varphi(\alpha)=(u_1\alpha)-V_1^*(\alpha)$ *) достигает максимума на компакте ∂K_{V_1}, получаем из соотношения (5):

$$\delta_{V_1}(u_1)=\sup_{\alpha\in K_{V_1}}[(u_1,\alpha)-V_1^*(\alpha)]=\sup_{\gamma\in X_1\setminus\{0\}}\delta_{V_1}^{\gamma}(u_1). \qquad (13)$$

Теперь из формул (6), (13) имеем:

$$\delta_V(u_1+u_2)=\rho_V(u_2)+\sup_{\gamma\in X_1\setminus\{0\}}\delta_V^{\gamma}(u_1),\quad \forall u_i\in X_i,\quad i=1,2. \qquad (14)$$

Наконец, из разложения (2) и формулы (8) заключаем:

$$\delta_V^{\gamma}(u_1+u_2)=\delta_{V_1}^{\gamma}(u_1)+\rho_V(u_2),\quad \forall u_i\in X_i,\ i=1,2\ \ \forall\gamma\in X_1\setminus\{0\}. \qquad (15)$$

Теорема I - следствие формул (14), (15).

Замечание. Если $dim\,D<n$ и, следовательно, $X_2\neq\{0\}$, то из соотношений (2), (8) имеем: $\delta_V^x=V$ для $\forall x\in X_2\setminus\{0\}$. Аналогично, используя формулу (15), получим: $\delta_V^x=\delta_V^{x_1}$, где $x_1=p_{\tau_{X_1}}x$ (разложение (2) для ρ_V таково: $\rho_V(u_1+u_2)=\rho_V(u_1)+\rho_V(u_2)\quad \forall u_i\in X_i,\quad i=1,2$).

4. Опишем класс функций, к которому принадлежит функция $\delta_{V_1}(u_1)$.

Определение 4. Пусть $\mathfrak{M}_K^{(K)}=\{\varphi\in\mathfrak{M}_K: dim\,dom\,\varphi\geqq K\}$ ($K\geqslant 1$). Функцию $\varphi\in\mathfrak{M}_K^{(K)}$ назовем полулинейчатой, если для $\forall\lambda\in H^K$ существует $\alpha_\lambda\in H^K\setminus\{0\}$, такое, что

---

*) Замкнутая функция $V_1^*(\alpha)$ - полунепрерывна снизу [2,5].

$$\varphi(\lambda+\alpha_\lambda\tau)=\varphi(\lambda)+\tau\rho_\varphi(\alpha_\lambda), \quad \forall\tau>0. \qquad (16)$$

Таким образом, график полулинейчатой функции φ - полулинейчатая поверхность, состоящая из лучей, параллельных некоторым лучам поверхности асимптотического конуса $A(\varphi)$. В общем случае график φ может не иметь точки, являющейся вершиной для всех ее лучей.

Т е о р е м а 2. Для того чтобы функция φ из $\mathfrak{M}_\kappa^{(\kappa)}$ была полулинейчатой, необходимо и достаточно, чтобы $\det\varphi=B(\varphi)\cdot\kappa$.

<u>Необходимость.</u> Зафиксируем $\lambda\in H^\kappa$. Для $\forall t>0, \alpha\in H\setminus\{0\}$. $\exists y_t\in dom\varphi^*=E$, такое, что

$$\varphi(\lambda+\alpha t)=(\lambda+\alpha t, y_t)-\varphi^*(y_t)=\sup_y[(\lambda+\alpha t, y)-\varphi^*(y)] \quad (17)$$

($-\varphi^*(y)$ - полунепрерывная сверху функция, а $\bar{E}=K_\varphi$ - компакт). Отсюда заключаем, что

$$\varphi(\lambda+\alpha t)\leq\varphi(\lambda)+t(\alpha, y_t).$$

Теперь, применяя формулу (16) при $\alpha=\alpha_\lambda$, получим : $(\alpha_\lambda, y_t)-\rho_\varphi(\alpha_\lambda)\geq 0$. Но $y_t\in K_\varphi$, поэтому (формула (12)) $y_t\in\partial\rho_\varphi(\alpha_\lambda)\subset\partial K_\varphi$, и, возвращаясь к (17), имеем при $\alpha=\alpha_\lambda$

$$\varphi(\lambda)=(\lambda, y_t)-\varphi^*(y_t)=\sup_{y\in\partial K_\varphi}[(\varphi, y)-\varphi^*(y)] \quad \text{и т.д.}$$

<u>Достаточность.</u> Пусть $S^\kappa=\{\alpha\in H^\kappa:\|\alpha\|=1\}$ $(\|\alpha\|=\sqrt{(\alpha,\alpha)})$. Поскольку $\delta_\varphi^{\tau\lambda}=\delta_\varphi^{\alpha}$ для $\forall\tau>0$ (см. (18)), то $\varphi(\cdot\lambda)=\delta_\varphi(\lambda)=\delta_\varphi^{\alpha_\lambda}(\lambda)$ при некотором $\alpha_\lambda\in S^\kappa$ (см. доказательство формулы (13)) [ж]. Из формулы (3), справедливой для выпуклой функции φ, заключаем

$$\varphi(\lambda+\alpha t)-\varphi(\lambda)\leq t\rho_\varphi(\alpha_\lambda), \quad \forall t>0.$$

С другой стороны, с помощью тождества (9) получаем:

$$\varphi(\lambda+\alpha_\lambda t)=\delta_\varphi(\lambda+\alpha_\lambda t)\geq\delta_\varphi^{\alpha_\lambda}(\lambda+\alpha_\lambda t)=\varphi(\lambda)\underset{t>0}{+t}\rho_\varphi(\alpha_\lambda),$$

т.е. φ - полулинейчатая функция.

ж) Это также следует из того, что функция δ_φ^α полунепрерывна сверху по α на S^κ, как предел невозрастающей последовательности функций (см. предложение 3).

§ 2. Об асимптотических свойствах функций ρ_v, δ_v

В этом § мы, имея в виду приложение (§ 3), всюду полагаем $H^n = R^n$ – евклидово пространство, хотя все факты § 2 имеют место и в H^n.

I. ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Для любой функции $V \in \mathfrak{M}_n$ имеем

$$\lim_{u\in C,\ \rho_v(u)\to\infty} V(u)\,[\rho_v(u)]^{-1} = 1, \qquad (18)$$

каков бы ни был конус C с вершиной в 0 такой, что $\bar{C} \setminus \{0\} \subset D_\rho \overset{\text{def}}{=} \{u \in R^n : \rho_v(u) > 0\}$.

Доказательство. Так как $\Phi_x(t) = V(x_1 t, \dots x_n t)$ – выпуклая функция, то отношение $\dfrac{\Phi_x(t) - \Phi_x(0)}{t - 0} \to \rho_v^{(x)}$ при $t \to \infty$, не убывая по t. Поэтому $\Phi_x(t)[\rho_v(x)]^{-1}$ равномерно сходится к I при $t \to \infty$ для $x \in C \cap S^n = \Omega$, $S^n = \{u \in R^n : |u| = 1\}$ $(\inf_{x\in\Omega} \rho_v(x) > 0)$. Отсюда и вытекает формула (18).

Замечание. Утверждение, аналогичное предложению 5, имеет место при $\rho_v(u) \to -\infty$, если $\{u \in R^n : \rho_v(u) < 0\} \neq \emptyset$. Множество $D_\rho \neq \emptyset$, если $V \neq const$. Если бы всюду в R^n $\rho_v(u) \leq 0$, то $V(u) \leq V(0)$ (см. выше) в R^n, что возможно лишь в случае, когда $V = const$.

В соотношении (18) нельзя пренебречь условием $\bar{C} \setminus \{0\} \subset D_\rho$, что показывает следующий

Пример I*). $V = \begin{cases} \tau - \ln u_n, & u_n \geq 1,\ \tau = u_1 + \dots + u_{n-1}; \\ \tau - u_n + 1, & u_n < 1. \end{cases}$

Пусть $C = D_\rho$. Имеем: $\rho_v(u) = \begin{cases} \tau, & u_n > 0, \\ \tau - u_n, & u_n \leq 0. \end{cases}$

$$\varliminf_{\rho_v(u)\to\infty} V(u)[\rho_v(u)]^{-1} = -\infty, \quad \varlimsup_{\rho_v(u)\to\infty} V(u)[\rho_v(u)]^{-1} = 1.$$

2. Роль функций $\{\delta_v\}$ при изучении асимптотики функций $\{V\}$ класса $\mathfrak{M}_n$ естественно исследовать в тех случаях, когда $A(V) = A(\delta_v)$. Именно в этом случае δ_v не только обладает асимптотическим свойством функции ρ_v, описанным в предложении 5, но и дает дальнейшее асимптотическое приближение функции V;

---

*) Пример принадлежит студенту 5-го курса Красноярского госуниверситета В.Тихонову.

$V(u)-\delta_V(u)=\Delta_V(u)\to 0$ при определенном способе стремления $|u|\to\infty$. Так как эта разность $\Delta_V(u)=V_1(u_1)-\delta_{V_1}(u_1)=\Delta_{V_1}(u_1)$, $u_1\in X_1=H^k$, $V_1(u_1)\in\mathfrak{M}_k^{(k)}$ (см. формулы (2), (6)), то достаточно ограничиться изучением асимптотики функций класса $\mathfrak{M}_n$. Хотя ниже рассматривается лишь один из подклассов класса $\mathfrak{M}_n^{(n)}$, полученные в этом пункте результаты с очевидными видоизменениями переносятся и на другие функции класса $\mathfrak{M}_n^n$, для которых $A(V)=A(\delta_V)$.

Пусть $\mathfrak{N}_n$ – подкласс функций класса $\mathfrak{M}_n^n$, состоящий из функций (V), у которых все асимптотические цилиндры $\{\mathcal{I}_\lambda(V)$, $\lambda\in R^n\setminus\{0\}\}$ отличны от пространства R^{n+1}. Из предыдущего §I ясно, что

$$\mathfrak{N}_n=\{V\in\mathfrak{M}_n^n:\delta_V^x(0)>-\infty,\quad \forall x\in R^n\setminus 0\}.$$

В качестве класса сравнения рассмотрим совокупность $\mathcal{B}$ всех полулинейчатых функций класса $\mathfrak{N}_n$.

Теорема 3. Если $V\in\mathfrak{N}_n$, то $\delta_V\in\mathcal{B}$, $A(V)=A(\delta_V)$, $B(V)=B(\delta_V)$ и

$$\lim_{u\in\Pi_x,\,|u|\to\infty}[V(u)-\delta_V(u)]=0,\qquad x\in R^n\setminus 0 \tag{I9}$$

для любого полуцилиндра Π_x с направляющим вектором x и ограниченным основанием *), причем δ_V – единственная функция в $\mathcal{B}$, асимптотически эквивалентная V в смысле выполнения для неё условия (I9).

Доказательство.

I) Пусть $\Gamma_x=D\cap\partial\rho_V(x)$ $(D=\mathrm{dom}\,V^*)$, $T=\bigcup_{x\in R^n\setminus 0}\Gamma_x$.

Так как $V\in\mathfrak{N}$, то $\Gamma_x\neq\emptyset$ при $\forall x\neq 0$ (см. предложение 4). Пусть $\exp K$ – совокупность всех точек границы Γ компакта $K=\bar D$ со свойством: для каждой точки $y_0\in\exp K$ существует опорная гиперплоскость $\Pi=\{y\in R^{n+1}: (y,x)=c\}$, такая, что $\Pi\cap K=\{y_0\}$ (9). Не уменьшая общности, можно считать, что $(y,x)\leq c$ для $\forall y\in K$, тогда $c=\rho_V(x)$ и $\{y_0\}=\partial\rho_V(x)$. Из условий леммы поэтому заключаем, что $\exp K\subset T\subset K$. Так как $\overline{H(\exp K)}=K$ ([I9], стр.I39), то $K_0=H(\cdot)$ и $H(T)=K$. Следовательно, $D=K^0\cup T\subset H(T)$.

---

*) Т.е. x –вектор, определяющий направление, в котором уходит в ∞; проекция Π_x на гиперплоскость $(y,x)=0$ ограничена.

2) Из неравенства

$$\delta_V(u) \leq V(u), \quad \forall u \in R^n \tag{20}$$

заключаем ([2], стр.58) :

$$\delta_V^*(y) \geq V^*(y), \quad D \supset dom\, \delta_V^*.$$

С другой стороны, из формулы (4) вытекает, что δ_V^* – вторая сопряженная функция для $\varphi(y) = \begin{cases} V^*(y), & y \in T \\ +\infty, & y \in R^n \setminus T \end{cases}$. Поэтому ([2], стр.58)

$$V^*(y) \geq \delta_V^*(y), \ \ y \in T, \quad T \subset dom\, \delta_V^*.$$

Используя выпуклость $dom\, \delta_V^*$ и I), получаем: $V^*(y) = \delta_V^*(y)$, $y \in \Gamma$; $dom\, \delta_V^+ = D$. Следовательно, $\delta_V \in \mathfrak{M}_n^n$, $A(V) = A(\delta_V)$ (см. [2]), $B(V) = B(\delta_V)$, $\mathcal{J}_x(V) = \mathcal{J}_x(\delta_V)$, т.е. $\delta_V \in \mathcal{VB}$. С помощью формулы (8) теперь находим:

$$\lim_{t\to\infty} [V(xt+u) - \delta_V(xt+u)] = 0, \ \forall u \in R^n, \ x \neq 0. \tag{21}$$

Причем сходимость здесь равномерная по u на любом компакте в R^n (например, $V(xt+u) - t\rho_V(x)$ убывает при $t \to +\infty$ и непрерывной функции δ_V^x). Но

$$\Pi_x = \{(x_1 t + u_1, \dots x_n t + u_n), \quad t = t_0, \ \ u \in B\},$$

где B – основание Π_x , причем по условию $\bar{B}$ –компакт. Поэтому соотношение (19) справедливо.

3) Пусть существует функция $\varphi \in \mathcal{VB}$, удовлетворяющая условию (19) и, следовательно, (21). Тогда, используя формулы (1), (8), обнаружим $A(V) = A(\varphi)$, $\mathcal{J}_x(V) = \mathcal{J}_x(\varphi)$. Наконец, из теоремы I следует,

$$det\, \varphi = B(\varphi) = \bigcap_{x \in R^n \setminus 0} \mathcal{J}_x(\varphi) = det\, \delta_V .$$

Теорема доказана.

В теореме 3 нельзя Π_x заменить кривой, уходящей в ∞ и не помещающейся ни в какой полуцилиндр описанного типа. Это показывает следующий

Пример 2. Пусть $g = exp\{|u|\} + exp\left\{\frac{u_1+u_2}{\sqrt{2}}\right\}$, где $|u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$. $V = \ln g$ – выпуклая функция, причем $A(V) = det|u|$, $B(V) = det\, \delta_V$, $\delta_V = \ln \sigma$, $\sigma = max\left\{e^{|u|}, \ 2e^{\frac{u_1+u_2}{\sqrt{2}}}\right\}$.

Рассмотрим кривую $L=\{(u)=\ln 2+\frac{u_1+u_2}{\sqrt{2}}\}$, не помещающуюся ни в один полуцилиндр с ограниченным основанием. Имеем

$\lim\limits_{|u|\to\infty} g(u)[\sigma(u)]^{-1}=\frac{3}{2}$, т.е. $\lim\limits_{|u|\to+\infty}[V(u)-\delta_V(u)]>0$.

3. Явления, описанного в этом примере, иногда можно избежать.

Теорема 4. Пусть $V\in\mathfrak{M}_u$, причем $\operatorname{dom} V^*=K$ – компакт, $\dim K=n>2$. Если $V^*(y)$ – непрерывная функция на Γ , то

$$\lim_{|u|\to\infty}[V(u)-\delta_V(u)]=0 . \qquad (22)$$

1) **ЛЕММА.** Пусть g, $\operatorname{dom} g=K$ – замкнутая выпуклая функция, K – n-мерный (выпуклый) компакт. Если след $\Psi(y)=g(y)|\Gamma$, $\Gamma=\partial K$ – непрерывная функция на Γ , то такова же и функция $g(u)|K$.

Доказательство. Так как g – полунепрерывная снизу функция [2,5], то достаточно показать, что она полунепрерывна сверху. Зафиксируем произвольно точку $y_0\in\Gamma$. Пусть $C=\overline{\lim\limits_{y\to y_0,\ y\in K}}\,g(y)$, $\{y^{(k)}\}\to y_0$ – последовательность точек из K , такая, что $C=\lim\limits_{k\to\infty} g(y^{(k)})$; $\Pi=\{y\in R^n: (y,x)=C\}$ – опорная гиперплоскость компакта K в точке y_0, $t=(\eta_1\cdots\eta_n)\in K^0$ – произвольно фиксированная точка, $t\neq y^{(k)}$, $k=1,2,$ Проведем через t и y прямую L_k .

Рассмотрим последовательности точек $\{X^{(k)}\}=\{L_k\cap\Pi\}$, $\{V^{(k)}\}=\{[y^{(k)},X^{(k)}]\cap\Gamma\}$ ($[y^{(k)}x^{(k)}]$ -отрезок). Легко видеть, что $X^{(k)}\to y_0$ и, следовательно, $V^{(k)}\to y_0$. Имеем: $y^{(k)}=\lambda_k t+\mu_k V^{(k)}$, $\lambda_k+\mu_k=1$, $\lambda_k,\mu_k>0$. В силу выпуклости функции g справедливо неравенство: $g(y^{(k)})\le\max\{g(t),g(V^{(k)})\}$. Из условия леммы тогда вытекает, что $C\le\max\{g(t),g(y_0)\}$. Полуинтервал $[t,y_0]$ состоит из внутренних точек. Кроме того, след g на $[t,y_0]$ – непрерывная функция (g -полунепрерывная снизу функция.) Поэтому $C\le g(y_0)$ и лемма доказана.

---

*) Лемма справедлива и в том случае, когда K-замкнутое выпуклое множество с непустой границей Γ .

2) Из предыдущего имеем (доказательство теоремы 2): $\delta_v^*(y)|\Gamma = V^*(y)|\Gamma$. По лемме $\delta_{v_i}^* V^*$ – непрерывные функции на K. Функция $G(y) = \delta_v^*(y) - V^*(y)$ равномерно непрерывна на K и неотрицательна, поскольку всюду $V(u) \geqslant \delta_v(u)$ (см. (20)). Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$, такие, что

$$0 \leqslant G(y) < \varepsilon \quad y \in \Gamma_\delta \overset{def}{=} K \cap O_\delta(\Gamma), \tag{23}$$

где $O_\delta(\Gamma)$ – δ -окрестность границы Γ.

3) Пусть $\partial V(u) = \{y \in R^n : V(u) + V^*(y) = (u, y)\}$ – совокупность всех "субградиентов" функции V в точке u [10]. Согласно теореме Фенхеля (II), $\partial V(u) \neq \phi$ при любом $u \in R^n$. Покажем, что при некотором $\tau > 0$ $\partial V(u) \cap \Gamma_v \neq \phi$ для $\forall u \in R^n \setminus S(o)$.

Предположим противное: для любого $\tau > 0$ существует точка $u^{(\tau)} \in R^n \setminus S_\tau(o)$, такая, что $\partial V(u_\tau) \cap \Gamma_\delta \neq \phi$. Существует последовательность $u^{(k)}$ точек пути $(u^{(\tau)}, \tau \in (0, \infty))$, такая, что $u^{(k)} = X^{(k)}/K_{n+1}^{(k)}$, $|X^{(k)}| = 1$ $X_{n+1}^{(k)} = |u^{(k)}|^{-1}$, $x^{(k)} \to x_* + S_1(o)$.

Рассмотрим функцию

$$f = f(X, X_{n+1}) = \begin{cases} X_{n+1} \cdot V\left(\frac{X_1}{X_{n+1}} \cdots \frac{X_n}{X_{n+1}}\right), & X_{n+1} > 0, \\ \rho v(x), & X_{n+1} = 0, \\ +\infty, & X_{n+1} < 0. \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что f -положительно однородная выпуклая функция в R^n, непрерывная при $X_{n+1} \geqslant 0$. Поэтому её сопряженная f -индикаторная функция множества ([I], [2])

$$C = \{(y, y_{n+1}) \in R^n : y \in K, \quad y_{n+1} \leqslant V(y)\}.^{*)}$$

Если $y \in \partial V(\frac{X}{X_{n+1}})$, то при $\forall X_{n+1} > 0$

$$(y, -V(y)) \in \partial f(X, X_{n+1}).$$

Выберем произвольно $y^{(k)} \in \partial V(u^{(k)})$, $k = 1, 2$. Так как $\partial V(u) \subset K$, то существует сходящаяся последовательность $\{y^{(p)}\}$ последовательности $\{y^{(k)}\}$. Пусть $y^{(p)} \to y_o \in K$. Тогда в силу непрерывности $V(y)$ на K $(y^{(p)} - V(y^{(p)}) \to (y_o, V(y_o))$. По теореме Ж.Ж.Моро ([10], стр.296), $\Phi : ((X_n, X_{n+1}), \partial f(X, X_{n+1})) \to (X, X_{n+1}) \cdot \partial f(X, X_{n+1})$ – непрерывное отображение из $R^{n+1} \times R^{n+1}$ в R^{n+1}. Так как $y^{(p)} - V^*(y^{(p)}) \in \partial f(X^{(p)}, X_{n+1}^{(p)})$, где $X_i^{(p)}/X_{n+1}^{(p)} = u^{(p)}$,

---

*) Т.е. $f^*(y, y_{n+1}) = 0$ в C и $= +\infty$ в $R^{n+1} \setminus C$.

$(X^{(p)}, X^{(p)}_{n+1}) \to (X_0, 0)$ (см. выше), то

$$(y_0, -V(y_0)) \in \partial t(x_0, 0) = \{(y, y_{n+1}) \in C : (y, x) - f(x,0) < p_V(x)\}.$$

Следовательно, $y_0 \in \partial p_V(x)$. С другой стороны, поскольку $\partial V(u^{(p)}) \subset K \setminus \Gamma_\delta$ при $\forall p = 1,2$, то $y_0 \in K \setminus \Gamma_\delta$. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

4) Для любого $u \in R^n$

$$V(u) = (u, y) - V(y) \quad \text{при } y \in \partial V(u).$$

Так как при $(u) > \tau_0$, $\partial V(u) \cap \Gamma_\delta \neq \phi$, то $V(u) = \sup\limits_{y \in \Gamma_\delta}[(u, y - V^+(y)]$.

Поэтому из неравенства (23) имеем: $\delta_V(u) \leq V(u) \leq \delta_V(u) + \varepsilon$ при $|u| > \tau_0$. Теорема доказана.

Анализ последней части этого доказательства легко приводит к следующему результату в общем случае.

Для того, чтобы функция V из $\mathcal{R}_n$ удовлетворяла условию (22), необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало $t_0(\varepsilon) = t_* > 0$, такое, что

$$R^n \setminus S_{t_*}(0) \subset \bigcup (\partial \delta_V(y) \cap \partial_\varepsilon V^*(y)), \quad D = dom\ V,$$

где $\partial_\varepsilon V(y) = y \in \mathcal{D} \cap \partial D = \{u \in R^n : V(x) + \varepsilon \geq V(y) + (u, x - y), \forall x \in R^n\}$.
Геометрически это условие означает: к надграфикам $det\,\delta_V^+$, $det\,(V+\varepsilon)$ существует общая "опорная" гиперплоскость $y_{n+1} = (u, y) + C_u$ с произвольным направляющим вектором u достаточно большой длины.

§ 3. Приложение к целым функциям многих переменных

Пусть $P = \{f(t) = f(z_1, \dots z_n)$ - класс целых функций от n комплексных переменных, такой, что

$$0 < \overline{\lim_{z \to \infty}}\ ln(z)^{-1} ln\, ln\, \mathcal{M}_f(z_1 \cdots z) < \infty \quad \forall f \in P,$$

где $\mathcal{M}_f(z_1, \cdots z_n) = \sup\limits_{|z_i| \leq z_i} |f(z)|$, $W_f(u) = ln\, ln\, \mathcal{M}_f(e^{u_1}, \dots e^{u_n})$,
$Q = \{f \in P : W_f(u)$ - выпуклая функция в R^{n+1} ж) $\}$.

ж) Выпуклая функция локально ограничена снизу [5], поэтому для $f \in Q$ $\{u \in R^n : \mathcal{M}_f(e^{u_1} \dots e^{u_n}) > 1\} = R^{n+1}$.

(В общем случае, $W_f(u)$ – квазивыпуклая функция).

Учитывая, что $\rho_w(u)$ – неубывающая функция по каждой переменной u_i, и используя неравенство: $u=(u_1\cdots u_n)\in R^n$

$$\max_{i\in\{1,\dots n\}}\{\rho_w(\ell_i)u_i\}\le\rho_w(u)\le\sum_{i=1}^{n}\rho_w(\ell_i)u_i,\quad \forall u\in R^n_+,$$

где R^n_+ – неотрицательный октант в R^n, $e_1=(1,0\cdots0),\cdots$ $\cdots \ell_n=(0,\cdots0,1)$, заключаем: $W_f\in\mathcal{M}_n$ [x]). Поэтому все изложенные выше результаты применимы к изучению асимптотики роста (и убывания при стремлении к 0 некоторых из координат $z_1,\cdots z_n$) мажорант $\{\mathcal{M}_f(z_1,\cdots z_n)\}$ функций класса Q.

Если $u=1$, то шкала

$$\mathcal{B}_1=\{exp(exp(\varphi(\ell n\, z))),\ \varphi\in\mathcal{B}\}=\{exp(max(\tau_1 z^{\gamma_1},\cdots\tau_2 z^{\gamma_2})),$$
$$\tau_i>0,\ \gamma_i\in R^1,\ i=1,2\}$$

асимптотически эквивалентна при $z\to\infty$ классической шкале роста целых функций $\{exp\{\tau z\gamma\},\ \tau,\gamma>0\}$, если $0\le\gamma_1\le\gamma_2$, т.е. если мы ограничимся рассмотрением в $\mathcal{B}_1$ возрастающих функций, какой является и $\mathcal{M}_f(z)$.

Литература

1. R.T.Rockafellar, Level sets and continuity of conjugate convex functions, Trans. Amer. Math. Soc., 123, No. 1 (1966), 46-63.
2. А.Д.Иоффе, В.М.Тихомиров, Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи, УМН, т.XXШ, в.6 (144), 51-116.
3. Л.И.Ронкин, О росте функции $\Phi(z_1,\dots,z_n)$, выпуклой относительно $\ell n\, z_1,\dots,\ell n\, z_n$. Доклады АН. наук СССР, 172, № 5 (1967), 1028-1031.
4. Л.С.Маергойз, Некоторые свойства выпуклых множеств и их приложения к теории роста выпуклых и целых функций, Сиб. матем. ж., II, № 3 (1968), 577-591.
5. A.Brondsted, Conjugate convex functions in topological vector spaces, Mat.-Fys.Medd. Danske Vid. Selsk, 34, 2(1964).
6. V.Klee, Asymptotes and projections of convex sets, Math. Scand., 8(1960), 356-362.
7. М.М.Дэй, Нормированные линейные пространства, ИИЛ, М.,1961.
8. Д.А.Райков, Векторные пространства. Физматгиз, М., 1962.

---

x) P – типичный класс целых функций, являющийся объектом исследования при изучении роста целых функций [3,4]. Именно этим вызвано ограничение $dom\,V=R^n$, накладываемое на функции класса $\mathcal{M}_n$.

9. F.A.Valentine, Convex sets, N.Y., 1964.

10. J.J.Moreau, Proximité et dualité dans un espace hilbertien, Bull. Soc. Math. France, 93(1965), 273-299.

11. W.Fenchel, On conjugate convex functions, Canad. J. Math. 1(1949), 73-77.

12. Л.С.Маергойз, Тезисы докладов всесоюзного симпозиума по теории голоморфных функций многих комплексных переменных. Красноярск, 1969, 27-28.

Поступила в редакцию
4.XII. 1969 г.