ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ
Сборник трудов
1967 г. Института математики СО АН СССР Выпуск 9

А.М. РУБИНОВ

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ СУБЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

1°. Пусть X - локально выпуклое пространство, топология в котором задается мажорантной системой полунорм $\|\cdot\|_\alpha$ $(\alpha \in A)$. Функционал p, определенный на x, назовем сублинейным, если он

1) положительно однороден: для $x \in X$, $\lambda \geq 0$

$$p(\lambda x) = \lambda p(x);$$

2) полуаддитивен: для $x', x'' \in X$,

$$p(x' + x'') \leq p(x') + p(x'');$$

3) непрерывен в нуле: если $\{x_\gamma\}$ - обобщенная последовательность и $x_\gamma \to 0$, то

$$p(x_\gamma) \to p(0) = 0.$$

Заметим, что сублинейный функционал непрерывен в каждой точке $x \in X$. Действительно, если $x_\gamma \to x$, то

$$p(x_\gamma) = p(x_\gamma - x + x) \leq p(x_\gamma - x) + p(x),$$

$$p(x) = p(x - x_\gamma + x_\gamma) \leq p(x - x_\gamma) + p(x_\gamma),$$

откуда следует, что

$$p(x) \leq \underline{\lim}\, p(x_\gamma) \leq \overline{\lim}\, p(x_\gamma) \leq p(x).$$

Последнее и означает, что p непрерывен в точке x.

Легко показать, что положительно однородный и полуаддитивный функционал непрерывен в нуле (и, следовательно, сублинеен) тогда и только тогда, когда он ограничен, т.е. при некотором $\alpha' \in A$:

$$\sup_{\|x\|_{\alpha'}\le 1} |p(x)| = \|p\|_{\alpha'} < \infty . \qquad (1)$$

Из полуаддитивности p легко вытекает,что $-p(-x)\le p(x)$. Последнее неравенство, в частности, показывает, что сублинейный функционал, отличный от нулевого, не может принимать только неположительные значения. Действительно, если $p(-x)<0$, то

$$p(x)\ge -p(-x)>0.$$

Функционал $f\in X'$ (X' - сопряженное к X пространство) назовем опорным к p , если для любого $y\in X$

$$f(y)\le p(y).$$

Множество всех опорных к p функционалов обозначим через $\mathcal{U}_p$. Положим также для $x\in X$

$$\mathcal{U}_p^x=\{f\in \mathcal{U}_p / f(x)=p(x)\}.$$

Применяя теорему Хана-Банаха, нетрудно показать,что при любом $x\in X$ множество $\mathcal{U}_p^x$ (и тем более $\mathcal{U}_p$) не пусто. Легко также показать, что множества $\mathcal{U}_p$ и $\mathcal{U}_p^x$ выпуклы, замкнуты и эквинепрерывны . При этом для любого $x\in X$:

$$p(x)=\max_{f\in \mathcal{U}_p} f(x) , \qquad (2)$$

Совокупность всех сублинейных над X функционалов обозначим через $P(X)$. В множестве $P(X)$ естественным образом вводятся операции сложения и умножения на положительное число. $P(X)$ можно также естественным образом частично упорядочить. Заметим, что с любыми своими элементами p_1 и p_2 $P(X)$ содержит и $p_1\vee p_2=\sup(p_1, p_2)$.

2°. Через $U(X')$ обозначим совокупность всех непустых выпуклых, эквинепрерывных и замкнутых в топологии $\sigma(X',X)$ подмножеств пространства X' (здесь $\sigma(X',X)$ - слабая топология, определяемая двойственностью между X' и X).

Введем в $U(X')$ операции сложения и умножения на неотрицательное число. Под суммой $u+v$ ($u,v\in U(X')$) будем понимать алгебраическую сумму множеств u и v

$$u+v=\{h\in X' / h=f+g;\, f\in u,\, g\in v\}.$$

Положим, далее, для $\lambda\geq 0$ и $u\in U(X')$

$$\lambda u=\{h\in X / h=\lambda f,\, f\in u\}.$$

В [I] показано, что введенные таким образом алгебраические операции обладают следующими свойствами:

I) $u+v=v+u$;

2) $(u+v)+w=u+(v+w)$;

3) $0\cdot u=0$, где 0 содержит только нулевой элемент;

4) $\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$;

5) $(\lambda+\mu)u=\lambda u+\mu u$;

6) $\lambda(\mu u)=(\lambda\mu)u$;

7) $1\cdot u=u$;

8) если $u+w=v+w$, то $u=v$.

Будем считать, что $U(X')$ частично упорядочено по включению.

Пусть $u\in U(X')$. Положим для $x\in X$

$$p_u(x)=\max_{f\in u} f(x).$$

Нетрудно видеть, что $p_u\in P(X)$.

Выясним некоторые свойства отображения φ , переводящего $U(X')$ в $P(X)$ по формуле $\varphi(u)=p_u$. Отметим прежде всего что, каков бы ни был $p\in P(X)$, множество $u_p\in U(X')$, и, как следует из (2), $\varphi(u_p)=p$. Покажем теперь, что если $u\neq v$, то $\varphi(u)\neq\varphi(v)$. Действительно, не уменьшая общности, можно считать, что существует $f_0\in X'$, такой, что $f_0\in u$, но $f_0\notin v$. По известной теореме об отделимости замкнутого выпуклого множества от не принадлежащей ему точки найдется $x\in X$ такой, что $p_v(x)=\sup_{f\in v} f(x) < f_0(x)$, а тогда и подавно $p_v(x)<\sup_{f\in u} f(x)=p_u(x)$.

Отметим еще справедливость следующих соотношений для $u, v\in U(X')$:

I) $\varphi(u+v)=\varphi(u)+\varphi(v)$, (3)

2) $\varphi(\lambda v)=\lambda\varphi(v)$ $(\lambda\geq 0)$, (4)

3) $\varphi(u)\geq\varphi(v)$ тогда и только тогда, когда $u\supset v$. (5)

Проверим, например, I). Пусть $p=\varphi(u)$ Тогда $u = =\varphi^{-1}(p)=u_p$, и потому, в силу (2), для любого $x\in X$ имеем $\varphi(u)(x)=\max\limits_{f\in u} f(x)$. Таким же образом

$$\varphi(v)(x)=\max_{g\in v} g(x), \qquad \varphi(u+v)(x)=\max_{h\in u+v} h(x).$$

Пусть $f'\in u$, $g'\in v$ таковы, что $\max\limits_{f\in u} f(x)=f'(x)$, $\max\limits_{g\in v} g(x)=g'(x)$. Тогда

$$\varphi(u+v)(x)=\max_{h\in u+v} h(x)=\sup_{f\in u,\, g\in v}(f+g)(x)\geq f'(x)+$$
$$+g'(x)=\varphi(u)(x)+\varphi(v)(x).$$

С другой стороны,

$$\varphi(u+v)(x)=\sup_{f\in u,\, g\in v}(f+g)(x)\leq \sup_{f\in u} f(x)+\sup_{g\in v} g(x)$$
$$=\varphi(u)(x)+\varphi(v)(x),$$

откуда и следует нужное нам равенство.

Обычным способом погрузим множество $U(X')$ в линейное (см. [I]). Для этого рассмотрим множество всех упорядоченных пар вида (u,v) $(u,v\in U(X'))$. Скажем, что пара (u, v) = (u', v'), если $u+v'=v+u'$. Введенное таким образом отношение равенства рефлексивно, симметрично и транзитивно, в силу чего множество всех пар распадается на непересекающиеся классы равных пар. Обозначим совокупность этих классов через $\bar{U}(X')$. В множестве пар введем действия сложения и умножения на число следующим образом:

$$(u,v)+(u',v')=(u+u',\ v+v'); \qquad (6)$$

$$\lambda(u,v)=\begin{cases}(\lambda u,\lambda v), & \text{если } \lambda\geq 0,\\ (-\lambda v,-\lambda u), & \text{если } \lambda<0.\end{cases} \qquad (7)$$

В $\bar{U}(X')$ алгебраические операции определяются естественным образом с помощью (6) и (7), при этом $\bar{U}(X')$ становится линейным множеством.

Обозначим через $K(u,v)$ класс, содержащий пару (u,v) $(v\neq 0)$; через K_u - класс, содержащий пару $(u,0)$. Отображение $u\to K_u$ является, как легко видеть, изоморфизмом между $U(X')$ и совокупностью всех классов вида K_u $(u \in U(X'))$. Легко показать, что $K_{(u,v)} = K_u - K_v$.

С помощью той же конструкции, что и выше, погрузим $P(X)$ в линейное множество, которое мы обозначим через $\bar{P}(X)$. Нетрудно показать, что $\bar{P}(X)$ можно рассматривать как линейное подмножество множества $C(X)$ всех непрерывных на X функционалов, иными словами, класс $K(p,q) \in \bar{P}(X)$, содержащий пару (p, q), можно отождествить с функционалом $p-q((p-q)(x)=p(x)-q(x))$; поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать $\bar{P}(x)$ как линейное множество всех функционалов, представимых в виде разности двух сублинейных.

Для класса $K_u \in \bar{U}(X')$ положим $\bar{\varphi}(K_u)=\varphi(u)$, где φ - определенное выше отображение $U(X')$ в $P(X)$. Для класса $K_{(u,v)}=K_u - K_v$ положим $\bar{\varphi}(K_{(u,v)})=\bar{\varphi}(K_u)-\bar{\varphi}(K_v)$. Ясно, что это определение корректно, иными словами, из равенства $(u,v)=(u',v')$ следует $\bar{\varphi}(K_u)-\bar{\varphi}(K_v)=\bar{\varphi}(K_{u'})-\bar{\varphi}(K_{v'})$. Легко показать, используя (3) и (4), что φ является линейным изоморфизмом между $\bar{U}(X')$ и $\bar{P}(X)$.

Введем в $\bar{U}(X')$ и $\bar{P}(X)$ отношение порядка. Если $K_{(u,v)}, K_{(u',v')} \in \bar{U}(X')$, то будем считать, что $K_{(u,v)} \leq K_{(u',v')}$ тогда и только тогда, когда $u+v' \subset v+u'$. В [I] показано, что это определение корректно, т.е. не зависит от выбора представителей классов. Если $S, S' \in \bar{P}(X)$, $S=p-q$, $S'=p'-q'$, то скажем, что $S \leq S'$ тогда и только тогда, когда $p+q' \leq q+p'$ (иными словами, для каждого $x \in X$ $p(x)-q(x) \leq p'(x)-q'(x)$). Легко показать, используя (5), что $\bar{\varphi}(K_{(u,v)}) \leq \bar{\varphi}(K_{(u',v')})$ тогда и только тогда, когда $K_{(u,v)} \leq K_{(u',v')}$. Таким образом, $\bar{U}(X')$ и $\bar{P}(X)$ изоморфны как частично упорядоченные пространства.

В [I] показано, что $\bar{U}(X')$ является K - линеалом, при этом $K^+_{(u,v)}=K_{(u \vee v, v)}$, $K^-_{(u,v)}=K_{(u \vee v, u)}$,

$$|K_{(u,v)}| = K_{2(u \vee v), u+v)},$$

где $u \vee v$ есть замкнутая в $\sigma(X' X)$ выпуклая оболочка множества $u \cup v$. В силу установленного нами изоморфизма $\bar{P}(X)$ также является K - линеалом, при этом для $S=p-q \in \bar{P}(X)$ имеем $S^+=p \vee q - q$,

$$S^- = p \vee q - p, \; |S| = 2(p \vee q)-(p+q),$$

где $p \vee q = \sup(p,q)$ — функционал, определяемый следующим образом: $(p \vee q)(x) = \sup(p(x), q(x)) (x \in X)$. Если X - нормированное пространство, то $\bar{P}(X)$ является-

K - линеалом ограниченных элементов (в качестве единицы можно взять, например, функционал $P(x)=\|x\|$, а потому и $\bar{U}(X')$ является K - линеалом ограниченных элементов (единицей в нем может служить множество $U_{\|.\|}$ совпадающее с единичным шаром S' пространства X). Нормируем $\bar{P}(X)$ и $\bar{U}(X')$ стандартным образом (см., например, [2]), а именно: для $s \in P(X)$, положим

$$\|s\| = \inf\{\lambda / |s| \leqslant \lambda \|\cdot\|\} = \inf\{\lambda / \frac{|s(x)|}{\|x\|} \leqslant \lambda\} = \tag{8}$$
$$= \sup_{x \in X} \frac{|s(x)|}{\|x\|},$$

для $K_{(u,v)} \in \bar{U}(X')$ положим

$$\|K_{(u,v)}\| = \inf\{\lambda / |K_{(u,v)}| \leqslant \lambda U_{\|\cdot\|}\} . \tag{9}$$

Так как $\bar{P}(X)$ и $\bar{U}(X')$ изоморфны как частично упорядоченные множества и φ ($U_{\|\cdot\|}$) = $\|\cdot\|$, то полученные нами нормированные пространства изометричны.

Таким образом, мы показали справедливость следующих теорем:

ТЕОРЕМА I. $\bar{U}(X')$ и $\bar{P}(X)$ изоморфны как линейные частично упорядоченные пространства.

ТЕОРЕМА 2. $\bar{P}(X)$ является K-линеалом.

ТЕОРЕМА 3. Если X - нормированное пространство, то пространства $\bar{P}(X)$ и $\bar{U}(X')$, наделенные соответственно нормами (8) и (9), изометричны.

Укажем на некоторые применения полученных результатов. При исследовании многих экстремальных задач оказывается важным описать по данному сублинейному функционалу p множество U_p (см., например, [3]). Из полученных выше результатов легко следует, в частности, теоремы 4.3 - 4.5 в [3]. Приведем важное обобщение теоремы 4.4 в [3] .

ТЕОРЕМА 4. Пусть сублинейные функционалы $p_\gamma\ (\gamma \in \Gamma)$ определены на нормированном пространстве X и $\sup_{\gamma \in \Gamma}\|p_\gamma\|^{*)} < \infty$. Положим для $x \in X$ $p(x) = \sup_{\gamma \in \Gamma} p_\gamma(x)$.

---

*) Здесь $\|p_\gamma\|$ определена по формуле (I).

Тогда функционал p сублинеен и множество $\mathcal{U}_p$ совпадает со слабозамкнутой выпуклой оболочкой $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{U}_{p_\gamma}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО теоремы 4 следует из того обстоятельства, что $\sup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{U}_{p_\gamma}$ совпадает со слабозамкнутой выпуклой оболочкой $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{U}_{p_\gamma}$.

Опишем, например, множество $\mathcal{U}p$ для функционала $p(x)=\max_{t\in E_0} x(t)$, определенного в пространстве $C(E)$,

где E - замкнутое ограниченное множество в конечномерном пространстве, E_0 - замкнутое подмножество E. Рассмотрим при $t\in E_0$ функционалы $\delta_t: \delta_t(x)=(x)(t)$. Эти функционалы линейны, а потому и сублинейны; ясно, что $\mathcal{U}_{\delta_t}=\{\delta_t\}$. Согласно теореме 4 $\mathcal{U}_p$ совпадает со слабозамкнутой выпуклой оболочкой $\bigcup_{t\in E_0} \mathcal{U}\delta_t$. Пусть $S^+(E_0)$ - множество линейных над $C(E)$ функционалов, порождаемых неотрицательными мерами μ такими, что $\mu(E_0)=1$, $\mu(E\setminus E_0)=0$. Так как $S^+(E_0)$ выпукло и слабо замкнуто, а $\delta_t\in S^+(E_0)$ $(t\in E_0)$, то $\mathcal{U}_p\subset S^+(E_0)$. С другой стороны, если функционал $f\in S^+(E_0)$ порождается мерой μ, то для $x\in C(E)$

$$f(x)=\int_E x d\mu=\int_{E^0} x d\mu\leqslant \max_{t\in E_0} x(t)\cdot\mu(E_0)=p(x),$$

откуда следует, что $f\in\mathcal{U}_p$. Таким образом, в рассматриваемом случае $\mathcal{U}_p=S^+(E_0)$.

3°. Пусть X - локально выпуклое пространство, $p\in P(X)$. Положим для $x\in X$

$$\Omega_p^x=\{y\in X/p(y)\leqslant p(x)\}.$$

Из непрерывности p следует, что Ω_p^x - замкнутое множество. Если x таково, что $p(x)=0$, то $\Omega_p^x=\Omega_p^0$ - конус. Пусть $\mathcal{U}\in U(X')$. Через $C(\mathcal{U})$ обозначим коническую оболочку множества $\mathcal{U}$. Если C - конус в X', то через $\pi(C)$ обозначим поляру C $(\pi(C)=\{x\in X/f(x)\leqslant 0, f\in C\}$. Если C - конус в X, то его поляру также обозначим через $\pi(C)$.

Пусть $p\in P(X)$. Нетрудно проверить, что $\pi(C(\mathcal{U}_p))=\Omega_p^0$.

Так как вторая поляра $\pi^2(C(\mathcal{U}_\rho))$ совпадает с $\overline{C(\mathcal{U}_\rho)}$ – замыканием $C(\mathcal{U}_\rho)$ в $\sigma(X', X)$, то, поскольку $\overline{C(\mathcal{U}_\rho)} = C(\mathcal{U}_\rho)$, справедлива следующая

ТЕОРЕМА 5. $C(\mathcal{U}_\rho) = \pi(\Omega_\rho^o)$.

(Частный случай теоремы 5 приведен без доказательства в[3]).

Опишем коническую оболочку множества $\mathcal{U}_\rho^x$ ($\mathcal{U}_\rho^x = \{f \in \mathcal{U}_\rho / f(x) = \rho(x)\}$. Для $x \in X$ положим

$$G x = \{g \in X / \max_{y \in \Omega_\rho^x} g(y) = g(x)\}.$$

ТЕОРЕМА 6. Если $\Omega_\rho^x \neq \phi$, то $G_x = C(\mathcal{U}_\rho^x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $f \in C(\mathcal{U}_\rho^x)$. Тогда $f = \alpha g$, где $g \in \mathcal{U}_\rho^x, \alpha > 0$, а потому для $y \in \Omega_\rho^x$

$$f(x) = \alpha g(x) = \alpha \rho(x) \geqslant \alpha \rho(y) \geqslant \alpha g(y) = f(y),$$

и так как $x \in \Omega_\rho^x$, то $f(x) = \max_{y \in \Omega_\rho^x} f(y)$.

Это и означает, что $f \in G_x$.

2) Пусть $g \in G_x$. Предположим сначала, что $\rho(x) \neq 0$ и покажем, что

$$\operatorname{sign} g(x) = \operatorname{sign} \rho(x). \tag{10}$$

Действительно, если $\rho(x) > 0$, то $0 \in \overset{o}{\Omega}{}_\rho^x = \{y \in X / \rho(y) < \rho(x)\}$ и, так как в силу непрерывности ρ $\overset{o}{\Omega}{}_\rho^x$ открыто, найдется окрестность нуля $v \subset \overset{o}{\Omega}{}_\rho^x$. Имеем в этом случае

$$g(x) = \sup_{y \in \Omega_\rho^x} g(y) \geqslant \sup_{y \in v} g(y) > 0.$$

Если же $\rho(x) < 0$, то предположение $g(X) \geqslant 0$ приводит к противоречию следующим образом. Выберем $\alpha_0 > 1$ и, учитывая, что $\alpha_0 x \in \overset{o}{\Omega}{}_\rho^x$, а также то обстоятельство, что $\overset{o}{\Omega}{}_\rho^x$ открыто, найдем окрестность нуля v такую, что $\alpha_0 x + v \subset \Omega_\rho^x$. Поскольку, в силу нашего предположения, $g(\alpha_0 x) = \alpha_0 g(x) \geqslant 0$, то найдется $y \in \alpha_0 x + v$ такой, что $g(y_0) > 0$. Имеем в этом случае, принимая во внимание, что при $\alpha > 1$ $\alpha y_0 \in \Omega_\rho^x$,

$$g(x) = \sup_{y \in \Omega_\rho} g(y) = \sup_{\alpha > 1} g(\alpha y_0) = \infty,$$

что невозможно. Таким образом, (10) доказано. Положим $\lambda = \frac{\rho(x)}{g(x)}$. Из (10) следует, что $0 < \lambda < \infty$. Рассмотрим функционал

$f=\lambda g$. Ясно, что $f\in G_x$. Покажем, что $f\in U_\rho^x$. Из определения λ вытекает, что $f(x)=\frac{\rho(x)}{g(x)}g(x)=\rho(x)$. Осталось проверить, что для любого $y\in x$ $f(y)\leq\rho(y)$. Предполагая это утверждение неверным, найдем $z\in X$, такой, что $f(z)>\rho(z)$. Не уменьшая общности, можно считать, что $sign\,\rho(z)=sign\,\rho(x)$ . . (В противном случае рассмотрим вместо z элемент $z_\alpha=x+\alpha(z-x)$. Легко проверить, что $f(z_\alpha)>\rho(z_\alpha)$ и в то же время при достаточно малых α $sign\,\rho(z_\alpha)=sign\,\rho(x)$). Выберем теперь $\beta>0$ так, чтобы

$$f(z)>\beta\rho(x)>\rho(z). \tag{II}$$

Элемент $\frac{1}{\beta}z\in\Omega_\rho^x$, и потому, учитывая то обстоятельство, что $f\in G_x$, имеем

$$f(x)=\rho(x)=\max_{y\in\Omega_\rho^x}f(y)\geq\frac{1}{\beta}f(z),$$

что, однако, противоречит (II). Из полученного противоречия и вытекает опорность f.

Пусть теперь $\rho(x)=0$. В этом случае, как легко проверить, и $g(x)=0$. Используя то обстоятельство, что $\overset{\circ}{\Omega}{}_\rho^x\neq\phi$, можно показать, что и в рассматриваемом случае найдется λ такое, что функционал $f=\lambda g$ принадлежит U_ρ^x. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $x\in X$, $\rho(x)\neq 0$. Положим $\rho_x(y)=\max_{f\in U_\rho^x}f(y)$ $(y\in X)$. Ясно, что ρ_x - сублинейный функционал. В силу теоремы 5 и 6

$$G_x=\iota(U_\rho^x)=\pi(\Omega_{\rho_x}).$$

Заметим, что, как можно показать, справедливо следующее соотношение: для $y\in X$ $\rho_x(y)=\lim_{\alpha\to+0}\frac{\rho(x+\alpha y)-\rho(x)}{\alpha}$

Из теоремы 6 легко следует необходимое и достаточное условие минимума сублинейного функционала ρ на выпуклом множестве.

ТЕОРЕМА 7. Для того, чтобы сублинейный функционал ρ достигал минимума на выпуклом множестве $\Omega\subset X$ в точке y, необходи -

мо и достаточно, чтобы нашелся линейный функционал $f \in \mathcal{U}_p^y$, обладающий тем свойством, что

$$f(y) = \min_{x \in \Omega} f(x) . \qquad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Необходимость. Так как $y \in \Omega_p^y \cap \Omega$ и $\overset{\circ}{\Omega}{}_p^y \cap \Omega = \emptyset$ (здесь $\overset{\circ}{\Omega}{}_p^y = \{x \in X \,/\, p(x) < p(y)\}$), то, в силу теоремы отделимости Эйдельгайта, найдется $g \in X, g \neq 0$ и такой, что

$$g(y) = \max_{x \in \Omega_p^y} g(x) = \min_{x \in \Omega} g(x) .$$

Функционал $g \in G_y$, и потому, как следует из теоремы 6, $g = \alpha f$, где $\alpha > 0$, $f \in \mathcal{U}_p^y$. Ясно, что $f(y) = \min_{x \in \Omega} f(x)$.

2) Достаточность. Пусть существует $f \in \mathcal{U}_p^y$, такой, что выполнено (12). Тогда для $x \in \Omega$

$$p(y) = f(y) \leq f(x) \leq p(x),$$

что и требовалось доказать.

Литература

1. А.Г.Пинскер. Пространство выпуклых множеств локально выпуклого пространства. В сборнике "Некоторые классы полуупорядоченных пространств". Ленинград, 1966. стр. 13-17.
2. Б.З.Вулих. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. Физматгиз, 1961.
3. А.Я.Дубовицкий, А.А.Милютин. Задачи на экстремум при наличии ограничений. Журнал вычислительной математики и математической физики, 1965, том 5 № 3. стр. 395-453.

Рукопись поступила в редакцию 20 октября 1966 г.