ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ
Сборник трудов
1967 г. Института математики СО АН СССР Выпуск 9

Э.О. РАПОПОРТ

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ БЕСКОНЕЧНОМЕРНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В работе исследуются вопросы существования решения некоторых экстремальных задач следующего вида:

Найти $x \in \Phi$ такой, что $x \in P, Ax - b \in R$ и функционал (a, x) принимает наименьшее значение, где Φ, Ψ – локально выпуклые топологические векторные пространства, A – оператор из Φ в Ψ, P и R – выпуклые замкнутые конусы соответственно в Φ и Ψ, $a \in \Phi^*$, $b \in \Psi$.

Задачи такого типа изучались многими авторами в предположении телесности конусов P и R (см., напр., [1], [2], [3]). В этой работе телесность P и R не предполагается.

Пусть Φ_1 и Φ_2 – пополнения некоторого пространства Φ по согласованным*) нормам $\|\varphi\|_1$ и $\|\varphi\|_2$, соответственно, причем $\Phi_1 \subset \Phi_2$, $\|\varphi\|_1 \geq \|\varphi\|_2$, и из ограниченности множества в Φ_1 следует его предкомпактность в Φ_2.

Рассмотрим в Φ_1 конусы P_1 и R_1. Обозначим через P_2 и R_2 замыкания по норме $\|\varphi\|_2$ конусов P_1 и R_1, соответственно. Заметим, что замыкание конуса P_1 (R_1) по норме $\|\varphi\|_1$ содержится в конусе P_2 (R_2).

*) Две нормы называются согласованными, если всякая последовательность φ_n, фундаментальная по обеим нормам и по одной из них сходящаяся к нулю, сходится к нулю также и по второй норме.

Пусть P^* и R^* – поляра конуса P_1 (R_1), то есть совокупность P^* (z^*) линейных непрерывных функционалов из Φ_1^* таких, что $(P_1^*\ P) \geq 0$ для $P \in P_1$ (аналогично $(z_1^* z) \geq 0$ для $z \in R_1$).

Потребуем выполнения следующего условия:

(ж) $P^* \cap R^*$ – воспроизводящий конус.

ЛЕММА I. Если конусы P_1 и R_1 удовлетворяют условию (ж), то замыкание конуса $P_1 + R_1$ по норме $\|\varphi\|_1$ содержится в конусе $P_2 + R_2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t \in \overline{P_1 + R_1}$. Рассмотрим функционал $f \in P^* \cap R^*$ и множество U

$$U : \{\varphi \in \Phi_1 : (f, \varphi) \geq -1\}.$$

Пусть $\mathcal{U}$ – семейство окрестностей нуля, содержащихся в U. Для каждого $V \in \mathcal{U}$ положим

$$K_V = P_1 \cap (t - (R_1 + V)).$$

Покажем, что множество K_V ограниченное. Для любого $h \in R_1 + V$ имеем

$$(f, h) \geq -1.$$

Действительно, так как $f \in P^* \cap R^*$, то для $z \in R_1$ выполняется неравенство $(f, z) \geq 0$ и $(f, v) \geq -1$ для $v \in V$. Следовательно,

$$(f, h) = (f, z + v) \geq -1.$$

Пусть теперь $p \in K_V$. Тогда p можно представить в виде $t - h$, где $h \in R_1 + V$. Поэтому

$$(f, p) = (f, t) - (f, h) \leq (f, t) + 1.$$

Заметим, что $(f, P) \geq 0$, так как $p \in P_1$. Отсюда

$$0 \leq (f, P) \leq (f, t) + 1.$$

Мы получили, что произвольный функционал из конуса $P^* \cap R^*$ ограничен на K_V. Конус $P^* \cap R^*$ воспроизводящий, следовательно, любой непрерывный линейный функционал g представим в виде $g = f_1 - f_2$, где $f_1, f_2 \in P^* \cap R^*$, а это влечет ограниченность функционала g на множестве K_V. Таким образом,все линейные непрерывные функционалы на множестве K_V ограничены, а это влечет ограниченность множества K_V ([4] , стр. 370).

Так как $t \in \overline{P_1 + R_1}$, то $(t-V) \cap (P_1 + R_1) \neq \varnothing$. Поэтому множество K_V не пустое.

Рассмотрим последовательность окрестностей $V_1 \supset V_2 \supset \ldots$, стягивающуюся к нулю. Очевидно, что $K_{V_1} \supset K_{V_2} \supset \ldots$,причем множества K_{V_i} не пустые.Возьмем $P_i \in K_{V_i}$. Последовательность $\{P_i\}$ ограниченная, следовательно, она предкомпактна по норме $\|\varphi\|_2$, и существует P такое, что

$$\|P_{i_s} - P\|_2 \to 0 \qquad \text{при} \qquad i_s \to \infty,$$

причем $P \in P_2$. Но

$$P_{i_s} = t - h_i = t - z_{i_s} + v_{i_s}.$$

Так как $v_{i_s} \to 0$, то последовательность z_{i_s} также ограничена и существует z такое, что $\|z_{i_s} - z\|_2 \to 0$, причем $z \in R_2$. Очевидно, что $p + z = t$. Тем самым лемма доказана.*)

СЛЕДСТВИЕ I. Если Φ_1 - рефлексивное пространство, а P_1 и R_1 - выпуклые замкнутые конусы, то $P_1 + R_1$ - замкнутый конус.

Действительно, рассматривая ограниченное K_V, заметим, что оно слабо компактно вследствие рефлексивности Φ_1. Поэтому последовательность $\{p_i\}$ слабо компактна и слабо сходится к некоторому P. Аналогично последовательность $\{z_i\}$ слабо сходится к z, и $p_i + z_i$ слабо сходится к t. Следовательно, конус $P_2 + R_2$ слабо замкнут. Поэтому он замкнут.

Помимо пространства Φ, рассмотрим банахово пространство Ψ, в котором заданы два выпуклых замкнутых конуса K и S такие, что $K + S$ - замкнутый конус.

Рассмотрим прямые произведения пространств $\Phi_1 \times \Psi$ и $\Phi_2 \times \Psi$ и конусы в них $P_1 \times K$, $R_1 \times S$, $P_2 \times K$, $R_2 \times S$. Из леммы I вытекает очевидное

СЛЕДСТВИЕ 2. Если конусы P_1 и R_1, удовлетворяют условию (ж), то замыкание конуса $(P_1 \times K) + (R_1 \times S)$ содержится в конусе $(P_2 \times K) + (R_2 \times S)$.

*)Заметим, что лемма остается верной, даже если P_1 и R_1 не конусы,но условие (ж)выполнено.При этом под P^* следует понимать совокупность линейных непрерывных функционалов P^* из Φ_1^* таких,что $(P^*, P) \geq -1$ для $p \in P_1$. Если P_1 -конус, это определение эквивалентно приведенному выше.

Помимо Φ_1 и Φ_2, введем аналогичные пространства Ψ_1 и Ψ_2, являющиеся пополнением некоторого пространства Ψ по согласованным нормам $\|\psi\|_1$ и $\|\psi\|_2$, $\|\psi\|_1 \geq \|\psi\|_2$, $\Psi_1 \subset \Psi_2$.

Пусть K_2 – выпуклый замкнутый конус в пространстве Ψ_2 и $K_1 = K_2 \cap \Psi_1$.

Рассмотрим непрерывный линейный оператор F^* из Φ_1^* в Ψ_1^* такой, что

1) $F^*(\Phi_2^*) \subset \Psi_2^*$;

2) $F^*(P^*) \cap K^*$ –воспроизводящий конус,

где K^* – поляра конуса K_1.

Будем предполагать, что F^* – оператор, который сопряжен к некоторому оператору F из Ψ_1 в Φ_1.

ЛЕММА 2. Замыкание конуса $F(K_1)$ содержится в конусе $F(K_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $t \in F(K_1)$. Возьмем любое $f \in F^*(P^*) \cap K^*$ и рассмотрим p^* такое, что $f = F^*(p^*)$. Положим $S_V = \{k \in K_1;\ F^*(k) - t \in V\}$, где V – окрестность нуля такая, что $(p_1^* V) = 1$ для любого $v \in V$. Пусть $k \in S_V$. Тогда $0 \leq (f, k)$, так как $f \in K^*$, и найдется такое $v \in V$, что $F(k) - t = V$ или $F(k) = t + V$. Следовательно, $(p_1^* F(k)) = (F^*(p^*), k) = (p_1^* t) + (p_1^* V) \leq (p_1^* t) + 1$. Но $F^*(p^*) = f$, поэтому имеем оценку

$$0 \leq (f, K) \leq (p_1^* t) + 1.$$

Таким образом, на S_V ограничены линейные непрерывные функционалы из воспроизводящего конуса $F^*(P^*) \cap K^*$. Поэтому на S_V ограничены все линейные непрерывные функционалы, и S_V – ограниченное множество. Выберем последовательность $V_1 \supset V_2 \supset \ldots$, стягивающуюся к нулю. Тогда $S_{V_1} \supset S_{V_2} \supset \ldots$.

S_V не пусто, так как t принадлежит замыканию $F^*(K_1)$. Возьмем $k_i \in S_{V_i}$. Последовательность $\{k_i\}$ ограниченная, следовательно она предкомпактна, и можно выбрать подпоследовательность i_s такую, что $\|k_{i_s} - k\|_2 \longrightarrow 0$, где $k \in K_2$.

Но $F^*(k_{i_s}) = t - V_{i_s}$, причем последовательность $V_{i_s} \longrightarrow 0$. Следовательно, $F^*(k) = t$, и лемма доказана.

Пусть Φ – счетно-нормированное пространство с согласованными упорядоченными нормами $\|\varphi\|_1 \leq \|\varphi\|_2 \leq \ldots \leq \|\varphi\|_k \leq \ldots$

$$\Phi = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Phi_k$$

Потребуем выполнения следующего условия:

(жж) Из каждого множества $A \subset \Phi$, ограниченного по норме ρ_{j+1}, можно выбрать последовательность, фундаментальную по норме ρ_j.

Как известно ([5], стр. 74), это условие достаточное для того, чтобы пространство Φ было совершенным.

Пространство Φ^*, сопряженное к Φ, представимо в виде счетного объединения нормированных пространств Φ_k^*, где Φ_k^* – пространство, сопряженное к Φ_k, а нормы связаны соотношениями:

$$\|u\|_k \geq \|u\|_{k+1} \geq \ldots; \Phi^* = \bigcup_{k=1}^{\infty} \Phi_k^* .$$

В пространстве Φ^* рассмотрим замкнутые выпуклые конусы P и R и конусы $P_k = P \cap \Phi_k^*$ и $R_k = R \cap \Phi_k^*$. Будем предполагать, что P_k и R_k удовлетворяют условию(ж).

Вследствие условия (жж) ограниченные множества в пространстве Φ_k^* компактны в пространстве Φ_{k+1}^* ([5],стр.78), и по лемме I. $\overline{P_k + R_k} \subset P_{k+1} + R_{k+1}$. Рассмотрим конус $P+R$. Пусть $t \in \overline{P+R}$. Это означает,что существует k такое, что $t \in \Phi_k^*$, $P_n \in P_k^*$, $z_n \in R_k^*$ и $P_n + z_n \to t$ по k-ой норме. Таким образом, $t \in P_{k+1} + R_{k+1} \subset P+R$, и доказано следующее утверждение.

ЛЕММА 3. $P+R$ – замкнутый конус.

Отметим, что этот факт вытекает и из следствия I в силу рефлексивности Φ.

Покажем, что условие (ж) существенно для того, чтобы конус $P+R$ был замкнут.

Пусть $\Phi = \Phi_k = R_3$. P – конус в R_3, определяемый следующим образом: $(x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ xy \geq z^2)$.

Пусть R такой конус: $y=0, z=0, x \leq 0$. Для конусов P и R условие (ж) нарушено. Конус $P+R$ не замкнут,так как ось $x=0, y=0$ принадлежит замыканию $P+R$, но не принадлежит $P+R$.

Полученные результаты позволяют исследовать вопросы существования решений в некоторых экстремальных задачах.

Рассмотрим счетно-нормированные пространства $\Phi = \cap \Phi_i$ и $\Psi = \cap \Psi_i$, удовлетворяющие условию (жж).

Пусть имеются последовательности замкнутых выпуклых конусов:

$$K_1 \supset K_2 \supset \cdots ; \qquad K_i \subset \Phi_i ; \qquad K_i = K_{i-1} \cap \Phi_i ;$$

$$R_1 \supset R_2 \supset \cdots ; \qquad R_i \subset \Phi_i ; \qquad R_i = R_{i-1} \cap \Psi_i .$$

Через K_i^* (соответственно R_i^*) будем обозначать поляры конусов K_i^* (соответственно R_i).

Пусть для фиксированных i и j F - линейный непрерывный оператор из Φ_i^* в Ψ_j^* такой, что

I) если $x \in \Phi_{i-1}$, то $Fx \in \Psi_{j-1}^*$;

2) $F(K_i^*) \cap R_j^*$ - воспроизводящий конус(...).

Пусть $b \in \Psi_j^*$, $a \in \Phi_i$

ЗАДАЧА I. Найти $x \in \Phi_i$ такой, что

$$x \in K_i^*, \quad Fx - b \in R_j^* \tag{I}$$

и функционал $Jx = (a,x)$ достигает минимума.

Одновременно с задачей I рассмотрим следующую задачу.

ЗАДАЧА 2. Найти $y \in \Psi_{j-1}$ такой, что

$$y \in R_{j-1}, \quad a - F^* y \in K_{i-1} \tag{2}$$

и функционал $\mathscr{L}y = (b,y)$ достигает максимума.

Вектор x (соответственно y), удовлетворяющий условиям (I) (условиям(2)), будем называть допустимым для задачи I (задачи 2).

ТЕОРЕМА I. Для того, чтобы $\bar{x}$ был решением задачи I, необходимо и достаточно, чтобы существовал $\bar{y}$, допустимый для задачи 2 и такой, что

$$J\bar{x} = \mathscr{L}\bar{y}.$$

НЕОБХОДИМОСТЬ. Пусть $\bar{x}$ - решение задачи I. Обозначим $M = J\bar{x} = (a,\bar{x})$. Тогда для любого допустимого x $(a,x) \geq (a,\bar{x})$. Пусть $x_0 \in K_i^*$; $Fx_0 \in R_j^*$. Покажем, что $(a,x_0) \geq 0$. Действительно, возьмем допустимый x_1 и положим $x_n = x_1 + n x_0$. Очевидно, что x_n - допустимый. Но тогда $(a,x_n) \geq M$ или $n(a,x_0) \geq M - (a,x_1)$. Это неравенство показывает, что (a,x_0) неотрицательно.

Рассмотрим $\Phi_i^1 = \Phi_i^* \times J$ (J - числовая ось).

Далее, из того, что $x \in K_i^*$ $Fx - bs \in R_j^*$ $s \geq 0$ следует, что

$$(a,x) \geq MS. \qquad (3)$$

Рассматривая сопряженные конусы, получим:

$x \in K_i^*$ эквивалентно $(p, x) \geq 0, \quad p \in K_i;$

$Fx - BS \in R_j^*$ эквивалентно $(Fx - BS, y) \geq 0, \quad y \in R_j;$

$S \geq 0$ эквивалентно $St \geq 0, \quad t \geq 0.$

Тогда (3) можно записывать в виде:

$$(Fx - BS, y) \geq 0, \quad (p, x) \geq 0, \quad St \geq 0, \ y \in R_j, \ p \in K_i, \ t \geq 0$$

влечет $(a,x) - MS \geq 0$ или

$$(F^* y + p, x) + [t - (B, y)] S \geq 0, \qquad y \in R_j, \ p \in K_i, \ t \geq 0$$

влечет $(a, x) - MS \geq 0.$

Выпуклый конус $T_j = (F^* y + p, t - (B, y))$ $(y \in R_j,$ $p \in K_i, \ t \geq 0)$ является суммой двух замкнутых выпуклых конусов. По лемме I его замыкание принадлежит конусу T_{j-1}. Таким образом, точка $(a, -M) \in T_{j-1}$. Значит, существуют $\bar{p} \in K_{i-1}, \bar{y} \in R_{j-1}, \ t \geq 0$ такие, что $F^* \bar{y} + \bar{p} = a, \bar{t} - (B, \bar{y}) = -M$ или $a - F^* \bar{y} \in K_{i-1}, \qquad (B, \bar{y}) \geq M.$

Легко показать, что для всех допустимых y $(B, y) \leq M$. Поэтому $(B, \bar{y}) = M = (a, \bar{x}).$

Необходимость доказана.

ДОСТАТОЧНОСТЬ. Следует из неравенства $(B, y) \leq (a, x)$ для всех допустимых x и y.

Условия (ж) и связанные с ними условия (жж), вообще говоря, довольно сильные. С помощью следствия 2 их можно несколько ослабить.

Пусть помимо ограничений (I), имеющихся в задаче I, требуется выбирать x из некоторого подпространства конечного дефекта N.

Рассмотрим соответствующую пару двойственных задач.

ЗАДАЧА 3. Найти $x \in \Phi_i^*$ такой, что

$$x \in K_i^*; \quad Fx - B \in R_i^*; \quad (C_k, x) = 0, \quad \overline{K = 1, N}$$

и функционал $Jx = (a, x)$ достигает минимума.

ЗАДАЧА 4. Найти $y \in \Psi_{j-1}$ и числа $\lambda_k, \overline{K = 1, N}$ такие, что

$$y \in R_{i-1}^*; \qquad -F^* y + \sum \lambda_k C_k + a \in K_{i-1}$$

и функционал $\mathcal{L}y=(b,y)$ достигает максимума.

Пользуясь в доказательстве теоремы I следствием 2, получим следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Для того, чтобы $\bar{x}$ было решением задачи 3 необходимо и достаточно, чтобы существовало $\bar{y}$ и λ_k, $k=\overline{1,N}$, допустимые для задачи 4 и такие, что $(a,\bar{x})=(b,\bar{y})$.

ЗАМЕЧАНИЕ I. Если оператор F есть оператор из Φ^* в Ψ^*, $a\in\Phi$, $b\in\Psi^*$, то можно рассматривать экстремальные задачи сформулированного выше типа в совершённых пространствах. При этом вследствие леммы 3 пары двойственных задач будут иметь симметричный вид, и, используя лемму 3 вместо леммы I, получим теоремы, аналогичные теореме I и теореме 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если оператор F такой, что $F(R_i^*)$ – замкнутый конус и пространства Φ_i и Ψ_i рефлексивны, то, воспользовавшись следствием I, задачи 2 и 4 можно рассматривать в пространстве Ψ_i^*, так как конус $\overset{*}{F}(R_i)+K_i$ будет замкнутым.

Рассмотрим некоторые применения этих результатов.

<u>Пример I.</u> Пусть Φ_i – пространство последовательностей $a=(a_0;a_1,a_2,\ldots)$ таких, что

$$\sum_{n=i}^{\infty}\frac{n!}{(n-i)!}\quad |a_n|<\infty$$

Очевидно, что $\Phi_0\supset\Phi_1\supset\ldots\supset\Phi_i\supset\ldots$

Пусть для $a\in\Phi_i$

$$\|a\|_i=\max_{0\le p\le i}\sum\frac{n!}{(n-p)!}|a_n|.$$

Ясно, что

$$\|a\|_i\ge\|a_{i-1}\|.$$

Покажем, что последовательность пространств Φ_i удовлетворяет условию (ж).

Пусть $A\subset\Phi_i$ и для всех $a\in A$ $\|a\|_i\le C$.

Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(n-i)!}|a_n|\le C$$

Рассмотрим $R_N a=\sum_{n=N}^{\infty}\frac{n!}{(n-i)!}|a_n|$, $N>i$.

очевидно, что $R_N a\le C$ для любых $N>i$ и $a\in A$

$$R_N a = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{n!}{(n-i+1)!}(n-i+1)\,|a_n| \geq \sum_{n=N}^{\infty} \frac{n!}{(n-i+1)!}(N-i+1)|a_n|.$$

Но $R_N a \leq C$. Поэтому

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{n!}{(n-i+1)!}|a_n| \leq \frac{C}{N-i+1}.$$

Как показано в [6] (стр.247), это обеспечивает компактность множества A по ($i-1$) - ой норме.

Пространства, сопряженные к пространствам Φ_i, тоже легко описать, а именно: Φ_i^* - пополнение пространства последовательностей $b=(b_0, b_1, b_2, \dots)$ таких, что последовательность $\left\{\frac{(n-i)!}{n!} b_n\right\}$, ограниченная по следующей норме:

$$\|b\|_i = \max\left(\sup_n \frac{(n-i)!}{n!}|b_n|, b_0, b_1, \dots, b_{i-1}\right).$$

Это сразу следует из того, что пространство, сопряженное к ℓ, есть пространство ограниченных последовательностей.

Рассмотрим аналогичные пространства Ψ_j и Ψ_j^* и конусы неотрицательных последовательностей в Φ_i и Ψ_j.

Рассмотрим непрерывный оператор F из Φ_i^* в Ψ_j^* и

$$g \in \Phi_i, \quad h \in \Psi_j^*.$$

Можно рассмотреть следующую экстремальную задачу:

Найти $a \in \Phi_i^*$ такое, что

$$a \geq 0 \qquad Fa \geq h; \\ \min(a,g)$$

и двойственную к ней:

Найти $b \in \Psi_{j-1}$ такое, что

$$b \geq 0, \quad F^* b \leq g. \\ \max(b,h)$$

Если F удовлетворяет условиям (***), то теорема I дает необходимые и достаточные условия оптимальности допустимого вектора.

Если в качестве одного из пространств Φ_i или Ψ_j взять конечномерное пространство, то этот результат дает условие существования решения для некоторых полубесконечных задач. Задачи такого типа рассмотрены в [3] .

<u>Пример 2.</u> Пусть Φ_i - пространство n - мерных вектор-функций $\varphi(t)$, определенных на [0,I] и обращающихся в 0 вне этого промежутка, таких, что каждая компонента $\varphi(t)$ имеет абсолютно непрерывные производные до ($i-1$) -ого порядка включительно,

$$\|\varphi\|_i = \max_{0\le j\le i}\Big(\int_0^1 |\varphi_k^{(j)}(t)|\,dt\Big).$$

Очевидно, $\|\varphi\|_i \le \|\varphi\|_{i+1}$.

Пусть Ψ_j - аналогичное пространство m - мерных вектор-функций.

Покажем, что пространства Φ_i, $i=0,1,2,\ldots$, удовлетворяют условию (ж).

Пусть A - ограниченное множество из Φ_i, $\|\varphi\|_i = C$ при $\varphi \in A$.

В частности, имеем $\int_0^1 |\varphi_k^{(i)}(t)|\,dt \le C$ при $k=\overline{1,n}$.

Докажем сначала, что

$$\lim_{\tau\to 0}\int_0^1 |\varphi_k^{(i-1)}(t+\tau)-\varphi_k^{(i-1)}(t)|\,dt = 0$$

равномерно по $\varphi \in A$.

Имеем

$$\int_0^1 |\varphi_k^{(i-1)}(t+\tau)-\varphi_k^{(i-1)}(t)|\,dt =$$

$$\int_0^1 \Big|\int_t^{t+\tau} \varphi_k^{(i)}(v)\,dv\Big|\,dt \le \int_0^1\int_t^{t+\tau} |\varphi_k^{(i)}(v)|\,dv\,dt =$$

$$\int_\tau^1 |\varphi_k^{(i)}(v)|\,dv \int_{v-\tau}^{v} dt = \tau\int_\tau^1 |\varphi_k^{(i)}(v)|\,dv \le \tau\int_0^1 |\varphi_k^{(i)}(v)|\,dv \le c\tau.$$

По теореме Рисса ([4] , стр. 273) множество A компактно по ($i-1$) - ой норме, т.е. последовательность пространств Φ_i удовлетворяет условию (ж). В пространствах Φ_i и Ψ_j рассмотрим конусы неотрицательных функций. Пусть $a(t)\in\Phi_i$, $b(t)\in\Psi_j$, F - линейный непрерывный оператор из Φ_i в Ψ_j, действующий следующим образом:

$$F\varphi = A(t)\varphi(t) + \int_0^1 B(t,s)\varphi(s)\,ds,$$

где элементы матриц $A(t)$ и $B(t,s)$ имеют достаточное количество непрерывных производных, и эти матрицы таковы, что оператор F удовлетворяет условию (жж).

Задаче I соответствует следующая задача:

Найти $\varphi \in \Phi_i^*$ такое, что

$$\varphi \geq 0, \quad A(t)\varphi(t) + \int_0^1 B(t,s)\varphi(s)\,ds \geq b(t)$$

и функционал $\int_0^1 \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\varphi_i(t)\,dt$ достигает минимума.

Двойственная задача имеет следующий вид.

Найти $\psi \in \Psi_{i-1}$ такое, что

$$\psi \geq 0 \quad A^T(t)\psi(t) + \int_0^1 B^T(s,t)\psi(s)\,ds \leq a(t)$$

и функционал

$$\int_0^1 \sum_{j=1}^{m} b_j(t)\,\psi_j(t)\,dt$$

достигает минимума.

Теорема I дает условия существования оптимального решения в этих задачах. Заметим, что подобные результаты при очень сильных предположениях относительно матриц $A(t)$ и $B(t,s)$ получены в [7].

Пример 3. Пусть теперь Φ_i^k - пространство n - мерных вектор-функций k переменных, обращающихся в нуль вне области G: $0 \leq t_j \leq 1$, $j=\overline{1,k}$, и имеющих суммируемые производные порядка k_i (до i -того порядка по каждой из переменных).

Для $\varphi \in \Phi_i^k$ положим

$$\|\varphi\|_i = \max_{\substack{t \in G \\ 0 \leq r \leq i \\ 1 \leq \ell \leq k \\ \sum s_i = rk}} \left(\int_G \left| \frac{\partial^{rk} \varphi_\ell(t)}{\partial t_1^{s_1} \partial t_2^{s_2} \ldots \partial t_k^{s_k}} \right| dt_1 \ldots dt_k \right),$$

где $\qquad t = (t_1, t_2, \ldots, t_k).$

Выполнение условий (**) проверяется, как и в примере 2. Аналогично описываются пространства Ψ_j^k. Пусть

$$F\varphi = A(t)\varphi(t) + \int_G B(t,s)\varphi(s)\,ds,$$

F удовлетворяет условию (***), а элементы матриц $A(t)$ $B(t,s)$ имеют необходимое количество частных производных. Будем рассматривать конусы неотрицательных функций в Φ_i^k и

ψ_j^k. Пусть $a(t) \in (\Phi_i^k)^*$, $b(t) \in \psi_j^k$.

Теорема I дает следующее следствие:

Для того, чтобы на функции $\bar\varphi \in (\Phi_i^k)^*$, удовлетворяющей условиям $\bar\varphi \geq 0$ и $F\bar\varphi \geq b$, функционал $J\varphi = \int_G (a, \varphi) dt$ $(dt = dt_1 \cdot \ldots \cdot dt_k)$ достигал минимума, необходимо и достаточно, чтобы существовала $\bar\psi \in \psi_{j-1}^k$ такая, что $\bar\psi \geq 0$,

$$F^*\bar\psi \leq a \quad \text{и} \quad \int_G (b, \psi) dt = \int_G (a, \bar\varphi) dt.$$

Литература

I. Р.Дж.Даффин. Бесконечные программы.-Линейные неравенства и смежные вопросы, ИЛ, М., 1959 г., стр. 263-276.

2. Fan Ky. A generalization of the Alaogly-Bourbaki theorem and its applications.- Math. Zeit., B 88, HI, 1965, 48-60.

3. Duffin R.J. and Karlovitz L.A., An infinite linear program with a duality gap, Manag.Sci., vol.I2, NI, 1965, I22-I34.

4. Л.В.Канторович и Г.П. Акилов. Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959 г.

5. И.М.Гельфанд и Г.Е.Шилов. Пространства основных и обобщенных функций, М., 1958.

6. Л.А.Люстерник, В.И.Соболев. Элементы функционального анализа, М., 1965.

7. Tyndall W.F. A duality theorem for a class of continuous linear programming problems.-Journ.of Ind.and Appl.Math., v I3, N3, I965, 644-666.

Рукопись поступила в редакцию I8/XI-I966г.