УДК 512.25:512.87:519.12

ОБ ОБЩЕМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ БЛОЧНОЙ СТРУКТУРЫ

Р.А. Звягина

В работе [4] был предложен новый подход к решению задач линейного программирования (л.п.) большого объема, в которых все ненулевые элементы матрицы системы ограничений заключены в специальным образом выделенных подматрицах (блоках). Этот подход состоит в некотором упорядочении множества D номеров блоков указанной матрицы. В связи с этим для рассматриваемого класса задач оказалось возможным перестроить вычислительную схему метода последовательного улучшения [1], предназначенного для решения произвольных задач л.п., таким образом, что на каждом этапе преобразований в этом методе вместо некоторой квадратной матрицы размерности $m \times m$ фигурируют ее квадратные подматрицы, отвечающие блокам с номерами из некоторой цепи ж) упорядоченного множества D.

В публикуемой статье мы ограничимся в основном рассмотрением вычислительных эффектов такого подхода к решению задач л.п. указанного класса и, оставляя в стороне вопрос о выборе порядка в множестве D, приведем лишь основные определения и свойства, которыми должен обладать этот порядок. Заметим, что предлагаемая спецификация метода [1] является прямым обобщением той, которая была предложена в [2, 3] для частного типа задач рассматриваемого здесь класса.

ж) Терминология, касающаяся упорядоченных множеств, согласуется с принятой в [5].

§ I. Общая характеристика класса задач

Рассмотрим задачу линейного программирования, состоящую в минимизации линейной функции (c , x) на множестве неотрицательных решений системы линейных уравнений

$$Ax = b. \qquad (I)$$

Пусть $M=\{1,2,\ldots,m\}$ – множество номеров строк, а $N=\{1,2,\ldots,n\}$ – множество номеров столбцов матрицы $A \equiv A[M,N]$ и $m \leq n$. Предположим, что в матрице $A[M,N]$ выделены некоторые подматрицы (блоки), определяемые множествами M_k и N_k номеров строк и столбцов соответственно, которые, следуя И.В.Романовскому, обозначим через $A[M_k, N_k]$, $k \in P = \{1,2,\ldots,p\}$. При этом множества M_k $(k \in P)$ образуют разбиение множества M, а N_k при любом $k \in P$ – некоторое подмножество множества N.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ I. Совокупность пар M_k, N_k $(k \in P)$ будем называть блочной структурой матрицы $A[M,N]$, если все её ненулевые элементы содержатся в блоках $A[M_k, N_k]$, $k \in P$.

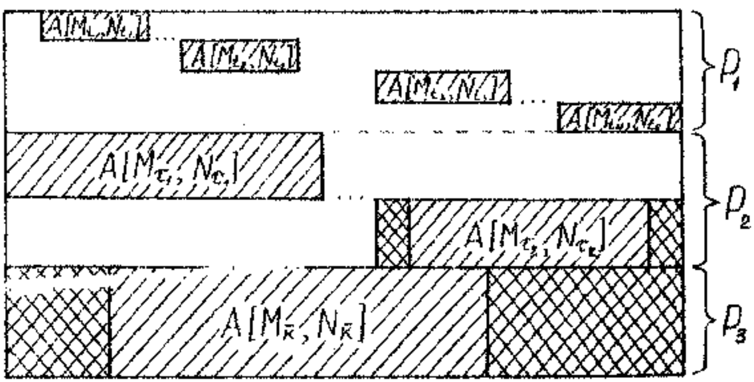

Рис. I.

При фиксированной блочной структуре матрицы $A[M,N]$ введем в множестве P некоторое отношение порядка $\preccurlyeq$ и для любого $k \in P$ положим $\bar{N}_k = \bigcup_{\tau \preccurlyeq k} N_\tau$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Порядок $\preccurlyeq$ в множестве P называется согласованным с блочной структурой матрицы $A[M,N]$ (или допустимым), если $\bar{N}_k \cap \bar{N}_\tau = \emptyset$ для любых несравнимых элементов k и τ из упорядоченного множества P.

Ясно, что всякий линейный порядок в множестве P, например, такой, что $k \prec k+1$, $k = 1,2,\dots,p-1$, согласован с блочной структурой матрицы $A[M,N]$ при любых множествах N_k, $k \in P$. Однако если хотя бы для одной пары элементов k и τ из P множества N_k и N_τ не пересекаются, то, введя в множестве $P \setminus \{k,\tau\}$ линейный порядок и положив $k \prec t$ и $\tau \prec t$ для всех $t \in P \setminus \{k,\tau\}$, получим допустимый порядок в множестве P (т.е. допустимый порядок определяется, вообще говоря, неоднозначно).

Не нарушая общности, можно считать, что в блочной структуре M_k, N_k $(k \in P)$ матрицы $A[M,N]$, задающей условия на сравнимость, $N_k \neq \varnothing$ для любого $k \in P$. Тогда, на основании определения 2, упорядоченное подмножество

$$L(k) = \{\tau \in P : k \preccurlyeq \tau\}, \quad k \in P,$$

упорядоченного множества P является цепью, т.е. линейно упорядоченным множеством, так как в противном случае для любых двух несравнимых элементов τ и τ' из $L(k)$ множество $\bar{N}_\tau \cap \bar{N}_{\tau'}$ содержит N_k. Положим $\ell = \max\limits_{k \in P} |L(k)|$, где под $|L(k)|$ понимается число элементов в конечном множестве $L(k)$, и разобьём множество P на классы, полагая

$$P_s = \{k \in P : |L(k)| = \ell - s + 1\}, \quad s = 1,2,\dots,\ell.$$

Если в множестве P при некотором допустимом упорядочении нет наибольшего элемента (в этом случае P_ℓ – множество его максимальных элементов), то это означает, что система (I) распадается на $|P_\ell| > 1$ независимых подсистем с матрицами $A\left[\bigcup_{\tau \preccurlyeq k} M_\tau, \bar{N}_k\right]$, $k \in P_\ell$.

Из определения множеств $\bar{N}_k$ $(k \in P)$ можно заключить, что совокупность пар $M_k, \bar{N}_k$ $(k \in P)$ также образует блочную структуру (в некотором смысле предельную) матрицы $A[M,N]$, с которой порядок $\preccurlyeq$ согласован, если он согласован с исходной блочной структурой M_k, N_k $(k \in P)$. На рис. I изображена типичная конфигурация матрицы с предельной блочной структурой при $\ell = 3$, а согласованный с ней порядок в множестве P с наибольшим элементом R задается схемой на рис.2 (направление стрелки из k в τ означает, что $\tau \prec k$).

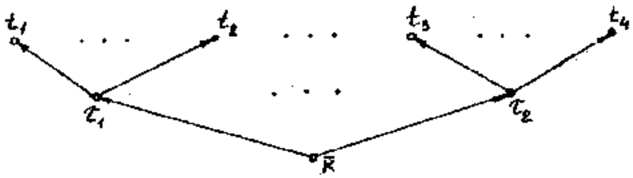

Рис. 2.

Если же в множестве P нет наибольшего элемента ($\bar{k} \in P_\ell$ – его максимальный элемент), то рис. 2 задает индуцированный порядок в подмножестве $P(\bar{k}) = \{k \in P : k \preccurlyeq \bar{k}\}$ упорядоченного множества P, согласованный с блочной структурой M_k, N_k, $k \in P(\bar{k})$, подматрицы $A[\bigcup_{k \preccurlyeq \bar{k}} M_k, \bar{N}_{\bar{k}}]$ матрицы $A[M,N]$.

§ 2. Приведение неособенной квадратной матрицы к матрице типа треугольной

Предположим, что для матрицы $A[M,N]$ с заданной блочной структурой M_k, N_k $(k \in P)$ фиксирован некоторый согласованный с ней порядок $\preccurlyeq$ в множестве P. Предположим также, что в матрице $A[M,N]$ выделена неособенная квадратная подматрица $A[M,J]$ с индуцированной блочной структурой M_k, $N_k \cap J (k \in P)$, с которой, очевидно, согласован порядок $\preccurlyeq$. В этом параграфе мы покажем, как матрицу $A[M,J]$ с помощью некоторого линейного преобразования $T[J,J]$ привести к матрице типа треугольной таким образом, что во всяком случае совокупность пар M_k, $\bar{N}_k \cap J (k \in P)$, образующих предельную блочную структуру матрицы $A[M,J]$, образует блочную структуру преобразованной матрицы (здесь, как и ранее, $\bar{N}_k = \bigcup_{\tau \preccurlyeq k} N_\tau$).

Определим преобразование $T[J,J]$ следующим образом. Обозначим через $\Lambda[J,J]$ некоторую матрицу с блочной структурой $J_k, \bar{N}_{k0}$ $(k \in P)$, где $J_k (k \in P)$ – такое разбиение множества J, что $|J_k| = |M_k|$ и $J_k \subset \bar{N}_k \cap J$, а

$$\bar{N}_{k0} = (\bar{N}_k \cap J) \setminus (\bigcup_{\tau \prec k} J_\tau), \; k \in P, \tag{2}$$

и пусть $\Lambda_k[J,J]$ – матрица, получающаяся при каждом $k \in P$ из единичной матрицы $E[J,J]$, если в последней блок $E[J_k, \bar{N}_{k0}]$ (очевидно, нулевой) заменить блоком $-\Lambda[J_k, \bar{N}_{k0}]$. Положим

$$T[\mathcal{J},\mathcal{J}] = \prod_{\kappa \in P} \Lambda_\kappa[\mathcal{J},\mathcal{J}],$$

считая, что сомножитель $\Lambda_\tau[\mathcal{J},\mathcal{J}]$ предшествует $\Lambda_\kappa[\mathcal{J},\mathcal{J}]$, если $\tau \prec \kappa$ (это же предположение относительно порядка сомножителей будет делаться всегда и в дальнейшем, если индекс, по которому берется произведение, пробегает упорядоченное множество). Заметим, что матрицу $\Lambda_\kappa[\mathcal{J},\mathcal{J}]$, учитывая блочную структуру матрицы $\Lambda[\mathcal{J},\mathcal{J}]$, можно получить по формуле

$$\Lambda_\kappa[\mathcal{J},\mathcal{J}] = E[\mathcal{J},\mathcal{J}] - E[\mathcal{J},\mathcal{J}_\kappa]\Lambda[\mathcal{J}_\kappa,\mathcal{J}], \ \kappa \in P. \qquad (3)$$

Эта матрица, как будет видно из дальнейшего, при соответствующем выборе блока $\Lambda[\mathcal{J}_\kappa,\bar{N}_{\kappa o}]$ подматрицы $\Lambda[\mathcal{J}_\kappa,\mathcal{J}]$ задает преобразование типа исключения неизвестных в κ-м блоке (при $\bar{N}_{\kappa o} = \phi$ матрица $\Lambda_\kappa[\mathcal{J},\mathcal{J}]$ совпадает с единичной).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Разбиение $\mathcal{J}_\kappa\ (\kappa \in P)$ множества $\mathcal{J}$ будем называть *базисным* по отношению к квадратной неособенной матрице $A[M,\mathcal{J}]$, если существует такая матрица $\Lambda[\mathcal{J},\mathcal{J}]$ указанной ранее блочной структуры, что матрица

$$B[M,\mathcal{J}] = A[M,\mathcal{J}]\,T[\mathcal{J},\mathcal{J}]$$

имеет блочную структуру $M_\kappa,\ (\bigcup_{\tau \preccurlyeq \kappa} \mathcal{J}_\tau),\ \kappa \in P$, и ее квадратные подматрицы $B[M_\kappa,\mathcal{J}_\kappa],\ \kappa \in P$, являются неособенными.

ТЕОРЕМА 1. *Для всякого множества $\mathcal{J} \subset N$, при котором матрица $A[M,\mathcal{J}]$ квадратная и неособенная, существует базисное разбиение $\mathcal{J}_\kappa(\kappa \in P)$, причем матрицы $\Lambda[\mathcal{J},\mathcal{J}]$ и $B[M,\mathcal{J}]$ при каждом таком разбиении определяются однозначно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть P_o – такое упорядоченное подмножество упорядоченного множества P, что для любого $\kappa \in P_o$ множество

$$P(\kappa) = \{\tau \in P : \tau \preccurlyeq \kappa\}$$

содержится в P_o. Предположим, что для всех $\kappa \in P_o$ определены множества $\mathcal{J}_\kappa \subset \bar{N}_\kappa \cap \mathcal{J}$ и блоки $\Lambda[\mathcal{J}_\kappa,\bar{N}_{\kappa o}]$ матрицы $\Lambda[\mathcal{J},\mathcal{J}]$ такие, что неособенная матрица

$$B_{P_o}[M,\mathcal{J}] = A[M,\mathcal{J}] \prod_{\kappa \in P_o} \Lambda_\kappa[\mathcal{J},\mathcal{J}] \qquad (4)$$

имеет блочную структуру

$$M_\kappa, (\bigcup_{\tau \leq \kappa} \mathcal{J}_\tau), \kappa \in P_o; \; M_\kappa, (\bar{N}_\kappa \cap \mathcal{J}), \kappa \in P \setminus P_o, \qquad (5)$$

причем подматрицы $B_{P_o}[M_\kappa \mathcal{J}_\kappa]$, $\kappa \in P_o$, и, следовательно, подматрица

$$B_{P_o}\left[\bigcup_{\kappa \in P \setminus P_o} M_\kappa, \mathcal{J} \setminus \bigcup_{\kappa \in P_o} \mathcal{J}_\kappa\right] \qquad (6)$$

матрицы $B_{P_o}[M, \mathcal{J}]$ являются неособенными. Схематично матрицу (4) можно изобразить следующим образом:

$$\left(\begin{array}{c|c} B_{P_o}\left[\bigcup_{\kappa \in P_o} M_\kappa, \bigcup_{\kappa \in P_o} \mathcal{J}_\kappa\right] & \mathbb{O} \\ \hline B_{P_o}\left[\bigcup_{\kappa \in P \setminus P_o} M_\kappa, \bigcup_{\kappa \in P_o} \mathcal{J}_\kappa\right] & B_{P_o}\left[\bigcup_{\kappa \in P \setminus P_o} M_\kappa, \mathcal{J} \setminus \bigcup_{\kappa \in P_o} \mathcal{J}_\kappa\right] \end{array}\right).$$

Если $P_o \neq P$, то обозначим через κ' один из минимальных элементов множества $P \setminus P_o$. Поскольку матрица (6) неособенная, то в множестве $\bar{N}_{\kappa'} \cap (\mathcal{J} \setminus \bigcup_{\kappa \in P_o} \mathcal{J}_\kappa)$ найдется подмножество $\mathcal{J}_{\kappa'}$ такое, что квадратная подматрица $B_{P_o}[M_{\kappa'}, \mathcal{J}_{\kappa'}]$ матрицы $B_{P_o}[M, \mathcal{J}]$ будет неособенной. Исходя из выбора элемента κ' и множеств $\mathcal{J}_\kappa$, $\kappa \in P_o \cup \{\kappa'\}$, нетрудно проверить, что

$$\bar{N}_{\kappa'} \cap \left(\bigcup_{\kappa \in P_o \cup \{\kappa'\}} \mathcal{J}_\kappa\right) = \bigcup_{\tau \leq \kappa'} \mathcal{J}_\tau. \qquad (7)$$

Это значит, что множество $\bar{N}_{\kappa'} \cap \mathcal{J}$ распадается на подмножества $(\bigcup_{\tau \leq \kappa'} \mathcal{J}_\tau)$ и $\bar{N}_{\kappa' o}$ и при этом

$$\bar{N}_{\kappa' o} \subset \bar{N}_\kappa \cap \left(\mathcal{J} \setminus \bigcup_{\tau \in P_o \cup \{\kappa'\}} \mathcal{J}_\tau\right), \kappa \in L(\kappa') \qquad (8)$$

(последнее следует из определения множеств $\bar{N}_\kappa$, $\kappa \in P$).
Выбрав в качестве блока $\Lambda[\mathcal{J}_{\kappa'}, \bar{N}_{\kappa' o}]$ матрицы $\Lambda[\mathcal{J}, \mathcal{J}]$ единственное решение матричного уравнения

$$B_{P_o}[M_{\kappa'}, \mathcal{J}_{\kappa'}]\Lambda[\mathcal{J}_{\kappa'}, \bar{N}_{\kappa' o}] = B_{P_o}[M_{\kappa'}, \bar{N}_{\kappa' o}] \qquad (9)$$

и домножив (4) справа на матрицу $\Lambda_{\kappa'}[\mathcal{J}, \mathcal{J}]$, определенную по формуле (3), получим матрицу

$$B_{P_o \cup \{\kappa'\}}[M, \mathcal{J}] = B_{P_o}[M, \mathcal{J}] - B_{P_o}[M, \mathcal{J}_{\kappa'}]\Lambda[\mathcal{J}_{\kappa'}, \mathcal{J}]. \quad (10)$$

Из блочной структуры (5) матрицы $B_{P_0}[M,J]$ следует, что в матрице $B_{P_0}[M,J_{k'}]\Lambda[J_{k'},J]$ отличны от нуля разве лишь блоки

$$B_{P_0}[M_k,J_{k'}]\Lambda[J_{k'},\bar N_{k'0}],\ k\in L(k').$$

Учитывая (8), можно заключить, что матрица (10) во всяком случае имеет блочную структуру (5). Однако, в силу условия (9), блок $B_{P_0\cup\{k'\}}[M_{k'},\bar N_{k'0}]$ матрицы (10) равен нулю. Отсюда и из (7) следует, что матрица (10) имеет блочную структуру (5), если в последней множество P_0 заменить на $P_0\cup\{k'\}$, а её квадратные подматрицы $B_{P_0\cup\{k'\}}[M_k,J_k]$, $k\in P_0\cup\{k'\}$, совпадают с соответствующими (неособенными) подматрицами $B_{P_0}[M_k,J_k]$ $k\in P_0\cup\{k'\}$, матрицы $B_{P_0}[M,J]$.

Таким образом, множество $P_0\cup\{k'\}$ можно взять в качестве исходного вместо P_0. Поскольку при $P_0=\emptyset$ все перечисленные выше предположения справедливы для матрицы $B_\emptyset[M,J]=A[M,J]$ то, начиная с этого P_0, через p шагов придем к $P_0=P$, определив множества $J_k\ (k\in P)$, образующие разбиение множества J, и матрицы $\Lambda[J,J]$ и $B_P[M,J]$, удовлетворяющие условиям определения 3. При этом блоки $\Lambda[J_k,\bar N_{k0}]$, $k\in P$, матрицы $\Lambda[J,J]$, а тем самым и матрица $B[M,J]$, совпадающая с $B_P[M,J]$, при фиксированном разбиении $J_k\ (k\in P)$ определяются однозначно в силу единственности решения уравнения (9).

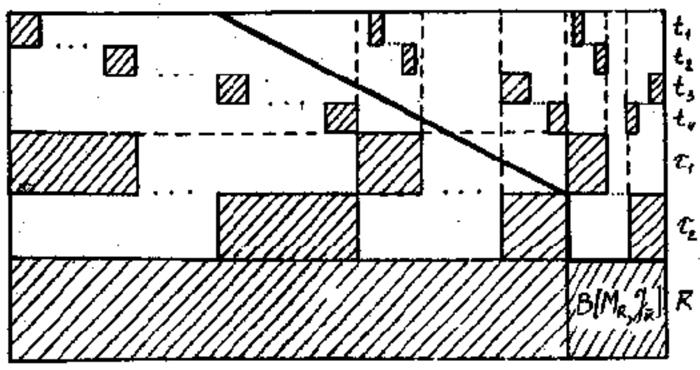

Рис. 3.

Поясним полученные результаты на чертеже. Пусть на рис.1,3 изображена одна и та же с точностью до порядка столбцов продельная блочная структура M_K, $\bar{N}_K \cap \mathcal{J} (K \in P)$ матрицы $A[M,\mathcal{J}]$ при $\ell = 3$. Тогда заштрихованная часть на рис.3 слева и снизу от жирной черты дает представление о блочной структуре матрицы $B[M,\mathcal{J}]$, а справа и сверху – о блочной структуре матрицы $\Lambda[\mathcal{J},\mathcal{J}]$, поскольку $|\mathcal{J}_K| = |M_K|$, $K \in P$. Легко видеть, что для хранения блоков $B[M_K, \mathcal{J}_K]$, $K \in P$, и матрицы $\Lambda[\mathcal{J},\mathcal{J}]$ требуется, вообще говоря, меньше памяти ЭВМ, чем для хранения матрицы $B[M,\mathcal{J}]$, так как если сопоставить блоки $B[M_K, \bigcup_{\tau \prec K} \mathcal{J}_\tau]$ и $\Lambda[\bigcup_{\tau \prec K} \mathcal{J}_\tau, \mathcal{J}_K]$, то в первом число ненулевых элементов в общем случае равно $|M_K| \times (\sum_{\tau \prec K} |\mathcal{J}_\tau|)$, а во втором – не превосходит $\sum_{\tau \prec K} (|\mathcal{J}_\tau| \times |\mathcal{J}_K \cap \bar{N}_{\tau 0}|)$, причем $|\mathcal{J}_K \cap \bar{N}_{\tau 0}|$, вообще говоря, меньше $|M_K|$ для некоторых $\tau \prec K$ при фиксированном $K \in P$.

В следующих параграфах мы покажем, что в методе последовательного улучшения [I] на каждом шаге достаточно иметь вычисленными лишь квадратные матрицы $B[M_K, \mathcal{J}_K]$, $K \in P$, и матрицу $\Lambda[\mathcal{J},\mathcal{J}]$, причем нетрудно подсчитать, что общее число ненулевых элементов в блоках $\Lambda[\mathcal{J}_K, \bar{N}_{K0}]$ для всех K из одного и того же класса P_s $(1 \leq s \leq \ell - 1)$ не превосходит

$$\left(\max_{K \in P_s} |\mathcal{J}_K|\right) \times \left(m - \sum_{\sigma=1}^{s} \sum_{K \in P_\sigma} |\mathcal{J}_K|\right),$$

так как множества $\bar{N}_{K0}$, $K \in P_s$, попарно не пересекаются.

§ 3. Решение систем линейных уравнений с матрицей типа треугольной

Основные трудоемкие вычисления при решении задач л.п. большого объема методом последовательного улучшения [I], равно как и любым другим конечным методом, состоят в следующем:

I) решение системы уравнений

$$y[M]\,A[M,\mathcal{J}] = c[\mathcal{J}], \qquad (II)$$

где $y[M]$ – вектор-строка;

2) проверка условия $y[M]A[M,N] \leq c[N]$, т.е. вычисление величин

$$y[M]A[M,j] = \sum_{K \in P} y[M_K]A[M_K,j], \; j \in N, \qquad (I2)$$

где $A[M,j]$ – j-й столбец матрицы $A[M,N]$, и сравнение их с соответствующими компонентами вектора $c=c[N]$;

3) решение системы уравнений

$$A[M,J]\,g[J,j']=A[M,j'] \qquad (13)$$

при некотором $j'\in N\setminus J$, если условие п.2 для столбца $A[M,j']$ не выполнено (здесь $g[J,j']$ – вектор-столбец). Цель этого параграфа состоит в том, чтобы показать, как решение систем (11) и (13) порядка m на каждом шаге свести, используя матрицы $B[M,J]$ и $\Lambda[J,J]$, к решению подсистем порядка $|M_\kappa|$, отвечающих некоторой цепи упорядоченного множества P.

Итак, пусть на некотором шаге метода [1] имеем матрицы $B[M_\kappa,J_\kappa]$, $\kappa\in P$, и матрицу $\Lambda[J,J]$. Прежде всего заметим, что в соотношении (12) суммирование по множеству P можно заменить для каждого $j\in N$ суммированием по множеству $L(\kappa_j)$, где $\kappa_j=\min\{\kappa\in P: j\in N_\kappa\}$, так как в столбце $A[M,j]$ разве лишь его части $A[M_\kappa,j]$, $\kappa\in L(\kappa_j)$, отличны от нуля (это следует из блочной структуры матрицы $A[M,N]$ и определения допустимого порядка $\preccurlyeq$ в множестве P). Для каждого $\kappa\in P$ положим

$$\hat N_\kappa=\bar N_\kappa\setminus\Big(\bigcup_{\tau\prec\kappa}N_\tau\Big)=\{j\in N_\kappa:\kappa_j=\kappa\}.$$

Нетрудно показать, что множества $\hat N_\kappa\,(\kappa\in Q)$, где $Q=\{\kappa\in P:\hat N_\kappa\neq\phi\}$, образуют разбиение множества N, и поэтому для величин (12) можно пользоваться представлением

$$y[M]A[M,j]=\sum_{\tau\in L(\kappa)}y[M_\tau]A[M_\tau,j],\ j\in\hat N_\kappa,\ \kappa\in Q.$$

Чтобы вычислить эти величины для некоторого $\kappa\in Q$, достаточно определить разве лишь векторы $y[M_\tau]$, $\tau\in L(\kappa)$.

Предположим, что для некоторого $\kappa\in P$ определены векторы $y[M_\tau]$, $\kappa\prec\tau$, и вычислен вектор

$$c_\kappa[N]=\begin{cases}c[N], \text{ если } \kappa=\max L(\kappa),\\ c[N]-\sum\limits_{\kappa\prec\tau}y[M_\tau]A[M_\tau,N], \text{ если } \kappa\prec\max L(\kappa)\end{cases} \qquad (14)$$

При $\kappa\prec\max L(\kappa)$ положим $\kappa'=\min(L(\kappa)\setminus\{\kappa\})$, и пусть для некоторого $j'\in\hat N_{\kappa'}$ величина $c_\kappa[j']<0$. В этом случае процесс вычисления вектора $y[M]$ заканчивается, так как для столбца $A[M,j']$ не выполнено условие п.2, и поэтому следует перейти к решению системы (13). В противном случае переходим к вычислению вектора $y[M_\kappa]$. Так как система (11) эквивалентна системе

$$y[M]B[M,\mathcal{J}] = c[\mathcal{J}]T[\mathcal{J},\mathcal{J}],$$

то, полагая

$$\hat{c}_\kappa[\mathcal{J}] = c[\mathcal{J}]T[\mathcal{J},\mathcal{J}] - \sum_{\kappa<\tau} y[M_\tau]B[M_\tau,\mathcal{J}] \qquad (15)$$

и учитывая блочную структуру матрицы $B[M,\mathcal{J}]$, можно найти вектор $y[M_\kappa]$ из системы

$$y[M_\kappa]B[M_\kappa,\mathcal{J}_\kappa] = \hat{c}_\kappa[\mathcal{J}_\kappa].$$

При этом вектор $\hat{c}_\kappa[\mathcal{J}_\kappa]$ вычисляется по формуле

$$\hat{c}_\kappa[\mathcal{J}_\kappa] = c_\kappa[\mathcal{J}]\circ T[\mathcal{J},\mathcal{J}_\kappa],$$

которая следует из формул (14) и (15), если в последней каждый из блоков $B[M_\tau,\mathcal{J}]$ матрицы $B[M,\mathcal{J}]$ заменить на $A[M_\tau,\mathcal{J}]\times$ $\times T[\mathcal{J},\mathcal{J}]$. Учитывая, что матрицы $\Lambda_t[\mathcal{J},\mathcal{J}]$ при $t\in P\setminus$ $\setminus\{\tau\in P : \tau<\kappa\}$ действуют на $E[\mathcal{J},\mathcal{J}_\kappa]$ слева, как единичные (это следует из (3) и блочной структуры матрицы $\Lambda[\mathcal{J},\mathcal{J}]$), получим

$$T[\mathcal{J},\mathcal{J}_\kappa] = T[\mathcal{J},\mathcal{J}]E[\mathcal{J},\mathcal{J}_\kappa] = \prod_{\tau<\kappa}\Lambda_\tau[\mathcal{J},\mathcal{J}]E[\mathcal{J},\mathcal{J}_\kappa].$$

Имея теперь вычисленными векторы $y[M_\tau]$, $\tau\in L(\kappa)$, обозначим через $\tilde{\kappa}$ один из максимальных элементов множества $P\setminus L(\kappa)$ и продолжим процесс, полагая $\kappa=\tilde{\kappa}$ в формуле (14). Заметим, что ради сокращения объема вычислений и размеров требуемой памяти ЭВМ номер $\tilde{\kappa}$ естественно выбирать так, чтобы цепь $L(\tilde{\kappa})$ содержала как можно больше элементов из цепи $L(\kappa)$, т.е. если через τ' обозначить минимальный элемент множества $L(\kappa)\cap\left(\bigcup_{\tau\in P\setminus L(\kappa)} L(\tau)\right)$, то в качестве $\tilde{\kappa}$ следует взять один из максимальных элементов множества $P(\tau')\setminus(L(\kappa)\cap P(\tau'))$. Поскольку векторы $y[M_\tau]$, $\kappa\leqslant\tau<\tau'$, в дальнейших вычислениях величин (12) не участвуют, то их можно "забыть" и вместо множества N при проверке условия п.2 рассматривать множество $N\setminus\bigcup_{\kappa\leqslant\tau<\tau'} N_\tau$.

Перейдем к решению системы (13). Прежде всего найдем решение системы

$$B[M,\mathcal{J}]\,\lambda[\mathcal{J},j'] = A[M,j']. \tag{16}$$

Считая, что для некоторого $\kappa \in L(\kappa_{j'})$ векторы $\lambda[\mathcal{J}_\tau, j'], \tau \in P \setminus L(\kappa)$, определены (причем отличны от нуля разве лишь векторы $\lambda[\mathcal{J}_\tau, j']$, $\kappa_{j'} \preccurlyeq \tau \prec \kappa$), положим

$$A_\kappa[M,j'] = A[M,j'] - \sum_{\kappa_{j'} \preccurlyeq \tau \prec \kappa} B[M,\mathcal{J}_\tau]\lambda[\mathcal{J}_\tau, j'] \tag{17}$$

и заметим, что в столбце $A_\kappa[M,j']$ отличны от нуля разве лишь его части $A_\kappa[M_\tau, j']$, $\tau \in L(\kappa)$. Чтобы начать процесс, следует взять $\kappa = \kappa_{j'}$ и положить $\lambda[\mathcal{J}_\tau, j'] = 0$ при $\tau \in P \setminus L(\kappa_{j'})$. Из блочной структуры матрицы $B[M,\mathcal{J}]$ следует, что вектор $\lambda[\mathcal{J}_\kappa, j']$ можно найти из системы

$$B[M_\kappa, \mathcal{J}_\kappa]\lambda[\mathcal{J}_\kappa, j'] = A_\kappa[M_\kappa, j'].$$

Поскольку мы считаем, что в матрице $B[M,\mathcal{J}]$ вычислены лишь блоки $B[M_\kappa, \mathcal{J}_\kappa]$, $\kappa \in P$, то, заменив в представлении столбца $A_\kappa[M,j']$ каждый из блоков $B[M,\mathcal{J}_\tau]$ на $A[M,\mathcal{J}]T[\mathcal{J},\mathcal{J}_\tau]$, получим

$$A_\kappa[M_\kappa, j'] = A[M_\kappa, j'] - A[M_\kappa, \mathcal{J}]\Big(\sum_{\kappa_{j'} \preccurlyeq \tau \prec \kappa} T[\mathcal{J},\mathcal{J}_\tau]\lambda[\mathcal{J}_\tau, j']\Big).$$

Для нахождения столбца $g[\mathcal{J},j']$ теперь можно воспользоваться формулой

$$g[\mathcal{J},j'] = \sum_{\tau \in L(\kappa_{j'})} T[\mathcal{J},\mathcal{J}_\tau]\lambda[\mathcal{J}_\tau, j'], \tag{18}$$

которая следует из единственности решения системы (I5) и структуры столбца $\lambda[\mathcal{J},j']$.

Заметим, что из единственности решения системы (I6) следует

$$\lambda[\mathcal{J},j] = \Lambda[\mathcal{J},j] + E[\mathcal{J},j], \ \ j \in \mathcal{J}.$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно подставить значение $\lambda[\mathcal{J},j]$ в систему (I6) с правой частью $A[M,j]$ и воспользоваться тем, что

$$A_\kappa[M,j] = B[M,j], \ j \in \mathcal{J}_\kappa \ (\kappa \in P). \tag{19}$$

§ 4. Переход к матрице, отличающейся одним столбцом

При реализации метода последовательного улучшения [I] в той или иной форме важно указать, к каким последствиям приводит переход от матрицы $A[M,\mathcal{J}]$ к матрице, отличающейся от предыдущей одним столбцом. В нашем случае этот переход связан с преобразованиями, имеющими цель привести новую матрицу к матрице типа треугольной. Как будет показано ниже, эти преобразования можно свести, используя матрицы $B[M,\mathcal{J}]$ и $\Lambda[\mathcal{J},\mathcal{J}]$, к преобразованию подматриц $B[M_\kappa,\mathcal{J}_\kappa]$ и $\Lambda[\mathcal{J}_\kappa,\bar{N}_{\kappa o}]$ с номерами κ из некоторой цепи упорядоченного множества P, причем сами преобразования состоят в добавлении к каждой из указанных матриц не более двух матриц ранга I.

Предположим, что для неособенной квадратной матрицы $A[M,\mathcal{J}]$ имеется базисное разбиение $\mathcal{J}_\kappa\,(\kappa\in P)$ множества $\mathcal{J}$ и вычислены матрицы $\Lambda[\mathcal{J},\mathcal{J}]$ и $B[M,\mathcal{J}]$, отвечающие этому разбиению. Пусть при некотором $j'\in N\setminus\mathcal{J}$ в множестве $\mathcal{J}$ выделен такой элемент $j_1\in\mathcal{J}_{\tau_1}$, что матрица $A[M,\mathcal{J}']$, где $\mathcal{J}'=(\mathcal{J}\setminus\{j_1\})\cup\{j'\}$, является неособенной. В методе [I] это достигается тем, что на выбор элемента j_1 накладывается, в частности, условие $g[j_1,j']\neq 0$.

ЛЕММА I. *Если в матрице $\Lambda[\mathcal{J},\mathcal{J}]$, отвечающей базисному по отношению к матрице $A[M,\mathcal{J}]$ разбиению $\mathcal{J}_\kappa\,(\kappa\in P)$ множества $\mathcal{J}$, строка $\Lambda[j_1,\mathcal{J}]=\mathbf{0}\,(j_1\in\mathcal{J}_{\tau_1})$ и $g[j_1,j']\neq 0$, то разбиение*

$$\mathcal{J}_\kappa,\ \kappa\in P\setminus\{\tau_1\},\ (\mathcal{J}_{\tau_1}\setminus\{j_1\})\cup\{j'\}$$

множества $\mathcal{J}'$ является базисным по отношению к матрице $A[M,\mathcal{J}']$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего покажем, что разбиение $\mathcal{J}_\kappa\,(\kappa\in P)$ множества $\mathcal{J}$ является базисным по отношению к матрице

$$A'[M,\mathcal{J}]=A[M,\mathcal{J}]+\{A[M,j']-A[M,j_1]\}E[j_1,\mathcal{J}]. \qquad (20)$$

Построим преобразование $T'[\mathcal{J},\mathcal{J}]$, равное произведению матриц

$$\Lambda'_\kappa[\mathcal{J},\mathcal{J}]=E[\mathcal{J},\mathcal{J}]-E[\mathcal{J},\mathcal{J}_\kappa]\Lambda'[\mathcal{J}_\kappa,\mathcal{J}],\ \kappa\in P,$$

а тем самым и матрицу $\Lambda'[\mathcal{J},\mathcal{J}]$, полагая

$$\Lambda'[\mathcal{J}_k,\mathcal{J}]=\Lambda[\mathcal{J}_k,\mathcal{J}]+\{\lambda[\mathcal{J}_k,j']-\Lambda[\mathcal{J}_k,j_1]\}E[j_1,\mathcal{J}],\ k<\tau_1,$$

и оставляя остальные блоки матрицы $\Lambda[\mathcal{J},\mathcal{J}]$ без изменения, т.е. матрица $\Lambda'[\mathcal{J},\mathcal{J}]$ получается из матрицы $\Lambda[\mathcal{J},\mathcal{J}]$ заменой в последней столбца $\Lambda[\mathcal{J},j_1]$ столбцом

$$\Lambda'[\mathcal{J},j_1]=\lambda[\mathcal{J},j']-\sum_{\tau\in L(\tau_1)}E[\mathcal{J},\mathcal{J}_\tau]\lambda[\mathcal{J}_\tau,j'].$$

Учитывая, что при условии $\Lambda[j_1,\mathcal{J}]=\mathbf{0}$ матрица $T'[\mathcal{J},\mathcal{J}]$ действует на строку $E[j_1,\mathcal{J}]$ справа, как единичная, для матрицы $B'[M,\mathcal{J}]$, совпадающей с $A'[M,\mathcal{J}]T'[\mathcal{J},\mathcal{J}]$, получим представление

$$B'[M,\mathcal{J}]=B[M,\mathcal{J}]+\{A_{\tau_1}[M,j']-A_{\tau_1}[M,j_1]\}E[j_1,\mathcal{J}],$$

в котором столбец $A_{\tau_1}[M,j']$, вычисляемый по формуле (17) с заменой k на τ_1, имеет отличные от нуля компоненты разве лишь в частях $A_{\tau_1}[M_\tau,j']$, $\tau\in L(\tau_1)$, а столбец $A_{\tau_1}[M,j_1]$ при $j_1\in\mathcal{J}_{\tau_1}$ на основании (19) совпадает с $B[M,j_1]$. Поэтому матрица $B'[M,\mathcal{J}]$ имеет ту же блочную структуру, что и матрица $B[M,\mathcal{J}]$, и её квадратные подматрицы $B'[M_k,\mathcal{J}_k]$, $k\in P\setminus\{\tau_1\}$, совпадают с соответствующими (неособенными) подматрицами матрицы $B[M,\mathcal{J}]$. Кроме того, для компоненты $g[j_1,j']$ вектора $g[\mathcal{J},j']$ на основании (18) и (3) имеем представление

$$g[j_1,j']=\lambda[j_1,j']-\Lambda[j_1,\mathcal{J}]\prod_{\tau_1<\tau}\Lambda_\tau[\mathcal{J},\mathcal{J}]\lambda[\mathcal{J},j'].$$

Отсюда ясно, что блок

$$B'[M_{\tau_1},\mathcal{J}_{\tau_1}]=B[M_{\tau_1},\mathcal{J}_{\tau_1}]+\{A_{\tau_1}[M_{\tau_1},j']-B[M_{\tau_1},j_1]\}E[j_1,\mathcal{J}_{\tau_1}]$$

матрицы $B'[M,\mathcal{J}]$ является неособенной матрицей, так как в силу условия $\Lambda[j_1,\mathcal{J}]=\mathbf{0}$ имеем $g[j_1,j']=\lambda[j_1,j']\neq 0$.

Таким образом, разбиение $\mathcal{J}_k$ $(k\in P)$ множества $\mathcal{J}$ является базисным по отношению к матрице $A'[M,\mathcal{J}]$, которая, как следует из (20), получается из матрицы $A[M,\mathcal{J}]$ заменой в последней столбца $A[M,j_1]$ столбцом $A[M,j']$. Отсюда ясно, что для завершения доказательства леммы достаточно для полученных матриц $B'[M,\mathcal{J}]$ и $\Lambda'[\mathcal{J},\mathcal{J}]$ лишь изменить обозначения соответственно на $B'[M,\mathcal{J}']$ и $\Lambda'[\mathcal{J}',\mathcal{J}']$, понимая под множеством $\mathcal{J}'$ исходное множество $\mathcal{J}$, в котором элемент j_1 заменен на j'.

ЛЕММА 2. Если в матрице $\Lambda[\mathcal{J},\mathcal{J}]$, отвечающей базисному по отношению к матрице $A[M,\mathcal{J}]$ разбиению $\mathcal{J}_\kappa\ (\kappa\in P)$ множества $\mathcal{J}$, для строки $\Lambda[j_1,\mathcal{J}]\ (j_1\in\mathcal{J}_{\tau_\nu})$ выполнены условия[ж)]

$$\Lambda[j_1,\mathcal{J}_\tau]=\mathbb{O},\ \tau_\nu<\tau<\tau_{\nu+1},\ \Lambda[j_1,j_{\nu+1}]\neq 0,\ j_{\nu+1}\in\mathcal{J}_{\tau_{\nu+1}},\tag{21}$$

то разбиение

$$\mathcal{J}_\kappa,\ \kappa\in P\setminus\{\tau_\nu,\tau_{\nu+1}\},\ (\mathcal{J}_{\tau_\nu}\setminus\{j_1\})\cup\{j_{\nu+1}\},(\mathcal{J}_{\tau_{\nu+1}}\setminus\{j_{\nu+1}\})\cup\{j_1\}\tag{22}$$

также является базисным по отношению к матрице $A[M,\mathcal{J}]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и в доказательстве леммы I, прежде всего покажем, что разбиение $\mathcal{J}_\kappa\ (\kappa\in P)$ множества $\mathcal{J}$ является базисным по отношению к матрице

$$A^{(\nu)}[M,\mathcal{J}]=A[M,\mathcal{J}]+\{A[M,j_{\nu+1}]-A[M,j_1]\}\,v_\nu[\mathcal{J}],\tag{23}$$

где $v_\nu[\mathcal{J}]=E[j_1,\mathcal{J}]-E[j_{\nu+1},\mathcal{J}]$. Построим преобразование $T^{(\nu)}[\mathcal{J},\mathcal{J}]$, равное произведению матриц

$$\Lambda^{(\nu)}_\kappa[\mathcal{J},\mathcal{J}]=E[\mathcal{J},\mathcal{J}]-E[\mathcal{J},\mathcal{J}_\kappa]\Lambda^{(\nu)}[\mathcal{J}_\kappa,\mathcal{J}],\ \kappa\in P,$$

а тем самым и матрицу $\Lambda^{(\nu)}[\mathcal{J},\mathcal{J}]$, выражая ее блоки $\Lambda^{(\nu)}[\mathcal{J}_\kappa,\mathcal{J}]$, $\kappa\in P$, через соответствующие блоки матрицы $\Lambda[\mathcal{J},\mathcal{J}]$ следующим образом.

а) К каждому из блоков $\Lambda[\mathcal{J}_\kappa,\mathcal{J}]$, $\tau_\nu\leqslant\kappa\leqslant\tau_{\nu+1}$, добавим некоторую матрицу ранга I, т.е. положим

$$\Lambda^{(\nu)}[\mathcal{J}_\kappa,\mathcal{J}]=\begin{cases}\Lambda[\mathcal{J}_{\tau_\nu},\mathcal{J}]+\{\Lambda[\mathcal{J}_{\tau_\nu},j_{\nu+1}]-E[\mathcal{J}_{\tau_\nu},j_1]\}\,u_\nu[\mathcal{J}],\ \kappa=\tau_\nu,\\[2ex]\Lambda[\mathcal{J}_\kappa,\mathcal{J}]+\Lambda[\mathcal{J}_\kappa,j_{\nu+1}]\,u_\nu[\mathcal{J}],\ \tau_\nu<\kappa<\tau_{\nu+1},\\[2ex]\Lambda[\mathcal{J}_{\tau_{\nu+1}},\mathcal{J}]+E[\mathcal{J}_{\tau_{\nu+1}},j_{\nu+1}]\,u_\nu[\mathcal{J}],\ \kappa=\tau_{\nu+1},\end{cases}\tag{24}$$

ж) Условие (21) было предложено В.А.Булавским вместо условия $\Lambda[j_1,j_{\nu+1}]\neq 0,\ j_{\nu+1}\in\mathcal{J}_{\tau_{\nu+1}},\ \tau_\nu<\tau_{\nu+1}$.

где в строке

$$u_\nu[\mathcal{J}] = -\frac{1}{\Lambda[j_1, j_{\nu+1}]}\left\{\Lambda[j_1, \mathcal{J}] + E[j_{\nu+1}, \mathcal{J}]\right\}$$

отличны от нуля разве лишь части $u_\nu[\mathcal{J}_\tau]$, $\tau \geqslant \tau_{\nu+1}$, поскольку в строке $\Lambda[j_1, \mathcal{J}]$ по условию леммы части $\Lambda[j_1, \mathcal{J}_\tau]$, $\tau_\nu \prec \tau \prec \tau_{\nu+1}$, равны нулю, а в строке

$$\bar{u}_\nu[\mathcal{J}] = -\Lambda[j_1, j_{\nu+1}]\{u_\nu[\mathcal{J}] - u_\nu[\mathcal{J}_{\tau_{\nu+1}}](\Lambda[\mathcal{J}_{\tau_{\nu+1}}, \mathcal{J}] + E[\mathcal{J}_{\tau_{\nu+1}}, \mathcal{J}])\}$$

отличны от нуля разве лишь части $\bar{u}_\nu[\mathcal{J}_\tau]$, $\tau \succ \tau_{\nu+1}$. Структура строк $u_\nu[\mathcal{J}]$ и $\bar{u}_\nu[\mathcal{J}]$ следует из того, что в силу соотношений $\mathcal{J}_\kappa \subset \bar{N}_\kappa \cap \mathcal{J}$, $\kappa \in P$, для множества $\bar{N}_{\kappa 0}$, определенного в (2) и входящего в определение блочной структуры матрицы $\Lambda[\mathcal{J}, \mathcal{J}]$, имеет место представление

$$\bar{N}_{\kappa 0} = \bar{N}_\kappa \cap \Big(\bigcup_{\kappa \prec \tau} \mathcal{J}_\tau\Big), \ \kappa \in P. \tag{25}$$

б) В каждом из блоков $\Lambda[\mathcal{J}_\kappa, \mathcal{J}]$, $\kappa \prec \tau_\nu$, столбцы $\Lambda[\mathcal{J}_\kappa, j_1]$ и $\Lambda[\mathcal{J}_\kappa, j_{\nu+1}]$ поменяем местами, т.е. положим

$$\Lambda^{(\nu)}[\mathcal{J}_\kappa, \mathcal{J}] = \Lambda[\mathcal{J}_\kappa, \mathcal{J}] + \{\Lambda[\mathcal{J}_\kappa, j_{\nu+1}] - \Lambda[\mathcal{J}_\kappa, j_1]\} v_\nu[\mathcal{J}], \ \kappa \prec \tau_\nu.$$

в) Остальные блоки матрицы $\Lambda[\mathcal{J}, \mathcal{J}]$ оставим без изменения.

Учитывая (19), для матрицы $B^{(\nu)}[M, \mathcal{J}]$, совпадающей с $A^{(\nu)}[M, \mathcal{J}]T^{(\nu)}[\mathcal{J}, \mathcal{J}]$, получим представление

$$B^{(\nu)}[M, \mathcal{J}] = B[M, \mathcal{J}] + \{A_{\tau_\nu}[M, j_{\nu+1}] - B[M, j_1]\} E[j_1, \mathcal{J}] +$$
$$+ B[M, j_{\nu+1}](u_\nu[\mathcal{J}_{\tau_{\nu+1}}] E[\mathcal{J}_{\tau_{\nu+1}}, \mathcal{J}]),$$

в котором столбец $A_{\tau_\nu}[M, j_{\nu+1}]$, вычисляемый по формуле (17) с заменой κ на τ_ν и j' на $j_{\nu+1}$, имеет отличные от нуля компоненты разве лишь в частях $A_{\tau_\nu}[M_\tau, j_{\nu+1}]$, $\tau \in L(\tau_\nu)$. Поэтому матрица $B^{(\nu)}[M, \mathcal{J}]$ имеет ту же блочную структуру, что и матрица $B[M, \mathcal{J}]$, и ее квадратные подматрицы $B^{(\nu)}[M_\kappa, \mathcal{J}_\kappa]$, $\kappa \in P \setminus \{\tau_\nu, \tau_{\nu+1}\}$, совпадают с соответствующими (неособенными) подматрицами матрицы $B[M, \mathcal{J}]$. В силу условия $\Lambda[j_1, j_{\nu+1}] \neq 0$ блок

$$B^{(\nu)}[M_{\tau_\nu}, \mathcal{J}_{\tau_\nu}] = B[M_{\tau_\nu}, \mathcal{J}_{\tau_\nu}] + \{A_{\tau_\nu}[M_{\tau_\nu}, j_{\nu+1}] - B[M_{\tau_\nu}, j_1]\} E[j_1, \mathcal{J}_{\tau_\nu}]$$

также является неособенной матрицей. Далее, в силу того, что неособенная матрица $B^{(\nu)}[M, J]$ имеет блочную структуру M_κ, $(\bigcup_{\tau \leqslant \kappa} J_\tau)$, $\kappa \in P$, и ее блоки $B^{(\nu)}[M_\kappa, J_\kappa]$, $\kappa \in P \setminus \{\tau_{\nu+1}\}$, являются неособенными матрицами, можно заключить, что и блок

$$B^{(\nu)}[M_{\tau_{\nu+1}}, J_{\tau_{\nu+1}}] = B[M_{\tau_{\nu+1}}, J_{\tau_{\nu+1}}] + B[M_{\tau_{\nu+1}}, j_{\nu+1}] u_\nu [J_{\tau_{\nu+1}}]$$

является неособенной матрицей.

Таким образом, разбиение J_κ $(\kappa \in P)$ множества J является базисным по отношению к неособенной матрице $A^{(\nu)}[M, J]$, которая, как следует из (23), получается из матрицы $A[M, J]$ перестановкой в последней столбцов $A[M, j_1]$ и $A[M, j_{\nu+1}]$. Отсюда ясно, что полученные матрицы $\Lambda^{(\nu)}[J, J]$ и $B^{(\nu)}[M, J]$ будут отвечать и матрице $A[M, J]$ в смысле определения 3, если в исходном разбиении множества J элементы j_1 и $j_{\nu+1}$ поменять местами, т.е. разбиение (22) является базисным по отношению к матрице $A[M, J]$.

Заметим, что решение $\lambda^{(\nu)}[J, j']$ системы (16) с матрицей $B^{(\nu)}[M, J]$ может быть получено из вектора $\lambda[J, j']$ перевычислением разве лишь частей $\lambda^{(\nu)}[J_\kappa, j']$, $\tau_\nu \leqslant \kappa \leqslant \tau_{\nu+1}$, по формулам, аналогичным (24), а именно:

$$\lambda^{(\nu)}[J_\kappa, j'] = \begin{cases} \lambda[J_\kappa, j'] - \dfrac{\lambda[j_1, j']}{\Lambda[j_1, j_{\nu+1}]} \left\{ \Lambda[J_\kappa, j_{\nu+1}] - E[J_\kappa, j_1] \right\}, & \kappa = \tau_\nu, \\ \lambda[J_\kappa, j'] + \dfrac{\lambda[j_1, j']}{\Lambda[j_1, j_{\nu+1}]} \Lambda[J_\kappa, j_{\nu+1}], & \tau_\nu < \kappa < \tau_{\nu+1}, \\ \lambda[J_\kappa, j'] + \{\lambda[j_1, j'] + \Lambda[j_1, j_{\nu+1}] u_\nu [J_\kappa] \lambda[J_\kappa, j']\} E[J_\kappa, j_{\nu+1}], & \kappa = \tau_{\nu+1}. \end{cases} \quad (26)$$

Отсюда ясно, что в векторе $g[J, j']$ компонента $g[j_1, j']$ теперь имеет представление

$$g[j_1, j'] = E[j_{\nu+1}, J] \lambda^{(\nu)}[J, j'] - \Lambda^{(\nu)}[j_{\nu+1}, J] \prod_{\tau_{\nu+1} < \tau} \Lambda_\tau [J, J] \lambda^{(\nu)}[J, j'].$$

ТЕОРЕМА 2. Если J_κ $(\kappa \in P)$ – базисное по отношению к неособенной матрице $A[M, J]$ разбиение множества J и для некоторого $j' \in N \setminus J$ в векторе $g[J, j']$ компонента $g[j_1, j'] \neq 0$ $(j_1 \in J_{\tau_1})$, то существуют последовательности

$\tau_1 \prec \tau_2 \prec \ldots \prec \tau_q \ (1 \le q \le |L(\tau_1)|)$ и $j_i \in \mathcal{J}_{\tau_i}$, $i = 1, 2, \ldots, q$, такие, что разбиение

$$\mathcal{J}_\kappa,\ \kappa \in P \setminus \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_q\},$$

$$(\mathcal{J}_{\tau_i} \setminus \{j_i\}) \cup \{j_{i+1}\},\ i = 1, 2, \ldots, q-1;\ (\mathcal{J}_{\tau_q} \setminus \{j_q\}) \cup \{j_1\}$$

множества $\mathcal{J}'$ является базисным по отношению к матрице $A[M, \mathcal{J}']$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что для некоторого $\nu \ge 1$ определены последовательности $\tau_1 \prec \tau_2 \prec \ldots \prec \tau_\nu$ и $j_i \in \mathcal{J}_{\tau_i}$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, такие, что разбиение

$$\mathcal{J}_\kappa,\ \kappa \in P \setminus \{\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_\nu\},$$
$$(\mathcal{J}_{\tau_i} \setminus \{j_i\}) \cup \{j_{i+1}\},\ i = 1, 2, \ldots, \nu-1;\ (\mathcal{J}_{\tau_\nu} \setminus \{j_\nu\}) \cup \{j_1\} \tag{27}$$

является базисным по отношению к матрице $A[M, \mathcal{J}]$ (при $\nu = 1$ это действительно так). Чтобы не вводить новых обозначений, будем считать, что матрица $\Lambda[\mathcal{J}, \mathcal{J}]$ отвечает разбиению (27) в смысле определения 3 при некотором $\nu \ge 1$.

Если в матрице $\Lambda[\mathcal{J}, \mathcal{J}]$ строка с номером j_1 равна нулю, то на основании леммы I утверждение теоремы справедливо при $q = \nu$. Кроме того, из блочной структуры матрицы $\Lambda[\mathcal{J}, \mathcal{J}]$ и определения (25) множества $\bar{N}_{\tau_\nu 0}$ следует, что условие $\Lambda[j_1, \mathcal{J}] = \mathbb{O}$ эквивалентно условию

$$L_\nu \equiv \{\tau \in P : \tau_\nu \prec \tau,\ \Lambda[j_1, \mathcal{J}_\tau] \ne \mathbb{O}\} = \varphi,$$

последнее же, во всяком случае при $\tau_\nu = \max L(\tau_1)$ выполнено.

Обозначим через $\tau_{\nu+1}$ минимальный элемент множества L_ν, если $\Lambda[j_1, \mathcal{J}] \ne \mathbb{O}$, и в множестве $\mathcal{J}_{\tau_{\nu+1}}$ выберем элемент $j_{\nu+1}$ так, чтобы

$$|\Lambda[j_1, j_{\nu+1}]| = \max_{j \in \mathcal{J}_{\tau_{\nu+1}}} |\Lambda[j_1, j]|.$$

Тогда для разбиения (27), матрицы $\Lambda[\mathcal{J}, \mathcal{J}]$ и номеров j_1 и $j_{\nu+1}$, очевидно, выполнены условия (21). Поэтому по лемме 2 разбиение (27), если в нем номер ν увеличить на I, будет базисным по отношению к матрице $A[M, \mathcal{J}]$. Отсюда и из строгой монотонности последовательности $\tau_1 \prec \tau_2 \prec \ldots$ следует, что не более чем через $|L(\tau_1)|$ шагов описанный процесс оборвется.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Из доказательства теоремы 2 видно, что в результате перехода от матрицы $A[M,J]$ к матрице $A[M,J']$ в разбиении $J_\kappa\ (\kappa\in P)$ множества J придется изменить множества J_κ лишь для некоторых номеров $\kappa\in L(\tau_1)$, а именно: $\kappa = \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_q$. При этом в матрице $\Lambda[J,J]$ к блокам $\Lambda[J_\kappa,J]$, $\tau_1\leqslant\kappa\leqslant\tau_q$, согласно (24), добавляется не более двух матриц ранга I, а затем после циклической перестановки

$$\circlearrowleft j_1 \leftarrow j_2 \leftarrow \cdots \leftarrow j_q \leftarrow$$

элементов в исходном разбиении $J_\kappa\ (\kappa\in P)$ множества J преобразование полученной матрицы $\Lambda^{(q-1)}[J,J]$ сводится к замене её столбца с номером j_1 столбцом

$$\Lambda^{(q)}[J,j'] = \lambda^{(q-1)}[J,j'] - \sum_{\tau\in L(\tau_q)} E[J,J_\tau]\lambda^{(q-1)}[J_\tau,j'],$$

где $\lambda^{(q-1)}[J,j']$ получается из столбца $\lambda[J,j']$ добавлением к каждой из его частей $\lambda[J_\kappa,j']$, $\tau_1\leqslant\kappa\leqslant\tau_q$, согласно (26), не более двух матриц ранга I; остальные же блоки матрицы $\Lambda[J,J]$ остаются без изменения. В матрице $B[M,J]$ к блокам $B[M_\kappa,J_\kappa]$, $\kappa=\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_q$, добавляется не более двух матриц ранга I, а блоки $B[M_\kappa,J_\kappa]$, $\kappa\in P\setminus\{\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_q\}$, остаются без изменения.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В методе [1] процесс решения задачи л.п. обычно начинается с матрицы $A[M,J]$, для которой базисное разбиение $J_\kappa\ (\kappa\in P)$ множества J очевидно, и при этом $\Lambda[J,J]=0$, следовательно, $B[M,J]=A[M,J]$.

В заключение отметим, что описанный алгоритм тем более эффективен, чем меньше максимальная длина ℓ цепи упорядоченного множества P. Поэтому естественно поставить вопрос о построении такого допустимого порядка в множестве P, при котором величина ℓ была бы минимальной (что и является предметом статьи [6] настоящего сборника).

Литература

1. Л.В.Канторович, Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. Изд. АН СССР, М., 1959.
2. Г.Ш.Рубинштейн, О решении задач линейного программирования большого объема. Оптимальное планирование, 2 (1964), 3-22.

3. Р.А.Звягина, Задачи линейного программирования с блочно-диагональными матрицами. Оптимальное планирование, 2 (1964), 50-62.

4. Р.А.Звягина, Задачи линейного программирования с матрицами произвольной блочной структуры. ДАН СССР, 196, 4(1971), 755-758.

5. Д.А.Райков, Векторные пространства. Физматгиз, М., 1962.

6. Р.А.Звягина, О построении иерархических порядков при заданных условиях на сравнимость. Настоящий сборник, стр.41-54.

Поступила в редакцию
23.XII. 1970 г.