О П Т И М А Л Ь Н О Е   П Л А Н И Р О В А Н И Е
Сборник трудов
1967 г.   Института математики СО АН СССР   Выпуск 8

И.В. РОМАНОВСКИЙ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ДИСКРЕТНОГО ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО ПРОЦЕССА С НЕПРЕРЫВНЫМ МНОЖЕСТВОМ СОСТОЯНИЙ

В этой работе изучаются вопросы асимптотического поведения детерминированных процессов и его связи со стационарными состояниями и оптимальным стационарным управлением этими процессами и устанавливается связь результатов, полученных для дискретных моделей (детерминированных и стохастических , см. [1] ,[2]) и для непрерывных схем, возникающих в теории линейных экономических моделей роста [3-10].

В пп.^{0} 1-3 рассматриваются общие результаты об асимптотическом поведении максимального дохода при возрастании продолжительности процесса, далее (п^{0}4) следует использование этой асимптотики для так называемых магистральных теорем , в которых изучаются асимптотические свойства оптимальных траекторий, в п^{0}5 устанавливается связь этих теорем с аналогичными результатами для моделей экономического роста.

Результаты этой работы были частично опубликованы в [11].

1. Рассмотрим управляемый процесс, множество состояний которого образует замкнутое выпуклое множество S евклидова пространства E^{r}. Там, где не оговаривается противное, будем считать, что возможен переход из любого состояния в любое *). При переходе из состояния x в состояние y доход

*) Это предположение является, конечно, значительным ограничением общности. Его можно несколько ослабить, заменив предположением Р.Раднера[6] о возможности перехода из любого состояния в любое за конечное число шагов. Мы еще вернемся к этому вопросу ниже.

равен $K(x,y)$. Функцию $K(x,y)$ мы будем предполагать непрерывной по совокупности переменных. Кроме того, на S задана непрерывная функция $\varkappa(x)$ - доход от окончательного состояния.

Требуется, зная начальное состояние процесса x_0 и его продолжительность T, найти такую последовательность состояний $x_0^T, x_1^T, \ldots, x_T^T$, которая максимизировала бы суммарный доход

$$\sum_{i=1}^{T} K(x_{i-1}, x_i) + \varkappa(x_T). \tag{1}$$

Эту последовательность мы будем называть оптимальной T-шаговой траекторией.

Как обычно, положим

$$f_T(x_0) = \max_{x_1,\ldots,x_T} \sum_{i=1}^{T} k(x_{i-1}, x_i) + \varkappa(x_T). \tag{2}$$

Очевидно, что

$$f_0(x) = \varkappa(x),$$

$$f_t(x) = \max_y \left\{K(x,y) + f_{t-1}(y)\right\}, t \geq 1. \tag{3}$$

ТЕОРЕМА I. Существуют такие постоянные λ и C, что для всех $x \in S$ и $t \geq 0$

$$|f_t(x) - \lambda t| \leq C. \tag{4}$$

2. Прежде чем перейти к доказательству теоремы, рассмотрим связь этой задачи с аналогичной задачей для дискретного процесса, что поможет нам выяснить смысл постоянной λ. Естественно прежде всего попытаться приблизить непрерывное <u>множество</u> состояний дискретным.

Выберем достаточно малое $\varepsilon > 0$ и построим конечное множество S_ε элементов из S и разбиение S на подмножества $\{A_x\}_x \in S_\varepsilon$ таким образом, чтобы

a) $\bigcup\limits_{S_\varepsilon} A_x = S$;

в) $A_x \cap A_y = \Lambda$, при $x \neq y$; (5)

с) если $x' \in A_x$ и $y' \in A_y$, то

$$|K(x', y') - K(x, y)| \le \varepsilon.$$

Рассмотрим процесс с множеством состояний S_ε. Обозначим через $f_t^\varepsilon(x)$ функцию, определяемую рекуррентным соотношением

$$f_0^\varepsilon(x) = \varkappa(x),$$

$$f_t^\varepsilon(x) = \max_{y \in S_\varepsilon} \{K(x, y) + f_{t-1}^\varepsilon(y)\}.$$

Из теоремы I' работы [2] следует, что

$$f_t^\varepsilon(x) = \lambda^\varepsilon t + O(1)$$

Отсюда, учитывая, что $|f_t^\varepsilon(x') - f_t^\varepsilon(x)| \le \varepsilon$ для $x' \in A_x$, $x \in S_\varepsilon$ и, следовательно, для любого ε

$$t(\lambda^\varepsilon - \varepsilon) + O(1) \le f_t(x) \le t(\lambda^\varepsilon + \varepsilon) + O(1), \qquad (6)$$

мы получаем

$$\lambda^\varepsilon \to \lambda \text{ при } \varepsilon \to 0. \qquad (7)$$

Применить непосредственно неравенство (6) не удается, и для доказательства теоремы I нужно использовать другой подход.

Величина λ, являющаяся пределом максимальных характеристик контуров в ε-сетях, совпадает с верхней гранью характеристик конечных контуров в исходном множестве состояний. При этом контура с максимальной характеристикой может и не существовать. Положим

$$K_1(x, y) = K(x, y),$$

$$K_n(x, y) = \max_z [K_1(x, z) + K_{n-1}(z, y)] \qquad (8)$$

и

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \max_x K_n(x, x). \qquad (9)$$

Так как все $K_n(x, y)$ непрерывны, то максимум в (9), очевидно, достигается. Покажем, что

$$\lambda = \sup_n \alpha_n. \qquad (10)$$

Действительно, поскольку в любой $\mathcal{E}$ - сети существует конечный контур с максимальной характеристикой, то для любого $\mathcal{E}$ и для любой $\mathcal{E}$ - сети $S_\mathcal{E}$ найдется такое n, что $\lambda^\varepsilon \leq \alpha_n$. Следовательно, $\lambda^\varepsilon \leq \sup \alpha_n$, и ввиду (7) $\lambda \leq \sup\limits_n \alpha_n$. С другой стороны, легко построить последовательность сетей S_{ε_n}, в которых $\lambda^{\varepsilon_k} \geq \sup\limits_{n \leq k} \alpha_n$ и, следовательно, $\lambda \geq \sup\limits_n \alpha_n$, что и доказывает (10).

В [2] мы отмечали, что максимальная характеристика может быть получена в результате решения задачи линейного программирования, в которой отыскивается стационарный поток с определенными экстремальными свойствами. Аналогичная задача может быть сформулирована и в данном случае:

Найти на $S \times S$ борелевскую меру μ, удовлетворяющую условиям

$$\mu(S \times S) = 1, \tag{11}$$

$$\mu(S \times A) = \mu(A + S) \quad \text{для любого } A \tag{12}$$

и максимизирующую величину

$$E_\mu K(x, y). \tag{13}$$

Более важной для нас будет (ввиду ее связи с функциональным уравнением динамического программирования) двойственная задача, которая в данном случае запишется так:

Найти измеримую функцию $z(x)$ и число u, удовлетворяющие условию

$$z(y) \leq z(x) - k(x, y) + u \quad \text{для всех } x, y \in S \tag{14}$$

и минимизирующие u.

ТЕОРЕМА 2 (Теорема двойственности). Существует оптимальное решение задачи (11) - (13) $\bar\mu$ и оптимальное решение $\bar z$, $\bar u$ задачи (14), причем

(1) из $\bar z(y) < \bar z(x) - k(x,y) + \bar u$ для всех $(x,y) \in A$ следует $\bar\mu(A) = 0$;

(2) если A содержится в носителе

меры μ, то $\bar{z}(y)=\bar{z}(x)-k(x,y)+\bar{u}$ для

$(x,y)\in A \bmod (\mu)$;

(3) $E\bar{\mu}\, K(x,y)=\bar{u}$.

Доказательство этой теоремы вполне аналогично соответствующим рассмотрениям теории бесконечномерных транспортных задач [12], [13] с необходимыми изменениями метода потенциалов для транспортных задач в сетевой постановке (см. [2]). Вопрос о замене оптимального решения прямой задачи крайней точкой - мерой, сосредоточенной на графике некоторого сохраняющего меру преобразования для подмножества S, - остается открытым. Отметим, однако, что подобное изучение не удается пока провести и для транспортной задачи, хотя в обоих случаях можно получить более слабые утверждения о замене меры с ограниченной плотностью мерой с постоянной (в точках положительности) плотностью сколь угодно высокого уровня [14]. Некоторые дополнительные результаты могут быть получены по следующему пути:

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\bar{z}$, $\bar{u}$ - оптимальное решение двойственной задачи,

$$\bar{A}=\{(x,y)\,|\,\bar{z}(y)=\bar{z}(x)-K(x,y)+\bar{u}\},$$

$$A_x=\{x\,|\,x\times S\cap \bar{A}\neq\Lambda\},$$

T - заданное на $S'\subset A_x$ отображение, такое, что $(x,Tx)\in\bar{A}$ и $TS'=S'$. Любая инвариантная относительно T мера ν на S' порождает оптимальное решение μ задачи (11)-(13)

$$\mu(A)=\nu(\{x\,|\,(x,Tx)\in A\cap S'\}). \qquad (15)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко проверить, что так определенная мера удовлетворяет условиям (11)-(12). Оптимальность ее следует из равенства $E_{\mu}K(x,y)=\bar{u}$, которое вытекает из определения множества $\bar{A}$.

В том случае, когда среди оптимальных решений задачи (11)-(13) имеется мера, сосредоточенная в одной точке, эта точка называется оптимальным стационарным состоянием системы. Основание для этого дают теоремы п°4. Представляют интерес несколько простых частных случаев, когда удается найти оптимальное решение двойственной задачи и непосредственно проверить оптималь -

ность решения. Эти случаи оказываются полезными при изучении экономических моделей:

СЛЕДСТВИЕ I. Если функция $z(x)$ такова, что максимум функции $K(x,y)-z(x)+z(y)$ достигается на диагонали (т. е. при $(x,y)=(x_0,x_0)$), то

$$\lambda=\alpha_1 = K(x_0,x_0) \qquad (16)$$

и точка x_0 является оптимальным стационарным состоянием.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $K(x,y)$ вогнута, то $\lambda=\alpha_1=K(x_0,x_0)$. Если $K(x,y)$ строго вогнута, то точка x_0 является единственным оптимальным стационарным состоянием.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если при каком-либо n_0 найдется такая функция $z(x)$, что максимум функции $K_{n_0}(x,y)-z(x)+z(y)$ достигается при $(x,y)=(x_0,x_0)$, то

$$\lambda=\alpha_{n_0}=K_{n_0}(x_0,x_0)/n_0 . \qquad (17)$$

Если это единственная точка максимума, то точка (x_0,x_0) является единственным оптимальным стационарным состоянием.

Эти утверждения легко, конечно, проверить и непосредственно. Приведем для примера доказательство следствия 3, т.к. оба предыдущих следствия являются его частными случаями. Пусть выполняется условие следствия. Предположим, что $\lambda>\alpha_{n_0}$ (λ не может быть меньше, чем α_n). Тогда найдется такое n_1, что $\alpha_{n_1}>\alpha_{n_0}$. Так как $\alpha_{n_k}\geq\alpha_n$ при любом целом k, то, не умаляя общности, можно считать, что $n_1=kn_0$. Рассмотрим контур длины n_1, на котором достигается максимум характеристики

$$x_0, x_1, \ldots, x_{n_1}=x_0 .$$

При любом $r=0,\ldots,k-1$ мы имеем

$$K(n_0 x_{n_0\tau}, x_{n_0\tau+1})+K(x_{n_0\tau+1}, x_{n_0\tau+2})+\ldots+K(x_{n_0(\tau+1)-1}, x_{n_0(\tau+1)})\leq$$
$$\leq K_{n_0}(x_{n_0\tau}, x_{n_0(\tau+1)})\leq \alpha_{n_0}\cdot n_0+Z(x_{n_0\tau})-Z(x_{n_0(\tau+1)}).$$

Суммируя эти неравенства по τ, получаем окончательно

$$n_1 \alpha_{n_1}\leq n_0 k\alpha_{n_0},$$

что противоречит предположению. В том случае, когда $K_{n_0}(x,y)-Z(x)+Z(y)<\alpha_{n_0}$ для всех $(x,y)\neq(x_0,x_0)$, легко видеть, что сам оптимальный контур, на котором достигается максимум, должен состоять из одних и тех же состояний.

3. Вернемся теперь к доказательству теоремы I. Пусть

$$\varphi_k(x_0)=\min_{\bar{x}_1}\max_{\bar{x}_2\ldots\bar{x}_k}\Big(-\varkappa(\bar{x}_1)+\sum_{i=1}^{k}K(\bar{x}_i,\bar{x}_{i+1})\Big),$$

где $\bar{x}_{k+1}=x_0$.

ЛЕММА I. Каково бы ни было k, для всех $x\in S$ и n имеет место неравенство

$$f_n(x)\leq n\lambda+(k\lambda-\varphi_k(x)). \tag{18}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, если для каких-либо n и x мы имели бы обратное неравенство

$$K(x,x_1)+K(x_1,x_2)+\cdots+K(x_{n-1},x_n)+\varkappa(x_n)>n\lambda+k\lambda-\varphi_k(x),$$

то, очевидно, заменяя $\bar{x}_1$ в выражении для $\varphi_k(x)$ на x_n, мы получили бы

$$K(x,x_1)+K(x_1,x_2)+\cdots+K(x_{n-1},x_n)+K(x_n,\bar{x}_2)+\cdots+K(\bar{x}_k,x)>(n+k)\lambda,$$

что противоречит определению λ как предела максимальных характеристик для $\mathcal{E}$-сетей.

В частности, в качестве $\varphi_1(x)$, огрубляя оценку, можно взять $\underline{c}-\bar{\varkappa}$, где $\underline{c}=\min\limits_{S\times S}K(x,y)$, $\bar{\varkappa}=\max\limits_{S}\varkappa(x)$.

Зафиксируем какое-либо $\bar{x}\in S$ и рассмотрим последовательность функций

$$\psi_0(x)=K(x,\bar{x})-\lambda,$$

$$\psi_k(x)=\max\Big\{\psi_{k-1}(x),\ \max_y\big[K(x,y)-\lambda+\psi_{k-1}(y)\big]\Big\}$$

и последовательность функций

$$\chi_0^{(x)}=\varkappa(x),$$

$$\chi_k^{(x)}=\max\Big\{\chi_{k-1}^{(x)},\ \max\big[K(x,y)-\lambda+\chi_{k-1}(y)\big]\Big\}.$$

Положим $\Psi_k(x)=\min_{\bar{x}}\Psi_k(x),\ \chi_k=\min_x \chi_k(x)$.

ЛЕММА 2. Каковы бы ни были $k,\ell\geq 0$, для всех $x\in S$ и $n\geq k+\ell$ имеет место неравенство

$$f_n(x)\geq n\lambda+\Psi_k(x)+\chi_k. \qquad (19)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через f_n максимальный доход, получаемый за n переходов. Так как $f_{n+m}\geq f_n+f_m$, то $f_{nk}\geq kf_n$. Покажем, что $f_n\geq n\lambda$ при всех n. Действительно, пусть для какого-либо $n=n_0$ это неравенство нарушается и $\lambda'=f_{n_0}/n_0<\lambda$. Но тогда $f_{kn_0}\leq kn_0\lambda$, что противоречит $\lambda^\varepsilon\longrightarrow\lambda$.

Пусть $k_0\leq k$, $\ell_0\leq\ell$. Рассмотрим траекторию, на которой достигается $f_{n-k_0-\ell_0}$. Обозначив ее начало через x', а конец через x'', мы получим

$$f_n(x)>\Psi'_{k_0}(x,x')+f_{n-k_0-\ell_0}+f_{\ell_0}(x''),$$

где $\Psi'_{k_0}(x,x')$ - доход, получаемый при переходе за k_0- шагов из x в x'. Отсюда

$$f_n(x)\geq\max_{k_0\leq k}\left[\Psi'_{k_0}(x,x')-k_0\lambda\right]+\max_{\ell_0\leq\ell}\left[f_{\ell_0}(x'')-\ell_0\lambda\right]+n\lambda\geq$$
$$\geq n\lambda+\Psi_k(x)+\chi_k.$$

В частности, можно в качестве грубых оценок взять

$$\Psi_1(x)\geq\underline{c}-\lambda,\quad \chi_1\geq\underline{\varkappa}.$$

Объединяя полученные неравенства, мы приходим к утверждению теоремы

$$-\lambda+\underline{c}+\underline{\varkappa}\leq f_n(x)-n\lambda\leq\lambda-\underline{c}+\bar{\varkappa}. \qquad (20)$$

Постоянные в левой и правой частях (20) годятся, разумеется, и для процесса с конечным числом состояний, если в нем возможен переход из любого состояния в любое.

В том случае, когда такой переход требует нескольких шагов, нужно использовать оценки (18) и (19), выбирая достаточно большие k , ℓ .Это же относится и к случаю,когда функция $\varkappa(x)$ определена не на всем множестве S .

Если задача (11)-(13) имеет единственное оптимальное решение ,оценки, полученные в леммах 1 и 2, можно уточнить еще дальше и использовать их для нахождения следующего члена асимптотики $f_n(x)$. Мы вернемся к этому вопросу ниже.

Отметим еще полезное неравенство

$$\alpha_n \leq \lambda \leq f_n / n, \tag{21}$$

справедливое для любого n и дающее возможность сравнительно просто получить достаточно точные границы для величины λ .

4. Перейдем теперь к изучению асимптотического поведения оптимальных T - шаговых траекторий при $T \to \infty$.Здесь естественно ожидать результатов,аналогичных теореме 5 из [2]. В данном случае нельзя, конечно, гарантировать выход процесса на оптимальный контур, даже если он и существует. Более правдоподобно приближение процесса к оптимальному контуру - более тесное в середине процесса и меньшее по краям. Для того чтобы отчетливее представить себе качественную картину, ограничимся наиболее простым случаем, когда функция $k(x,y)$ строго вогнута, хотя все рассуждения дословно переносятся и на общий случай. Мы введем меру отклонения состояния процесса от оптимального стационарного состояния и покажем, что сумма отклонений на оптимальный T - шаговой траектории ограничена сверху величиной, не зависящей от T .

Итак, пусть $k(x,y)$ строго вогнута по совокупности переменных x и y . Пусть максимум функции $k(x,x)$ достигается в точке $\bar{x}$. Как уже отмечалось, эта точка и будет оптимальным стационарным состоянием процесса.

Рассмотрим пространство $E^{\tau} \times E^{\tau} \times E^{1}$ и проведем через точку $(\bar{x}, \bar{x}, k(\bar{x}, \bar{x}))$ опорную гиперплоскость $z = a_0 + a_1 x + a_2 y$ к множеству $\{z \leq k(x,y)\}$.
Очевидно, что

$$a_0 + a_1 x + a_2 y > k(x,y) \quad \text{при } (x,y) \neq (\bar{x},\bar{x}) \tag{22}$$

и

$$a_0 + a_1 \bar{x} + a_2 \bar{x} = k(\bar{x}, x). \tag{23}$$

Легко показать,что эту гиперплоскость можно выбрать так,чтобы $a_2 = -a_1$ и, следовательно, $a_0 = \lambda$.Действительно , это означает, что мы можем провести нашу опорную гиперплоскость параллельно гиперплоскости ℓ меньшей размерности:

$$\ell : x = y, \quad z = 0.$$

Нам нужно показать, что среди гиперплоскостей, проходящих через точку $(\bar{x}, \bar{x}, K(\bar{x}, \bar{x}))$ параллельно ℓ, найдется плоскость, не имеющая общих точек с поверхностью $z = K(x, y)$ при $(x, y) \neq (\bar{x}, \bar{x})$. Введем функцию

$$k(u) = \max_{x-y=u} K(x, y).$$

Очевидно,что эта функция также будет строго вогнутой.Проведем в пространстве $E^{\tau} \times E^{1}$ опорную плоскость $z = \alpha u$ к поверхности $z = k(u)$ в точке $(0, k(0))$. Нетрудно убедиться в том, что гиперплоскость $z = \lambda + \alpha(x-y)$ в пространстве $E^{\tau} \times E^{\tau} \times E^{1}$ будет удовлетворять всем нужным условиям.

В качестве меры отклонения состояния x от $\bar{x}$ мы возьмем

$$\ell(x) = \min_{y} (\alpha_0 + \alpha(x-y) - K(x, y)) \qquad (24)$$

- "зазор" между поверхностью и опорной гиперплоскостью. Очевидно, что если $\ell(x) = 0$, то $x = \bar{x}$, и из $\ell(x_n) \to 0$ при $n \to \infty$ следует $x_n \to \bar{x}$.

Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_T$ - оптимальная T- шаговая траектория. В силу неравенства (19)

$$\sum_{i=1}^{T} K(x_{i-1}, x_i) \geq T\lambda - c(x_0), \qquad (25)$$

и так как

$$\sum_{i=1}^{T} (\lambda + \alpha(x_{i-1} - x_i)) = \alpha(x_0 - x_T) + T\lambda,$$

то $$\sum_{i=0}^{T} \ell(x_i) \leq \ell(x_T) + \sum_{i=0}^{T-1} \left[\lambda + \alpha(x_i - x_{i+1}) - K(x_i, x_{i+1})\right] \leq$$

$$\leq \max_{x} \ell(x) + c(x_0) + \max_{x,y} \alpha(x-y) = K. \qquad (26)$$

Таким образом,мы доказали следующее утверждение

ТЕОРЕМА 4. Если функция $K(x, y)$ строго вогнута и $\bar{x}$ - оптимальное стационарное состояние, то суммарное отклонение состояний оптимальной T

шаговой траектории $x_0, x_1, \dots, x_T$ от $\bar{x}$, равное $\sum_{i=0}^{T} \ell(x_i)$, где функция $\ell(x)$ определена соотношением (24), ограничивается сверху постоянной k, зависящей только от функций $k(x,y)$ и $\varkappa(x)$ и от начального состояния x_0.

В общем случае в качестве меры отклонения (это будет отклонение состояния от носителя меры-оптимального решения задачи (II)-(I3)) следует взять

$$\ell(x) = \min_{y} (\lambda + Z(x) - Z(y) - k(x, y)), \qquad (27)$$

где Z - оптимальное решение задачи (I4). Для так определенной меры отклонения ℓ теорема 4 верна в приведенной формулировке, что легко видеть, дословно повторяя для этого случая доказательство.

Теорема 4 представляет собой теорему Р.Раднера [6], записанную для произвольного процесса. Раднер использует еще одно предположение, позволяющее перейти от меры отклонения ℓ к обычному расстоянию. В наших обозначениях это предположение запишется так:

$$\lambda + Z(x) - Z(y) > k(x, y) \quad \text{при} \quad (x, y) \neq (\bar{x}, \bar{x}). \quad (28)$$

Другие предположения Раднера нужны для обеспечения конечных отклонений $f_T(x)$ от $T\lambda$ в неравенстве (19). Более сильная теорема Никайдо [7] переносится на общий случай лишь при дополнительных предположениях (автоматически выполняющихся в случае неймановской модели):

I. Существует непрерывное оптимальное решение Z задачи (I4), и для него выполняется условие (28).

2. Существует такая окрестность S' точки $\bar{x}$, что возможен переход из любой точки S' в любую.

Выберем достаточно малое ε, а по нему δ таким образом, чтобы

$$a) \quad S_\varepsilon = \{x \mid |\bar{x} - x| \leq \delta\} \subset S',$$

$$б) \text{ из } \quad x, y \in S_\varepsilon \quad \text{следовало } |k(x, y) - \lambda| \leq \varepsilon,$$

$$|Z(x) - Z(\bar{x})| \leq \varepsilon, \qquad \ell(x) \leq \varepsilon.$$

Из (28) следует, что найдется такое ε_0, что при $x \notin S_\varepsilon$ мы будем иметь

$$\ell(x) \geq \varepsilon_0 . \qquad (29)$$

ЛЕММА 3. Существует такое $k_\varepsilon(x_0)$ и такое ℓ_ε, что каково бы ни было n среди первых $k_\varepsilon(x_0)$ членов оптимальной траектории $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и среди ℓ_ε её последних членов найдется хотя бы по одной точке из множества S_ε.

Это следует из (29) и доказанной в предыдущей теореме ограниченности суммарного отклонения оптимальной траектории от $\bar{x}$.

В случае равномерной ограниченности (не зависящей от начального состояния) выбор k_ε также может быть равномерным. Другим случаем равномерного выбора k_ε, как будет ясно дальше, является случай равномерной сходимости функций $\varphi_n(x)$, использовавшихся в лемме 2.

ЛЕММА 4. Каковы бы ни были $x, y \in S_\varepsilon$ и n

$$|K_n(x,y) - n\lambda| \leq 2\varepsilon$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, какова бы ни была траектория $x_1 = x,\ x_2, \ldots, x_n = y$, мы имеем

$$k(x_1, x_2) + \cdots + k(x_{n-1}, x_n) \leq (n+1)\lambda - k(y,x) \leq n\lambda + 2\varepsilon .$$

Вместе с тем, ввиду допустимости траектории $x, \bar{x}, \ldots, \bar{x}, y$, справедливо неравенство

$$k_n(x,y) \geq k(x,\bar{x}) + (n-2)\lambda + k(\bar{x},y) \geq n\lambda - 2\varepsilon$$

Используя леммы 3 и 4, мы приходим к следующей теореме.

ТЕОРЕМА 5. Каково бы ни было $\varepsilon > 0$ и начальное состояние x_0, найдутся такие $k_\varepsilon(x_0)$ и ℓ_ε, что для любого T в оптимальной T-шаговой траектории $x_0^T, x_1^T, \ldots, x_T^T$ суммарное отклонение отрезка траектории $x_{k_\varepsilon}^T, \ldots, x_{T-\ell_\varepsilon}^T$ от $\bar{x}$, равное

$\sum_{i=K_\varepsilon(x)}^{T-\ell_\varepsilon} \ell(x_i^T)$, не превзойдет ε.

Для случая, когда предполагается только вогнутость функции $k(x,y)$ и единственность максимума $k(x,x)$, можно получить еще одно утверждение, аналогичное теореме М. Моришимы [17] для неймановских моделей развития.

ТЕОРЕМА 6. Пусть $x_0^T, x_1^T, \dots, x_T^T$ - оптимальная T - шаговая траектория и

$$y^T = \sum_{i=0}^{T} x_i^T / (T+1)$$

при $T \longrightarrow \infty$, $y^T \longrightarrow \bar{x}$, где $\bar{x}$ - точка максимума функции $k(x,x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим меру $\mu^T(A)$

$$\mu^T(A) = \frac{1}{T+1} \left\{ \text{Число пар } (x_i^T, x_{i+1}^T) \text{, принадлежащих } A \right\},$$

где $x_{T+1}^T = x_0^T$. Очевидно, что μ^T удовлетворяет условиям (11),(12). Легко также видеть, что любая предельная точка последовательности μ^T также удовлетворяет условиям (11), (12) и является оптимальным решением задачи (11)-(13). Взяв математическое ожидание $\tilde{x}$ по мере $\mu(A \times S)$, мы получим ввиду вогнутости функции $K(x,y)$

$$K(\tilde{x}, \tilde{x}) \geq E_\mu K(x,y) = K(\bar{x}, \bar{x}),$$

откуда легко следует, что $\tilde{x} = \bar{x}$, какова бы ни была подпоследовательность мер μ^T. Но так как аналогичное математическое ожидание по мере μ^T равно y^T, то это и доказывает теорему.

В некоторых случаях может оказаться полезным для выяснения свойств оптимальной траектории следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 7. Пусть функция $K(x,y)$ непрерывна. Пусть множество $S \times S$ представлено в виде объединения конечного числа замкнутых множеств

$$S \times S = \bigcup_{\alpha=1}^{s} T_\alpha,$$

на каждом из которых $K(x,y)$ строго выпукла по x и по y. Пусть R -

множество внутренних точек множеств T_α. Если $x_0^T, \dots, x_T^T$ - оптимальная T-шаговая траектория, то ни при каком $i=1,\dots,T-1$ пары (x_{i-1}, x_i) и (x_i, x_{i+1}) не принадлежат одновременно множеству R.

Доказательство просто проводится от противного. Действительно, пусть $(x_{j-1}, x_j) \in R$, $(x_j, x_{j+1}) \in R$. Функция $\varphi(x) = k(x_{j-1}, x) + k(x, x_{j+1})$ строго выпукла в некоторой окрестности x_j, и, следовательно, в этой окрестности найдется точка x, для которой $\varphi(x) > \varphi(x_j)$, что противоречит предположению об оптимальности траектории.

Уточнение поведения оптимальной траектории можно использовать для получения более точной асимптотики функций $f_T(x)$. Пусть в задаче имеется единственное оптимальное стационарное состояние $\bar{x}$. Рассмотрим функции $\psi_k(x)$ и $\chi_k(x)$, введенные в лемме 2, выбрав в качестве x' состояние $\bar{x}$.

ЛЕММА 5. Каковы бы ни были $k, \ell \geq 0$, для всех $x \in S$ и $n \geq k+\ell$ имеет место неравенство

$$f_n(x) \geq \psi_k(x) + \chi_\ell(\bar{x}) + n\lambda. \tag{30}$$

Это совершенно очевидно. Достаточно рассмотреть траекторию, состоящую из пути, на котором достигается $\psi_k(x)$ (он имеет не более k шагов и кончается в $\bar{x}$), некоторого количества переходов $\bar{x} \to \bar{x}$ и пути, на котором достигается $\chi_\ell(\bar{x})$. Доход на этой траектории и будет равен правой части (30).

Функции $\psi_k(x)$ и $\chi_k(x)$ образуют неубывающие последовательности, и так как они ограничены, то сходятся к некоторым пределам $\tilde{\psi}(x)$ и $\tilde{\chi}(x)$. Мы хотим доказать, что

$$f_t(x) - t\lambda - \tilde{\psi}(x) - \tilde{\chi}(\bar{x}) \to 0 \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Предположим, что это не так. Тогда, если положить

$$a(x) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \left(f_t(x) - t\lambda\right),$$

из (30) следует, что найдется такое x, что

$$a(x) > \tilde{\psi}(x) + \tilde{\chi}(\bar{x}). \tag{31}$$

Зафиксируем $\varepsilon < \dfrac{a(k)}{4+8C}$, где C - модуль непрерывности $k(x,y)$ в окрестности $(\bar{x},\bar{x})$ и выберем достаточно большие k, ℓ, чтобы

$$|\psi_m(x)-\tilde{\psi}(x)| \leq \varepsilon, \quad |\chi_n(\bar{x})-\tilde{\chi}(\bar{x})| \leq \varepsilon$$

при $m \geq k,\ n \geq \ell$.

По теореме 5 найдутся такие $\bar{k}(x)$ и $\bar{\ell}$, что при $\bar{k}(x) \leq t \leq T-\bar{\ell}$ оптимальная T - шаговая траектория будет проходить на расстоянии не больше ε от $\bar{x}_T$. Будем считать, что $\bar{k}(x) \geq k,\ \bar{\ell} \geq \ell$. Заменим $x^T_{\bar{k}(x+1)}$ и $x^T_{T-\bar{\ell}-1}$ на $\bar{x}$. При этом доход от процесса уменьшится не более чем на $4C\varepsilon$. (Изменятся лишь слагаемые $K(x^T_{\bar{k}(x)}, x^T_{\bar{k}(x)+1})$, $K(x^T_{\bar{k}(x)+1}, x^T_{\bar{k}(x)+2})$, $k(x^T_{T-\bar{\ell}-1}, x^T_{T-\ell})$ и $K(x^T_{T-\bar{\ell}-2}, x^T_{T-\bar{\ell}-1})$ и в каждом один из аргументов не более чем на ε).Таким образом, обозначая доход на такой траектории через f', мы получим

$$f_T(x) \leq f' + 4C\varepsilon$$

и

$$f' \leq \tilde{\psi}(x)+\varepsilon+T\lambda+\tilde{\chi}(\bar{x})+\varepsilon,$$

откуда для всех достаточно больших T мы получим

$$f_T(x) \leq T\lambda + \tilde{\psi}(x) + \tilde{\chi}(\bar{x}) + \frac{a}{2},$$

что противоречит (31). Таким образом, верна следующая

ТЕОРЕМА 8. Если в задаче имеется единственное оптимальное стационарное состояние $\bar{x}$ и функция $k(x,y)$ определена в некоторой окрестности $(\bar{x},\bar{x})$, то при $T \to \infty$

$$f_T(x) - T\lambda - \tilde{\psi}(x) - \tilde{\chi}(\bar{x}) \to 0.$$

По-видимому, имеют место и утверждения относительно сходимости начала процесса к траектории, порождаемой уравнением

$$\bar{\psi}(x) = \max\left\{\bar{\psi}(x), \max_y\left[k(x,y)-\lambda+\bar{\psi}(y)\right]\right\}, \quad \bar{\psi}(\bar{x}) = 0, \qquad (32)$$

а конца процесса к траектории, порождаемой уравнением

$$\bar{\chi}(x) = \max\left\{\varkappa(x), \max_y\left[K(x,y)-\lambda+\bar{\chi}(y)\right]\right\} \qquad (33)$$

(ср. [2] , теорема 5). Здесь известную сложность представляет выбор меры отклонения.

В том случае, когда сходимость функций ψ_k к $\tilde{\psi}$ и функций χ_k к $\tilde{\chi}$ равномерна на S, число C в теореме 5 можно выбирать одним и тем же для всех $x \in S$.

5. К рассматривавшимся выше задачам относится принадлежащая Дж.фон Нейману [3] , [4] замкнутая линейная модель производства с постоянной технологией и различные её обобщения. Мы покажем, как изложенные теоремы применяются для получения асимптотических свойств моделей (известных как магистральные теоремы - " turnpike theorems " [6], [7] и др.)

Встречаются два типа стационарных моделей - модель с бесконечным увеличением производства и модель с ограничением размеров [9] , [10] . К первому типу моделей относится модель Неймана и различные ее обобщения, не меняющие её структурных свойств, но позволяющие ввести в описание больше экономических черт.

Рассмотрим экономическую систему, состояние которой x задается неотрицательным вектором $(x_1, \ldots, x_r)$, где x_i показывает, какое количество продукта G_i имеется в системе. Замкнутость системы означает, что эти продукты не потребляются и не появляются извне. Возможна только их переработка в те же продукты (в других количествах) с помощью заданных способов переработки, называемых *технологическими процессами*. Каждый такой процесс задается парой неотрицательных векторов (x, y) , где $x=(x_1, \ldots, x_2)$ - *вектор затрат*, а $y=(y_1, \ldots, y_r)$ - *вектор выпуска*.

Сделаем следующие предположения о множестве процессов Z:

A_1 . Если $(x,y) \in Z$, то из $x=0$ следует $y=0$.

A_2 . Z - замкнутый выпуклый однородный конус.

Первое из этих условий - запрещение "самозарождения" продуктов, второе - условие линейности модели. Мы пополним множество Z до $\tilde{Z}$, добавив к нему все пары неотрицательных векторов (x, y) , для которых существует такой процесс $(\hat{x}, \hat{y}) \in Z$, что $\hat{x} \geqq x$, $\hat{y} \leqq y$. Заметим, что при таком доопределении множества технологических процессов условия A_1 и A_2 по-прежнему выполняются.

В этой модели в предположении, что Z - многогранный выпуклый конус (позднее предположение многогранности было снято другими авторами), Нейман изучал максимальный темп роста и его связь со стоимостными показателями при бесконечном продолжении процесса производства.

Возможно другое использование этой модели [5], [6], связанное с конечным временем развития. Здесь задача ставится, например, так:

Задано начальное состояние системы x_0 и общее число шагов в модели T. Задана также неотрицательная однородная первой степени функция $u(x)$, оценивающая состояние процесса в последний момент времени x_T. Требуется найти такое управление системой, т.е. выбрать такой набор $x_1, x_2, \ldots, x_T$

$$(x_{i-1}, x_i) \in \tilde{Z}, \quad i=1, \ldots, T,$$

чтобы оценка окончательного состояния системы $u(x_T)$ была максимальной.

Сведем эту задачу к модели, рассматривавшейся нами ранее. Ввиду однородности системы (конуса $\tilde{Z}$ и функции u) мы можем нормировать состояния, потребовав, например, чтобы состояние системы в каждый момент времени задавалось вероятностным вектором $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_z)$, $\sum_i \xi_i = 1$ и, запоминая "масштаб" состояния, т.е. число ρ, на которое нужно умножить вектор ξ, получалось истинное состояние процесса x. Симплекс нормированных состояний обозначим через Ξ. *)

Для любых двух состояний $\xi, \eta \in \Xi$ положим

$$k(\xi, \eta) = \ln(\max\{\lambda \mid (\xi, \lambda\eta) \in \tilde{Z}\}).$$

Обозначим $\varkappa(x) = \ln u(x)$. Так как функция $u(x)$ однородная первой степени, то $\varkappa(\alpha\eta) = \varkappa(\eta) + \ln\alpha$. Если теперь обозначить через $f_T(\xi)$ логарифм максимальной оценки окончательного состояния T - шаговой траектории, начинающейся с ξ, то эта функция будет удовлетворять рекуррентному соотношению

$$f_0(\xi) = \varkappa(\xi),$$
$$f_T(\xi) = \max_{\eta}\left[k(\xi, \eta) + f_{T-1}(\eta)\right].$$

---

*) В нашей работе [11] ошибочно утверждается вогнутость функции $k(x,y)$. В.Л. Макаров и И.В. Левина обратили мое внимание на то, что это не так. Тем не менее основные результаты остаются верными при замене опорной плоскости функцией $Z(x)$ (см. ниже).

Предположим, что в модели существует(и единственно)состояние равновесия $\bar{\xi}$, вектор равновесных цен $\bar{p}$ и что технологический и экономический темпы роста равны одному и тому же числу ρ. Будем также считать, что из начального состояния процесса можно перейти (возможно,за несколько шагов) в состояние равновесия $\bar{\xi}$. Эти предположения требуют некоторого комментария.

Непрерывная модель роста оказывается чрезвычайно похожей на дискретную динамическую модель [2] в вопросах связности множеств состояний. Там для всех оптимальных контуров определялись зоны их достижимости - множества состояний,из которых можно попасть на оптимальный контур, а далее ограничивались рассмотрением только этих зон, поскольку все остальные состояния образуют подмодель, не имеющую никаких связей с этими зонами. (Этим детерминированная модель отличается от вероятностной. Сравни [18]).

В нашем случае возможен также комбинаторный подход. Рассмотрим все возможные подмножества множества продуктов и будем считать их вершинами графа связей, которые будут соединяться дугами в том и только в том случае, если из положительных количеств одного набора продуктов можно произвести положительные количества другого набора продуктов.Предположение о возможности перехода из одного состояния модели ξ в другое эквивалентно предположению о существовании пути от одной вершины графа до другой. Для полной аналогии с дискретным случаем надо еще определить характеристики контуров. Для контуров, содержащих только одно состояние, характеристика определяется как логарифм темпа роста (технологического и экономического - они должны совпадать; если это не так - модель является разложимой,- то на таких контурах характеристика не определяется. Впрочем, это не страшно, благодаря расширению Z до $\tilde{Z}$ мы можем перейти от модели к любой её подмодели). Для контуров, содержащих несколько наборов продуктов $\mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2 \to \cdots \to \mathcal{D}_s \to \mathcal{D}_1$, можно определить другую модель с набором продуктов,например $\mathcal{D}_1$ и конусом технологических процессов Z_1, определяемым следующим образом:

Пара (x, y) принадлежит Z_1, если найдутся такие $x_2, x_3, \ldots, x_s$, что x_i содержит только продукты набора $\mathcal{D}_i, (x_i, x_{i+1}) \in Z$ и $(x_s, y) \in Z$. Характеристикой контура назовем логарифм темпа роста в этой модели (с теми же оговорками, что и раньше), деленный на S .

Аналогичные рассмотрения и предположения нужно делать в случае, если функция $\varkappa$ определена не на всем множестве S . Отметим еще, что предположение Р.Раднера о строгой положительности функции $\lambda+Z(x)-Z(y)-k(x,y)$ фактически используется для того, чтобы исключить оптимальные контуры длины, большей 1.

Вернемся теперь к нашей задаче. Пусть

$$Z(x)=\ln \bar{p}x.$$

Легко видеть, что для любых $\xi,\eta\in\Xi$

$$Z(\eta)\leq Z(\xi)+\ln\rho-k(\xi,\eta). \qquad (34)$$

Действительно, для любого процесса $(x,y)\in\tilde{Z}$ мы имеем $\bar{p}y\leq\rho\bar{p}x$ и $Z(y)\leq\ln\rho+Z(x)$. Считая x нормированным и нормируя y , получаем $Z(\eta)+\ln\sum_i y_i\leq\ln\rho+Z(x)$, откуда без труда следует (34).

Используя теперь теорему 4, мы получим следующее утверждение: пусть $x_0^T, x_1^T,\ldots,x_T^T$ - оптимальная T -шаговая траектория. Обозначим через $\alpha(x)$ величину

$$\min_\eta(Z(\xi)-k(\xi,\eta)-Z(\eta)+\ln\rho),\text{ где } \quad \xi=x/\sum_i x_i.$$

Тогда

$$\sum_{i=0}^{T}\alpha(x_i^T)\leq k,$$

где k - постоянная, не зависящая от T .

Частным случаем этого утверждения является теорема Р.Раднера [6] . Теорему Х. Никайдо [7] можно получить как следствие из теоремы 5 (конечно, без сделанных Никайдо оценок, использующих специфику задачи).

В.Л. Макаров [8]предложил для дальнейшего изучения асимптотических свойств оптимальных траекторий, и в частности, возможности выхода её в устойчивое состояние за конечное число шагов, интересную идею подсчета числа используемых процессов в базисном решении соответствующей задачи линейного программирования. Используя эту идею, можно свести задачу к изучению процесса, состоящего только из технологических процессов, используемых в состоянии равновесия. В частности, если эти процессы образуют модель Леонтьева (т.е, если матрица выпуска является диагональной), то траектория выходит (в предположениях Раднера) на оптимальное стационарное состояние за конечное число шагов.*)

Второй тип моделей приводится к рассматривавшейся нами задаче еще проще. Пусть теперь Z - выпуклое замкнутое о г р а н и ч е н н о е множество и на положительном ортанте задана неотрицательная вещественная функция $u(x)$ (обычно именуемая ф у н к ц и е й п о л е з н о с т и).

В каждый момент времени t вектор продуктов x_t делится на две части: y_t и z_t ; первая используется для целей производства, вторая - для потребления. Ставится задача-максимизировать суммарную полезность потребления за T шагов при заданном начальном состоянии x_0 . Обозначим этот максимум через $f_T(x_0)$.

Вводя функцию $k(x, y)$ с помощью равенства

$$k(x,y)=max\{u(z)\mid z\geq 0,(x-z,y)\in Z\}, \qquad (35)$$

мы получим

$$f_T(x_0)=\max_y(k(x,y)+f_{T-1}(y)).$$

В случае, когда $u(z)$ - вогнутая функция, $k(x,y)$ также оказывается вогнутой в области задания. Действительно, если возможен переход из x_1 в y_1 и из x_2 в y_2 и максимум в (35) достигается соответственно на z_1 и z_2, то при любом $\lambda\in(0,1)$ мы имеем:

$$k(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,\ \lambda y_1+(1-\lambda)y_2)\geq u(\lambda z_0+(1-\lambda)z_1)\geq$$

$$\geq\lambda u(z_1)+(1-\lambda)\,u(z_2)=\lambda k(x,y)+(1-\lambda)k(x_2,y_2).$$

Если $u(z)$ строго вогнута, то $k(x,y)$ также оказывается строго вогнутой в тех точках, где можно гарантировать , что $z_1\neq z_2$.

ж) Я благодарен проф. Д.Гейлу, обратившему мое внимание на эту задачу.

6. Описанный метод изучения стационарных состояний управляемой системы не является единственным. Важны два других подхода к определению оптимального управления в случае бесконечного возрастания функций f_n из рекуррентных соотношений динамического программирования.

Первый из них связан с излагавшимся выше методом таким же образом, как метод суммирования расходящихся рядов по Абелю связан с суммированием по Чезаро. Именно, применительно к нашему случаю вместо соотношений (3) рассматриваются соотношения

$$f_0^\alpha(x) = \varkappa(x),$$

$$f_n^\alpha(x) = \max_y \left[K(x,y) + \alpha f_{n-1}^\alpha(x)\right].$$

Функции $f_n^\alpha(x)$, очевидно, сходятся к некоторому пределу, который мы обозначим через $f^\alpha(x)$. Эта предельная функция удовлетворяет уравнению

$$f^\alpha(x) = \max_y \left[k(x,y) + \alpha f^\alpha(x)\right]$$

и порождает некоторое оптимальное управление $y^\alpha(x)$, которому (если это управление выбрано подходящим образом) соответствует некоторая мера μ^α на $S\times S$, удовлетворяющая условиям (11), (12). При $\alpha \to 1$ из мер μ^α можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к некоторой мере, которая будет оптимальным решением задачи (11)- (13). Применительно к марковским процессам решения этот подход подробно изучался Д. Блекуэллом [15] и другими.

В исследовании моделей экономического развития в последнее время часто используется иной подход [8] - [10], основанный на сравнении между собой бесконечных траекторий процесса. Следуя [9], назовем **программой** последовательность $X=\{X_n\}$ (в том случае, когда это необходимо оговаривать, предполагается, что переход $X_n \to X_{n+1}$ возможен для любого n). Пусть последовательность $\Phi = \Phi(x) = \{\varphi_n\}$ определяется соотношениями

$$\varphi_0 = 0$$
$$\varphi_n = \varphi_{n-1} + k(x_{n-1}, x_n)$$

(т.е. φ_n - доход, получаемый к n -ому шагу при использовании программы X). Скажем, что программа X лучше программы X' , если,начиная с некоторого n , выполняются неравенства $\varphi_n > \varphi'_n$, где φ_n, φ'_n - n-ые члены соответственно последовательностей $\Phi(X)$ и $\Phi(X')$. Программа X называется эффективной, если не существует программы, которая лучше, чем X . В тех случаях, когда существует эффективная программа, она почти полностью (как в теореме о магистрали) проходит в окрестности оптимального стационарного состояния. С нашей точки зрения, анализ эффективности программ намного сложнее, чем прямой анализ асимптотического поведения оптимального управления.

Литература

1. Р.А.Ховард.Динамическое программирование и марковский процессы,М., "Советское радио",1964.
2. И.В.Романовский.Оптимизация стационарного управления дискретным детерминированным процессом динамического программирования. - Кибернетика, (1967), № 2, стр.71-83.
3. J. von Neumann, Uber eun okonomishes Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Eixpunktsatzes , Ergeb.Math.Kolloquiums, N8 (1937), 73-83.
4. Д.Гейл,Замкнутая линейная модель производства.- Линейные неравенства и смежные вопросы,М,ИЛ,1959, стр.382-400.
5. Л.В.Канторович. Динамическая модель оптимального планирования.- Планирование и экономико-математические методы.М.,Изд-во "Наука",1964, стр.323-345.
6. R.Radner, Paths of economic growth that are optimal with regard only to final states: A turnpike theorem . Rev. of Econ.Studies,1961, v.28, 2, p.98-104.
7. H. Nikaido, Persistence of continual growth near the von Neumann ray: A strong version of Radner turnpike theorem , Econometrica 1964,v.32,1-2 p.151-162.
8. В.Л.Макаров.Асимптотическое поведение оптимальных траекторий линейных моделей экономики. - Сиб. мат. журнал, 1966 т. 7,4, стр. 832-853.
9. T.C. Koopmans, On the concept of optimal growth, Cowles Foundation Discussion Paper, N 163.
10. D. Gale, Optimal programs for multi sector economy with an infinite time horizon,Brown University, Tech. Rep.1965, N1.

II.И.В.Романовский. Асимптотическое поведение процсссов динамического программирования с непрерывным множеством состояний, - ДАН СССР, 1964, т.159, вып.6, 1224-1227.

12.Л.В.Канторович. О перемещении масс, - ДАН СССР,1942,т.37 , 7-8, стр. 227-229.

13.Л.В.Канторович, Г.Ш.Рубинштейн. Об одном пространстве вполне аддитивных функций. - Вестник ЛГУ,1958, № 7,стр.52-59 .

14.И.В.Романовский,В.Н.Судаков. О существовании независимых разбиений. - Труды МИАН, 1965,79, стр.5-10.

15. D.Blackwell, Discrete dynamic programming, Ann. Math. Stat 1962,v.33,2,p.719-726.

16.Р.Беллман, Динамическое программирование,М.,ИЛ, 1960.

17.M.Morishima, On the two theorems of growth economics : A mathematical exercise Econometrica, 1965,v.33,4 p.829-840.

18.И.В.Романовский. Существование оптимального стационарного управления в марковском процессе решения.- Теория вероятностей и её применения, 1965, т.10,1, стр.130-133.