УДК 517.948:513.88

О ЛОКАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕМОНОТОННЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

М.Д.Зияудинов

В работе рассматривается некоторый неизотонный оператор, переводящий конусный отрезок $X \subset R^n_+$ в себя. Показывается, что все предельные элементы последовательности $\{x_n = Fx_{n-1}\}(n=1,2,\dots)$ находятся в некотором множестве $\tilde{X} \subset X$, каково бы ни было начальное значение $x_0 \in X$. Устанавливается также, что все неподвижные элементы оператора F находятся в множестве $\tilde{X}$. Полученные результаты переносятся на случай, когда $X \subset C_Q$, где C_Q - множество всех непрерывных функций, заданных на компакте Q.

1^0. Пусть $x = \{x_i\}$ и $y = \{y_i\}$ $(i=1,2,\dots,n)$ - некоторые элементы из R^n. В дальнейшем будем писать $x \geqslant y$, если $x_i \geqslant y_i$ для $i=1,2,\dots,n$; $x > y$, если $x \geqslant y$ и $x \neq y$; $x \succ y$, если $x_i > y_i$ для $i=(1,2,\dots,n)$. Запись $x \gtrless y$ означает, что хотя бы (*) для одного [illegible] $N=\{1,2,\dots,n\}$ выполняется неравенство $x_{i_0} > y_{i_0}$ (т.е. x и y несравнимы).

Пусть x' и x'' - некоторые элементы из R^n, причем $x' \leqslant x''$; тогда множество $\{x : x' \leqslant x \leqslant x''\}$ обозначается через $\langle x', x'' \rangle$ и называется конусным отрезком.

Пусть $X = \{x \in R^n_+ : x \leqslant \bar{x}\}$, где $\bar{x}$ — некоторый ненулевой элемент из R^n_+.

Пусть, далее, $B : X \to X$, причем для B выполняются условия:

(а) $Bx \geqslant 0$ для всех $x \in X$;

(б) B непрерывен в X;

(*) (символы в оригинале не читаются)

(в) существует число $\mu > 0$ такое, что $B x_0 \leqslant \mu \tilde{x}$, где x_0 таков, что

$$B x_0 = \sup_{x \in X} B x . \qquad (I.0)$$

(Существование элемента x_0, удовлетворяющего (I.0) обеспечивает условие (б)).

Пусть теперь непрерывный оператор C из X в X таков, что найдутся непрерывные изотонные неотрицательные операторы $\underline{C}$ и $\bar{C}$ из X в X такие, что $\underline{C} x + \alpha \tilde{x} \leqslant C x \leqslant \bar{C} x$ и $\bar{C} \tilde{x} \leqslant \beta \tilde{x}$, где α и β – фиксированные неотрицательные числа, β удовлетворяет условию $\bar{C} \tilde{x} \leqslant \beta' \tilde{x}$ для любого ($\beta = \inf \{\theta : \bar{C} \tilde{x} \leqslant \theta \tilde{x}\}$).

Пусть, наконец, A – линейный неотрицательный оператор из R^n в R^n такой, что

$$0 \leqslant A \tilde{x} \leqslant \frac{1}{\beta + \mu} \tilde{x} . \qquad (I.I)$$

(Здесь и ниже $\mu = \inf \{\gamma > 0 : B x_0 \leqslant \gamma \tilde{x}\}$).

Рассмотрим оператор F, определенный формулой:

$$F x = A (B + C)(x) \quad (x \in X) . \qquad (I.2)$$

Оператор F непрерывен и неотрицателен.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (см.[2]). Минорантой (мажорантой) оператора F на X назовем оператор $\underline{F}$ ($\bar{F}$) такой, что $\underline{F} x \leqslant F x$ ($\bar{F} x \geqslant F x$) для любого $x \in X$.

Очевидно, что операторы

$$\underline{F} x = A \underline{C} x + \alpha A \tilde{x} , \qquad (I.3)$$

$$\bar{F} x = A \bar{C} x + \mu A \tilde{x} \qquad (I.4)$$

являются соответственно минорантой и мажорантой оператора F на X.

ЛЕММА I.I. Операторы $\underline{F}$ и $\bar{F}$ оставляют множество X инвариантным (т. е. $\underline{F} X \subset X$, $\bar{F} X \subset X$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из неотрицательности $\underline{C}$ на X и из условия (I.I) следует, что $\underline{F} x \geqslant 0$ для любого $x \in X$, следовательно, и $\bar{F} x \geqslant 0$ для всех $x \in X$ ($\underline{F} x \leqslant \bar{F} x$ для любого $x \in X$).

Достаточно показать, что $\bar{F}x \leqslant \tilde{x}$ для любого $x \in X$. Из неравенства (I.I) имеем: $(\beta+\mu)A\tilde{x} \leqslant \tilde{x}$, или же $A\beta\tilde{x}+\mu A\tilde{x} \leqslant \tilde{x}$. Если $\beta\tilde{x}$ заменить на $\bar{C}\tilde{x}$, то неравенство лишь усилится, т.е. $\mu A\tilde{x}+A\bar{C}\tilde{x} \leqslant \tilde{x}$. Из определения $\bar{C}$ следует, что $\bar{C}x \leqslant \bar{C}\tilde{x}$ для любого $x \in X$, следовательно, выполняется соотношение $\mu A\tilde{x}+A\bar{C}x \leqslant \tilde{x}$, т.е. $\bar{F}x \leqslant \tilde{x}$.

Для операторов $\underline{F}$ и $\bar{F}$ выполняются все условия леммы 2 из [I]. Таким образом, операторы $\underline{F}$ и $\bar{F}$ имеют неподвижные элементы в множестве X. Покажем, что при некоторых ограничениях на $\underline{C}$ ($\bar{C}$) существует лишь единственное решение уравнения $\underline{F}x = x$ ($\bar{F}x = x$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (см. [3]). Оператор T называется неразложимым в X, если для любого множества индексов $S=\{i_1,\dots,i_n\} \subset N$ из соотношения $x_i = x_i'$ для $i \in S$ и $x_h < x_h'$ для $h \notin S$ следует, что существует, по крайней мере, одно $i \in S$ такое, что $T_i x \neq T_i x'$.

В работе [3] доказана теорема существования и единственности положительного собственного числа τ оператора T и единственного собственного вектора z, соответствующего τ при условиях:

(а′) T положительно однороден I-й степени, т.е. $T(tx)=tTx$ при любых $t>0$ и $x \geqslant 0$;

(б′) если $x \geqslant 0$, то $Tx \geqslant 0$;

(в′) для всех x' и x' таких, что $x' \leqslant x''$ выполняется $Tx' \leqslant Tx''$;

(г′) T неразложим в X.

Если T — линейный оператор, задаваемый квадратной матрицей $\{t_{ij}\}_1^n$, где $t_{ij} \geqslant 0$, то неразложимость для него означает, что не существует разбиения множества $\{1,2,\dots,n\}$ на два множества (без общих индексов) $\{i_1,i_2,\dots,i_\xi\}$ и $\{\kappa_1,\kappa_2,\dots,\kappa_\sigma\}$ ($\xi+\sigma=n$) такого, что

$$t_{i_p \kappa_q} = 0 \quad (p=1,2,\dots,\xi\ ;\ q=1,2,\dots,\sigma).$$

Как известно [4], при этом предположении верна теорема Перрона-Фробениуса.

ТЕОРЕМА I.I. *Пусть для оператора* $\underline{C}$ ($\bar{C}$) *помимо условий, указанных выше, выполняется еще соотношение*

$\underline{C}\lambda x \geqslant \lambda \underline{C} x$ $(\bar{C}\lambda x \geqslant \lambda \bar{C} x)$ для $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ и для любого $x \in X$. Тогда если либо $A\underline{C}$ $(A\bar{C})$ неразложимый, либо $A\tilde{x} > 0$, то существует лишь единственный элемент $v > 0$ $(w > 0)$ такой, что $v = \underline{F} v$ $(w = \bar{F} w)$.

__Положительность.__ Предположим, что $v_i = 0$ для $i \in S$ и $v_h > 0$ $h \notin S$. Из изотонности и неразложимости $A\underline{C}$ (или из $A\tilde{x} > 0$) следует, что если $\mu < 1$, то

$$(\underline{F}\mu v)_i = (A\underline{C}\mu v + \alpha A\tilde{x})_i < (A\underline{C} v + \alpha A\tilde{x})_i = (Fv)_i \quad (1.5)$$

по крайней мере для одного $i \in S$. Полученное противоречие доказывает, что $v > 0$.

__Единственность.__ 1) Пусть $A\underline{C}$ – неразложимый на X и пусть существуют v и $\bar{v}$ такие, что

$$v = \underline{F} v, \quad \bar{v} = \underline{F}\bar{v}; \quad v \neq \bar{v}. \quad (1.6)$$

Найдется $\lambda > 0$ такое, что $\lambda v \leqslant \bar{v}$ и $\lambda' v \nleqslant \bar{v}$ для любого $\lambda' > \lambda$, где $\lambda = \sup\{\theta \geqslant 0 : \theta v \leqslant \bar{v}\}$. Так как v и $\bar{v}$ равноправны, то λ можно взять из $(0, 1]$ (если $\lambda > 1$, то, беря $v \geqslant \bar{\lambda}\bar{v}$, мы получим $\bar{\lambda} < 1$). Соотношение $\lambda = \bar{\lambda} = 1$ означает равенство $v = \bar{v}$, что невозможно.

Оператор $\underline{F}$ изотонный, следовательно, $\underline{F}\lambda v \leqslant \underline{F}\bar{v}$, или же $A\underline{C}\lambda v + \alpha A\tilde{x} \leqslant A\underline{C}\bar{v} + \alpha A\tilde{x}$. Добавляя к левой части последнего неравенства элемент $\alpha(\lambda - 1)A\tilde{x}$, получим

$$A\underline{C}\lambda v + \alpha A\tilde{x} + \alpha(\lambda - 1)A\tilde{x} \leqslant A\underline{C}\bar{v} + \alpha A\tilde{x} \quad (\alpha(\lambda-1)A\tilde{x} \leqslant 0).$$

Отсюда

$$A\underline{C}\bar{v} + \alpha A\tilde{x} \geqslant A\underline{C}\lambda v + \alpha\lambda A\tilde{x},$$

или же

$$\bar{v} = A\underline{C}\bar{v} + \alpha A\tilde{x} \geqslant \lambda(A\underline{C} v + \alpha A\tilde{x}) = \lambda v.$$

Из неразложимости $A\underline{C}$ следует, что $(A\underline{C}\bar{v})_i > (A\underline{C}\lambda v)_i$ хотя бы для одного $i \in S$. Так как $\lambda < 1$, то $(\alpha A\tilde{x})_i \geqslant (\lambda\alpha A\tilde{x})_i$, т.е.

$$\bar{v}_i = (A\underline{C}\bar{v})_i + \alpha(\alpha A\tilde{x})_i > (\lambda A\underline{C} v)_i + (\lambda\alpha A\tilde{x})_i = \lambda v_i,$$

что противоречит условию $i \in S$.

2) Предположим теперь, что $A\tilde{x} > 0$, и пусть существуют v

и $\bar{v}$ такие, что $\underline{F}v = v$, $\bar{F}\bar{v} = \bar{v}$; $v \neq \bar{v}$. Берем опять $\lambda < 1$ $(\lambda = \sup\{\theta \geq 0 : \theta v \leq \bar{v}\})$. Тогда

$$\bar{v} = F\bar{v} = A\underline{C}\bar{v} + \alpha A\bar{x} \geq \lambda A\underline{C}v + \alpha A\bar{x} > \lambda A\underline{C}v + \alpha A\bar{x} + \alpha(\lambda-1)A\bar{x} =$$

$$= \lambda(A\underline{C}v + \alpha A\bar{x}) = \lambda v,$$

что невозможно, так как $S \neq \emptyset$.

Положительность и единственность w доказывается совершенно аналогично.

ЛЕММА I.2. В условиях теоремы I.I $v \leq w$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, из $v = \underline{F}v$ и из определения $\underline{F}$ и $\bar{F}$ следует, что $v \leq \bar{F}v$. С другой стороны, $\bar{F}\bar{x} \leq \bar{x}$. Покажем, что $\bar{F}$ оставляет конусный отрезок $\langle v, \bar{x}\rangle$ инвариантным. Это очевидно так, потому что $\bar{F}$ изотонный (из $v \leq x \leq \bar{x}$ следует, что $\bar{F}v \leq \bar{F}x \leq \bar{F}\bar{x}$, но $v \leq \bar{F}v$ и $\bar{F}\bar{x} \leq \bar{x}$, т.е. $\bar{F}x \in \langle v, \bar{x}\rangle$ для любого $x \in \langle v, \bar{x}\rangle$). В силу леммы 2 из [I] в $\langle v, \bar{x}\rangle$ существует элемент $\hat{x}$ такой, что $\bar{F}\hat{x} = \hat{x}$, следовательно, $v \leq \hat{x}$. В условиях теоремы I.I этот элемент $\hat{x}$ совпадает с единственным неподвижным элементом w оператора $\bar{F}$, т.е. $v \leq w$.

ТЕОРЕМА I.2. Все предельные элементы последовательности

$$x_n = Fx_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

находятся в конусном отрезке $\langle v, w\rangle$, каково бы ни было начальное значение $x_0 \in X$, где v (w) — единственное решение уравнения $\underline{F}x = x$ $(\bar{F}x = x)$ $(x \in X)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нужно показать, что

$$\underline{F}\underline{x}_n \leq Fx_n \leq \bar{F}\bar{x}_n \tag{I.7}$$

для любого $n = 1, 2, \dots$, где $\underline{x}_n = \underline{F}\underline{x}_{n-1}$; $x_n = Fx_{n-1}$; $\bar{x}_n = \bar{F}\bar{x}_{n-1}$ $(\underline{x}_0 = x_0 = \bar{x}_0)$. Докажем теорему по индукции. Неравенство (I.7) верно для $n = $ I, ибо из определения $\underline{F}$ и $\bar{F}$ следует, что

$$\underline{F}x_0 \leq Fx_0 \leq \bar{F}\bar{x}_0\,; \quad \underline{x}_1 = \underline{F}x_0,\ x_1 = Fx_0,\ \bar{x}_1 = \bar{F}\bar{x}_0,$$

т.е.

$$\underline{x}_1 \leq x_1 \leq \bar{x}_1.$$

Пусть неравенство (I.7) выполнено для $n=T$. Покажем, что оно выполнено для $n=T+1$. Имеем $\underline{x}_T \leqslant x_T \leqslant \bar{x}_T$. Из определения $\underline{F}$ и $\bar{F}$ и из изотонности этих операторов в X следует, что

$$\underline{F}\,\underline{x}_T \leqslant \underline{F} x_T \leqslant F x_T \leqslant \bar{F} x_T \leqslant \bar{F}\bar{x}_T ,$$

т.е.

$$\underline{x}_{T+1} \leqslant x_{T+1} \leqslant \bar{x}_{T+1} .$$

Отсюда следует, что последовательность $\{\underline{x}_n\}$ сходится и ее предел v есть неподвижная точка оператора $\underline{F}$. В самом деле, возьмем последовательности $\{\hat{x}_n\}, n=0,1,2,\ldots, \hat{x}_0=0$ и $\{\hat{\hat{x}}_n\}$, $n=0,1,2,\ldots \hat{\hat{x}}_0=\bar{x}$. Тогда $\hat{x}_{n-1}\to v$ и $\hat{\hat{x}}_{n-1}\to v$ и $\hat{x}_{n-1}\leqslant \underline{x}_{n-1}\leqslant \hat{\hat{x}}_{n-1}$ $(\hat{x}_n=\underline{F}\hat{x}_{n-1}, \hat{\hat{x}}_n=\underline{F}\hat{\hat{x}}_{n-1}), n=1,2,\ldots$ Совершенно аналогично доказывается, что $\bar{x}_n\to w$.

ТЕОРЕМА I.3. В с е р е ш е н и я о п е р а т о р н о г о у р а в н е н и я $Fx=x$ $(x\in X)$ н а х о д я т с я в к о н у с н о м о т р е з к е $\langle v,w\rangle$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. F – непрерывный неотрицательный оператор из X в X, оставляющий X инвариантным, следовательно, по теореме Брауэра существует элемент $\bar{x}$ такой, что $F\bar{x}=\bar{x}$. Покажем, что $\bar{x}\in\langle v,w\rangle$. В самом деле, из определения $\underline{F}$ и $\bar{F}$ имеем

$$\underline{F}\bar{x} \leqslant F\bar{x} = \bar{x} \leqslant \bar{F}\bar{x}.$$

Очевидно, что $\underline{F}$ оставляет конусный отрезок $\langle 0,\bar{x}\rangle$ инвариантным. По лемме 2 из [I] для $\underline{F}$ в $\langle 0,\bar{x}\rangle$ существует неподвижный элемент $\hat{x}$. Согласно теореме I.2, $\hat{x}=v$. Таким образом, $v\leqslant\bar{x}$. Совершенно аналогично показывается, что $\bar{x}\leqslant w$, т.е. $v\leqslant\bar{x}\leqslant w$.

Рассмотрим пример. Пусть $\alpha=0$, B оператор из X в X такой, что для него выполнены условия (а), (б), (в). Возьмем оператор

$$Cx = \left(\min_{1\leqslant k\leqslant n}\left(\frac{x_k}{b_{k1}}\right),\ldots,\min_{1\leqslant k\leqslant n}\left(\frac{x_k}{b_{kn}}\right)\right)(x\in X),\ b_{kj}>0\ (k,i=1,2,\ldots,n). \quad (I.8)$$

В качестве $\underline{C}$ возьмем

$$\underline{C}x = \left(\frac{1}{\max\limits_{1\le k\le n} b_{k1}} \min_{1\le k\le n}(x_k), \cdots, \frac{1}{\max\limits_{1\le k\le n} b_{kn}} \min_{1\le k\le n}(x_k)\right),$$

а в качестве

$$\bar{C}x = \left(\frac{1}{\min\limits_{1\le k\le n} b_{k1}} \min_{1\le k\le n}(x_k), \dots, \frac{1}{\min\limits_{1\le k\le n} b_{kn}} \min_{1\le k\le n}(x_k)\right).$$

Пусть еще $\mu=0$. Тогда $Bx=0$ для всех $x\in X$. Рассмотрим неотрицательную ($n\times n$)-матрицу A. Тогда $Fx=ACx$. В работе [5] изучается асимптотика траекторий этого оператора, определенного на конусе R^n_+. При некоторых условиях на A доказывается существование и единственность собственного вектора, а также слабая и сильная устойчивость решения равностной схемы $x_{n+1}=Fx_n$ ($n=0,1,2,\dots$) при $x_0\in R^n_+$.

В данном случае имеем, что $\underline{F}\underline{x}_n \le Fx_n \le \bar{F}\bar{x}_n$, причем

$$\underline{F}\underline{x}_n \to v, \quad \bar{F}\bar{x}_n \to w, \quad Fx = ACx \quad (x\in X).$$

Оператор F изотонный, поэтому последовательность $\{Fx_n\}$ сходится к неподвижному элементу $\bar{x}=F\bar{x}\in\langle v,w\rangle\subset X$.

В условиях теоремы I.I работы [5] неподвижный элемент оператора F единственен, следовательно, последовательность $\{Fx_n\}$ ($n=1,2,\dots$) сходится к единственному неподвижному элементу $\bar{x}=F\bar{x}$ (т.е. имеет место сильная устойчивость).

2^0. В этом пункте мы будем рассматривать операторы A, удовлетворяющие условию: существует $\lambda>0$ такое, что

$$\lambda\bar{x} \le A\bar{x}. \tag{2.1}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. (см. [6]). Оператор T, действующий в R^n, назовем u_0-вогнутым на X, если, во-первых, существует ненулевой элемент $u_0\in R^n_+$, такой, что для любого ненулевого $x\in X$ найдутся $\alpha(x)>0$ и $\beta(x)>0$ такие, что справедливы неравенства

$$\alpha u_0 \le Tx \le \beta u_0, \tag{2.2}$$

во-вторых, для каждого $x\in X$, такое что $\alpha_1(x)u_0\le x\le\beta_1(x)u_0$, и для каждого $t_0\in(0,1)$ существует такое $\eta=\eta(x,t_0)>0$, что

$$T(t_0x) \ge (1+\eta)t_0Tx.$$

Для u_0-вогнутого оператора T в работе [7] доказана теорема 4 о сходимости последовательных приближений $x_n = Tx_{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$, по u_0-норме к ненулевому решению x^* уравнения $Tx = x$ при любом ненулевом начальном приближении $x_0 \in K$, а если конус K нормален, то и по обычной норме.

Предположим, что операторы $\underline{C}$ и $\bar{C}$ u_0- вогнуты, где вместо u_0 взят элемент $\tilde{x}$ (т.е. $u_0 = \tilde{x}$).

ЛЕММА 2.1. Пусть $\underline{C}$ и $\bar{C}$ u_0-вогнуты. Тогда операторы $\underline{F}$ и $\bar{F}$ u_0-вогнуты.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения u_0-вогнутости оператора $\underline{C}$ следует, что

$$\theta u_0 \leq \underline{C} x \leq \theta' u_0 \qquad (\theta = \theta(x),\ \theta' = \theta'(x) > 0),\ x \in X.$$

Оператор A линеен, положителен, значит, и изотонен. Тогда

$$A(\theta u_0) \leq A\underline{C}x \leq A(\theta' u_0),$$

или же

$$\theta A u_0 \leq A\underline{C}x \leq \theta' A u_0.$$

Используя (1.1) и (1.2), имеем

$$\theta_1 u_0 \leq A\underline{C}x \leq \theta' u_0, \qquad (2.3)$$

где $\theta_1 = \lambda\theta$, а $\theta' = \theta \cdot \frac{1}{\beta+\mu}$. Оператор $\underline{F}$ ($\bar{F}$) u_0-вогнут и изотонен на X, следовательно, существует единственный неподвижный элемент v (w), причем последовательные приближения $\underline{x}_n = \underline{F}\underline{x}_{n-1}$, ($\bar{x}_n = \bar{F}\bar{x}_{n-1}$) $(n = 1, 2, \ldots)$ сходятся по норме к v (w), каково бы ни было начальное приближение $x_0 \in X$ (теорема 6.6 из [2]).

Пусть теперь B и C такие же, что и в 1^0, а $A \gtrless 0$. Представим A в виде $A = A^+ - A^-$, где A^+ и A^- — соответственно положительная и отрицательная части A. Предположим еще, что $\alpha > 0$ и для A выполняются условия:

(а) $A^+\tilde{x} \geq \mu/\alpha\, A^-\tilde{x}$;

(б) $T = A^+\underline{C} - A^-\bar{C}$ неотрицательный изотонный на X;

(в) $(\mu+\beta)A^+\tilde{x} \leq (I + \alpha A^-)(\tilde{x})$.

Пусть

$$\underline{F}x = A^+\underline{C}x - A^-\bar{C}x + \alpha A^+\tilde{x} - \mu A^-\tilde{x} \qquad (x \in X), \quad (2.4)$$

$$\bar{F}x = A^+\bar{C}x - A^-\underline{C}x + \mu A^+\tilde{x} - \alpha A^-\tilde{x} \qquad (x \in X) \quad (2.5)$$

Тогда $\underline{F}$ и $\bar{F}$, очевидно, являются соответственно минорантой и мажорантой F на X.

ЛЕММА 2.2. Операторы $\underline{F}$ и $\bar{F}$ оставляют множество X инвариантными.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть $\underline{C}$ и $\bar{C}$ таковы, что $\underline{C}tx \geq t\underline{C}x$ и $\bar{C}tx \geq t\bar{C}x$ для любого $0 \leq t \leq 1$ и $x \in X$. Тогда если либо оператор $T_1 x = A^+\underline{C}x - A^-\bar{C}x$ ($T_2 x = A^+\bar{C}x - A^-\underline{C}x$) ($x \in X$) неразложим, либо $\alpha A^+ x - \mu A^- \tilde{x} > 0$, то существует лишь единственный неподвижный элемент $v > 0$ ($w > 0$) в X.

ЛЕММА 2.3. В условиях теоремы 2.I $v \leq w$.

ТЕОРЕМА 2.2. Все предельные элементы последовательности $x_{n+1} = \underline{F}x_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) находятся в конусном отрезке $\langle v, w \rangle$, каково бы ни было начальное значение $x_0 \in X$, где v (w) – единственное решение уравнения $\underline{F}x = x$ ($\bar{F}x = x$), $x \in X$.

Лемма 2.2. доказывается, как и лемма I.I, доказательство леммы 2.3 совпадает с доказательством леммы I.2. Теоремы 2.I и 2.2 доказываются аналогичным образом, что и теоремы I.I и I.2, соответственно.

ПРИМЕР. Пусть C определен, как и в (I.8); $\alpha \neq 0$, $\mu = 0$. Тогда $Bx \equiv 0$ ($x \in X$). Берем A такой, что выполняются условия (б) и (в) из 2^0. Условие (а), очевидно, выполняется для любого A ($\mu = 0$). $\underline{F}$ и $\bar{F}$ имеют вид:

$$\underline{F}x = A^+\underline{C}x - A^-\bar{C}x + \alpha A^+\tilde{x},$$
$$\bar{F}x = A^+\bar{C}x - A^-\underline{C}x - \alpha A^-\tilde{x}$$

или в развернутом виде,

$$(\underline{F}x)_i = \Big(\sum_{j \in M_i'} a_{ij}\frac{1}{b_j} + \sum_{j \in M_i''} a_{ij}\frac{1}{\bar{b}_j}\Big)\min_{1 \leq k \leq n} x_k + \sum_{j \in M_i'} a_{ij}\tilde{x}_j \quad (i = 1, 2, \ldots n),$$

где $M_i' = \{j \in M = \{1, 2, \ldots m\} : a_{ij} > 0\}$, $M_i'' = \{j \in M : a_{ij} < 0\}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$),

$$b_j = \max_{1 \leq k \leq n}(b_{kj}) \quad j \in M_i', \qquad \bar{b}_j = \min_{1 \leq k \leq n}(b_{kj}) \quad j \in M_i''.$$

$$(\bar{F}x)_i = \Big(\sum_{j\in M_i'} a_{ij}\frac{1}{c_j} + \sum_{j\in M_i''} a_{ij}\frac{1}{\tilde{c}_j}\Big)\min_{1\le k\le n} x_k + \sum_{j\in M_i''} a_{ij}\tilde{x}_j \quad (i=1,2,\dots,n),$$

$$c_j = \min_{1\le k\le n}(b_{kj}) \; j\in M_i', \qquad \tilde{c}_j = \max_{1\le k\le n} b_{kj} \; j\in M_i'' \quad (i=1,2,\dots,n).$$

Если $\tilde{x} > 0$, то можно найти A и $\bar{C}$ такие, что $A\tilde{x}>0$ и

$$\sum_{j\in M_i'} a_{ij}\frac{1}{b_j} - \sum_{j\in M_i''} a_{ij}\frac{1}{c_j} \geqslant 0 \qquad (i=1,2,\dots,n).$$

Эти условия достаточны, чтобы выполнялось условие (б); $\mu=0$ и $\tilde{x}>0$, значит, можно найти $\beta>0$ такое, что выполняется условие (в).

3^0. Рассмотрим теперь случай, когда B - изотонный оператор, удовлетворяющий условиям:

(а) существует $\tilde{x}\in R_+^n$ и $\mu>0$ такие, что $B\tilde{x}=\mu\tilde{x}$;

(б) $B\Theta=\Theta$.

Тогда для $Fx=A(B+C)(x)$, очевидно, выполняется соотношение

$$\underline{F}x = ABx + \alpha A\tilde{x} \leqslant Fx \leqslant ABx + \beta A\tilde{x} = \bar{F}x \quad (x\in X). \quad (3.1)$$

Для $\underline{F}$ и $\bar{F}$, определенных в (3.1), имеет место аналог леммы 1.1. Аналогом теоремы 1.1 является следующая

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть B таков, что $B\lambda x \geqslant \lambda Bx$ для $\lambda \le 1$ и для любого $x\in X$. Тогда если либо AB неразложимый, либо $A\tilde{x}>0$, то существует единственный элемент $v>0$ ($w>0$) такой, что $v=\underline{F}v$ ($w=\bar{F}w$).

Имеет место аналог леммы 1.2 и теоремы 1.2.

Рассмотрим $A=A^+-A^-$, где A^+ и A^- определены выше, и пусть для A и B выполняются условия:

(а) $\alpha A^+\tilde{x} - (\beta+\mu)A^-\tilde{x} \geqslant 0$;

(б) AB - изотонный в X;

(в) $(\beta+\mu)A^+\tilde{x} \leqslant (I+\alpha A^-)(\tilde{x})$.

Полученные ранее результаты переносятся и для случая, когда $A^- \neq \varnothing$.

ПРИМЕР. В качестве C можно рассмотреть любой вогнутый оператор, т.е. оператор вида $\theta\tilde{x} \leqslant Tx \leqslant \theta'\tilde{x}$ $(x\in X)$; $\theta,\theta'>0$ и для любого $t_0\in(0,1)$ $T(t_0 x) \geqslant t_0 Tx$ $(x\in X)$, а в качестве B любой изотонный неотрицательный оператор.

4^0. Пусть операторы A, B, C, L_1 и L_2 действуют из X в X $(X \subset R_+^n)$, причем L_1 и L_2 неотрицательные изотонные непрерывные на X и $L_1 x \leqslant \mu \tilde{x}$, $L_2 x \leqslant \beta \tilde{x}$ для любого $x \in X$, причем $\beta > 0$ такое, что для любого $0 \leqslant \beta' < \beta$ выполняется $L_2 x_0 \overline{\leqslant} \beta' \tilde{x}$ хотя бы для одного $x_0 \in X \cdot C$ и B такие, что

$$L_1 x \leqslant Bx \leqslant \mu \tilde{x} \text{ для всех } x \in X,$$

$$\alpha \tilde{x} \leqslant Cx \leqslant L_2 x \text{ для всех } x \in X.$$

C и B непрерывны. Тогда для $Fx = A(B+C)(x)$ выполняется соотношение

$$\underline{F} x = AL_1 x + \alpha A \tilde{x} \leqslant Fx \leqslant AL_2 x + \mu A \tilde{x} = \bar{F} x \quad (x \in X).$$

Все результаты I^0 переносятся и для случая 4^0; в теореме 4.1 предполагается, что выполнено условие

$$L_1 t x \geqslant t L_1 x \quad \text{и } L_2 t_0 x \geqslant t_0 L_2 x \quad , \ t, t_0 \in (0,1) \ x \in X.$$

Заключение теоремы таково: если либо AL_1 (AL_2) неразложим, либо $A\tilde{x} > 0$, то существует лишь один неподвижный элемент $v > 0$ для $\underline{F}$ ($w > 0$ для $\bar{F}$).

ЗАМЕЧАНИЕ. Все результаты (I^0–4^0), кроме теоремы I.2 (2.2, 3.2), получаются и в случае, когда вместо R^n рассматривается C_Q с конусом положительных функций K (C_Q – множество всех непрерывных функций, заданных на компакте Q), при этом вместо непрерывных операторов следует рассматривать вполне непрерывные операторы. В доказательстве теорем и леммы, где использована лемма 2 из [I], нужно пользоваться теоремой 3.2 из [7].

Пусть $\hat{X} = \bigcup_{i=1}^{3} X_i$, где

$$X_1 = \{x \in X : \underline{F} x \leqslant x \leqslant \bar{F} x\},$$
$$X_2 = \{x \in X : x \leqslant \underline{F} x \},$$
$$X_3 = \{x \in X : \bar{F} x \leqslant x \}.$$

Тогда имеет место

ТЕОРЕМА 4.2. Все предельные элементы последовательности $x_n = Fx_{n-1}$ $(n = 1, 2, \dots)$ находятся в конусном отрезке $\langle v, w \rangle$

каковы бы ни было начальное значение $x_0 \in \hat{X}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорему 4.2 докажем для $i=1$, случай $i=2,3$ рассматривается аналогично. Пусть $x_0 \in X_1$, т. е. $\underline{F} x_0 \leq x_0 \leq \bar{F} x_0$; нужно показать, что

$$\underline{F}\, \underline{x}_n \leq F x_{n-1} \leq \bar{F} \bar{x}_n \qquad (4.1)$$

для любого $n=1,2,\dots$.

Докажем теорему по индукции. Для $n=1$ неравенство (4.1) выполнено согласно условию теоремы. Пусть оно выполнено при $n=r$, т.е. имеет место

$$\underline{F}\, \underline{x}_{r-1} = \underline{x}_r \leq x_{r-1} = F x_{r-2} \leq \bar{x}_r = \bar{F} \bar{x}_{r-1}. \qquad (4.2)$$

Откуда $\underline{F}\, \underline{x}_r \leq F \underline{x}_{r-1} \leq F x_{r-1} \leq \bar{F} x_{r-1} \leq \bar{F} \bar{x}_r$, или же $\underline{x}_{r+1} = \underline{F}\, \underline{x}_r \leq x_r = F x_{r-1} \leq \bar{F} \bar{x}_r = \bar{x}_{r+1}$. Таким образом, неравенство (4.1) выполняется для любого $n=1,2,\dots$. В силу теоремы (3.3) из [7] последовательность $\{F x_n\}$ сходится к v, а $\{\bar{F} \bar{x}_n\}$ к w.

В условиях теоремы (1.1) ((2.1)-(4.1)) для F из X в X существует единственный неподвижный элемент $\bar{x}$, если же еще вдобавок F — изотонный оператор, то последовательные приближения $x_n = F x_{n-1}$ $(x_0 \in \hat{X})$ сходятся к этому элементу.

В заключение автор выражает признательность А.М.Рубинову за ценные советы и внимание к работе.

Литература

1. Л.В.Канторович, Sur la continuite et sur le procongement des operations linearеs C.R. Akad. Sot. (206(1938),833-835.
2. М.А.Красносельский, Приближенные решения операторных уравнений. И Ф М Л М., 1962.
3. Michio Morishima, Equilibrium Stability and growth, 1964.
4. Ф.Р.Гантмахер, Теория матриц "Наука", М., 1967, 354.
5. М.Д.Зияудинов, Об одной задаче из Λ -системы.-Оптимальное планирование, 16 (1970), 21-32.
6. М.А.Бахтин, М.А.Красносельский, Метод последовательных приближений в теории уравнений с вогнутыми операторами. Сиб. мат.ж., 2:3 (1961).
7. М.А.Красносельский и др., Приближенное решение операторных уравнений, "Наука", М., 1969.

Поступила в редакцию
20.IV. 1971 г.