ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ
Сборник трудов
1967 г. Института математики СО АН СССР Выпуск 9

Э.О. РАПОПОРТ

О НЕКОТОРЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

В настоящей заметке рассматривается процесс, удовлетворяющий системе уравнений:

$$\dot{x} = A(t)x(t) + \xi(t) + u(t), \quad x(0) = 0, \qquad (*)$$

где $A(t)$ - случайная матричная функция $(n \times n)$, $\xi(t)$ -случайная n - мерная вектор-функция, $u(t)$ - управление, заданное в области $a_i(t) \leq u_i(t) \leq b_i(t)$, $a_i(t)$ и $b_i(t)$ - детерминированные функции.

Требуется выбрать управление $u(t)$ так, чтобы достигал минимума функционал

$$Jx = E \int_0^T (c(t), x(t))\,dt,$$

где $c(t)$ - случайная вектор-функция.

Предполагается, что все случайные векторы имеют ограниченные вторые моменты.

В дальнейшем мы будем иногда говорить о выборе оптимальной траектории $x(t)$, понимая под этим выбор управления, определяющего оптимальную траекторию.

Выбор управления может осуществляться тремя способами:
а) управление $u(t)$ - случайная функция,
б) управление $u(t)$ выбирается априори, независимо от конкретных реализаций случайных функций, входящих в (*),

в) в каждый момент времени выбирается управление, учитывающее предысторию процесса.

Рассмотрим гильбертово пространство H случайных дифференцируемых вектор-функций ξ, имеющих ограниченные вторые моменты со скалярным произведением

$$\langle \xi', \xi^2 \rangle = E \int_0^T (\xi', \xi^2)\, dt,$$

и положительный конус Q в этом пространстве

$$Q = \{\eta : P(\eta < 0) = 0\}.$$

Исходную задачу можно переписать в следующем виде.

<u>Задача I.</u> Найти $x \in H$, минимизирующий $Jx = \langle c, x \rangle$ при условиях:

$$Q \leqslant \dot{x} - (Ax + \xi) \leqslant b,$$
$$x(0) = 0.$$

Одновременно с задачей I будет рассмотрена

<u>Задача 2.</u> Найти $z(t) \in Q$, $v(t) \in Q$, максимизирующие

$$\mathcal{L}(z,v) = E \int_0^1 [(a+\xi, z) - (b+\xi, v)]\, dt$$

при условиях:

$$\dot{z} - \dot{v} + A^*(z - v) = -c,$$
$$z(T) = v(T).$$

<u>ТЕОРЕМА I.</u> Для того, чтобы случайный вектор $\bar{x}$ являлся решением задачи I, необходимо и достаточно существование случайных положительных векторов $\bar{z}, \bar{v}$, удовлетворяющих условиям задачи 2 и таких, что

$$J(\bar{x}) = \mathcal{L}(\bar{z}, \bar{v}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых x, z, v имеем

$$Jx = \langle c, x \rangle = \langle -\dot{z} + \dot{v} - A^*(z - v), x \rangle = \left\langle \begin{matrix} z \\ v \end{matrix}, \begin{matrix} \dot{x} - Ax \\ -\dot{x} + Ax \end{matrix} \right\rangle \geqslant$$
$$\geqslant E \int_0^T [(a+\xi, z) - (b+\xi, v)]\, dt = \mathcal{L}(z, v).$$

Неравенство $Jx \geqslant \mathcal{L}(z, v)$ справедливо для всех z, v, в частности, для $\bar{z}, \bar{v}$, при которых функционал $\mathcal{L}(z, v)$

достигает максимума.

Отсюда $Jx \geqslant J\bar{x} = \mathcal{L}(\bar{z}, \bar{v})$, т.е. $\bar{x}$ - решение задачи I. Таким образом, достаточность условий доказана.

Для доказательства необходимости потребуется несколько вспомогательных утверждений.

Обозначим $w = z - v$. Относительно w имеем дифференциальное уравнение

$$\dot{w} + A^* w = -c, \qquad w(T) = 0.$$

Пусть w^0 есть решение этого уравнения.

ЛЕММА I. Решением задачи 2 являются векторы: $z_i^0(t) = \max(0, w_i^0(t))$,

$$v_i^0(t) = \max(0, -w_i^0(t)).$$

Действительно,

$$\mathcal{L}(z,v) = \langle a+\xi, z\rangle - \langle b+\xi, v\rangle = \langle a+\xi, w\rangle - \langle b-a, v\rangle.$$

Заметим, что $b - a \in Q$.

Пусть $P(w_i^0(t) \geqslant 0) = p_i(t)$.

Тогда $P(w_i^0(t) < 0) = 1 - p_i(t)$;

$$\mathcal{L}(z,v) = \langle a+\xi, w^0\rangle - E\int_0^T (b-a, v)\,dt =$$

$$= \langle a+\xi, w^0\rangle - \sum_{k\neq i} E\int_0^T (b-a)_k v_k\,dt - E\int_0^T (b-a)_i v_i\,dt.$$

Последнее слагаемое $E\int_0^T (b-a)_i v_i\,dt$ максимально, если $v_i = \max(0, -w_i^0)$. Но т.к. $w_i^0 = z_i^0 - v_i^0$, то $z_i^0 = \max(0, w_i^0)$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь вектор $\tilde{x}$, являющийся решением следующего уравнения:

$$\dot{\tilde{x}} - A\tilde{x} - \xi = u,$$

где

$$P(u_i = a_i) = p_i(t),$$

$$P(u_i = b_i) = 1 - p_i(t).$$

Ясно, что $\tilde{x}$ удовлетворяет условиям задачи I.

ЛЕММА 2. $J\tilde{x} = \mathcal{L}(z^0, v^0)$.

Действительно, для $\tilde{x}$ имеем

$$P((\dot{\tilde{x}} - A\tilde{x} - \xi)_i = a_i) = P(z_i^o > 0). \qquad (**)$$

При доказательстве достаточности в теореме I мы имели неравенство

$$\mathcal{J}\tilde{x} = \left\langle \begin{pmatrix} z_i^o \\ v_i^o \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}} - A\tilde{x} \\ -\dot{\tilde{x}} + A\tilde{x} \end{pmatrix} \right\rangle \geq \langle a+\xi, z^o \rangle - \langle b+\xi, v^o \rangle = \mathcal{L}(z^o, v^o).$$

Но при условиях (**) в этом неравенстве достигается строгое равенство, откуда и следует утверждение леммы.

Теперь легко завершить доказательство теоремы. Так как для произвольного x $\mathcal{J}x \geq \mathcal{J}\tilde{x} = \mathcal{L}(z^o, v^o)$, то $\tilde{x}$ является оптимальным и для него существует z^o, v^o. Необходимость условий также доказана.

СЛЕДСТВИЕ I. Управление $u(t)$ исходной задачи не зависит от случайного вектора $\xi(t)$.

ЛЕММА 3. Пусть $A(t)$ и $c(t)$ - детерминированные функции. Тогда функционал $\mathcal{J}x$ зависит только от Eu.

Действительно, из (I) имеем

$$\dot{y} = Ay + E\xi(t) + Eu(t),$$

где $y = Ex$ и $\mathcal{J}x = E\int_0^T (c,x)\,dt = \int_0^T (c,y)\,dt =$

$$= \mathcal{J}y.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. В условиях леммы 3 случайное управление $u(t)$ можно заменять его математическим ожиданием.

В дальнейшем мы будем предполагать, что $\xi(t) \equiv 0$.

Пусть теперь управление выбирается как детерминированная функция времени.

ЛЕММА 4. Управление связано с решением уравнения $\dot{w} + A^* w = -c$ соотношением

$$u(t) = \begin{cases} a(t), & \text{если } Ew(t) > 0, \\ b(t), & \text{если } Ew(t) < 0. \end{cases}$$

Действительно,

$$\mathcal{J}x = E\int_0^T (u(t), w(t))\,dt =$$

$$= \int_0^T (u(t), E w(t))\, dt,$$

откуда и следует утверждение леммы.

Пусть

$$\hat{A}_t(\tau) = E\,(A\,(t+\tau)/A\,(S)),$$

$$\hat{c}_t(\tau) = E\,(c\,(t+\tau)/c\,(S)), \quad s \in [0,t].$$

Тогда в момент t ,воспользовавшись леммой 4, получим следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Оптимальным детерминированным управлением в момент t для стохастической задачи I, учитывающим предысторию процесса, будет управление, являющееся оптимальным для задачи

$$\frac{dz}{d\tau} = \hat{A}_t(\tau)\, z(\tau) + u(\tau), \quad z(0) = x(t),$$

$$\min \int_0^{T-t} (\hat{c}_t(\tau), z(\tau))\, d\tau.$$

Пусть $c(t)$ и $A(t)$ - стационарные гауссовские случайные процессы. Тогда $\hat{c}_t(\tau)$ и $\hat{A}_t(\tau)$ совпадают с экстраполяционными значениями процессов $c(\tau)$ и $A(\tau)$ по значениям на промежутке $[0,t]$. (Формулы для нахождения соответствующих коэффициентов экстраполяции предложены М.Г.Крейном в[1]). Поэтому в формулировке теоремы 2 условные математические ожидания в этом случае можно заменять на экстраполяционные значения.

В рассмотренном выше случае размерность вектора управления совпадает с размерностью случайного процесса.Используя методы, предложенные в [2], эти результаты можно обобщить на следующую задачу.

<u>Задача I^0.</u> Найти случайный процесс $x(t)$, минимизирующий функционал

$$Jx = E \int_0^T (c(t), x(t))\, dt$$

при условиях :

$$B(t)\,\dot{x}(t) - A(t)\,x(t) = u, \quad x(0) = 0,$$

$$a_i(t) \leq u_i \leq b_i(t),$$

где $B(t)$ и $A(t)$ - прямоугольные случайные матрицы .

В теории автоматического управления большой интерес представляют линейные задачи, в которых требуется минимизировать квадратичный функционал

$$\mathcal{J}x = E\int_0^T (x, Cx)\,dt.$$

<u>Задача 3.</u> Найти $x(t)$,минимизирующий

$$\mathcal{J}x = E\int_0^T (x, Cx)\,dt = \langle x, Cx\rangle$$

при условиях :

$$\dot{x} = A(t)x(t) + \xi(t) + u(t), \qquad (\text{жжж})$$

$$a(t) \leqslant u \leqslant b(t),\ x(o) = 0$$

(предполагается, что $C(t)$ - симметричная детерминированная и положительно определенная матрица; $A(t)$ -детерминированная матрица).

Предположим, что $\bar{x}$ -решение задачи 3. (жжж)

Тогда для любого h такого,что $\bar{x} + \varepsilon h$ удовлетворяет (жж):

$$\mathcal{J}(\bar{x}+h) = \langle \bar{x}, C\bar{x}\rangle + 2\varepsilon\langle h, C\bar{x}\rangle + \varepsilon^2\langle h, Ch\rangle.$$

Рассмотрим линейную задачу. Найти h из условий:

$$\dot{h} = A(t)\,h(t) + \eta(t) + u, \qquad h(o) = o,$$

$$a(t) \leqslant u \leqslant b(t),$$

минимизирующих $\mathcal{J}_{\bar{x}}(h) = \langle h, Cx\rangle$, где

$$\eta(t) = \xi(t) - \dot{\bar{x}}(t) + A(t)\,\bar{x}(t).$$

Так как $\bar{x}$ - решение задачи 3, то оптимальное $\bar{h}$ удовлетворяет соотношению

$$\langle h, C\bar{x}\rangle = 0.$$

Двойственная к нашей линейной задаче имеет вид: Найти $v \geqslant 0, z \geqslant 0$ из условий

$$(z-v)' + A^*(t)(z-v) = C\bar{x}, \qquad z(T) = v(T),$$

максимизирующих функционал

$$\mathcal{L}(z,v) = \langle \eta + a, z\rangle - \langle b + \eta, v\rangle.$$

Из теоремы I следует, что

$$\mathcal{L}(z,v) = \mathcal{J}_{\bar{x}}(h) = 0$$

и справедлива

ТЕОРЕМА 3. Для того, чтобы $\bar{x}$ было решением задачи 3, необходимо и достаточно существование $\bar{z} \geqslant 0, \bar{v} \geqslant 0$ таких, что

$$\langle \eta, \bar{z} - \bar{v} \rangle + \langle a, \bar{z} \rangle - \langle b, v \rangle = 0.$$

Литература

1. М.Г.Крейн. Об одной аппроксимационной задаче теории экстраполяции и фильтрации стационарных случайных процессов.- ДАН, (1954), 94, 13-16.

2. Э.О.Рапопорт. О некоторых задачах бесконечномерного программирования.- Данный сборник, стр.57-68.

Рукопись поступила в редакцию 10 декабря 1966 г.