О П Т И М А Л Ь Н О Е   П Л А Н И Р О В А Н И Е

Сборник трудов

1967г.   Института математики СО АН СССР   Выпуск 8

В.Л.МАКАРОВ.

СОСТОЯНИЕ РАВНОВЕСНОГО СБАЛАНСИРОВАННОГО РОСТА В МОДЕЛИ НЕЙМАНА С ФУНКЦИЕЙ ПОЛЕЗНОСТИ

В работах [1] - [4] были изучены состояния равновесия замкнутой модели Неймана - Гейла. Модель Неймана - Гейла $M(Z)$ задается с помощью выпуклого замкнутого конуса Z, лежащего в неотрицательном ортанте $2n$ - мерного евклидова пространства. Точки $(x,y)\in Z$ называются производственными процессами. На конус Z могут накладываться те или иные дополнительные ограничения.

Состояние равновесия модели $M(Z)$ характеризуется процессом $(\bar{x},\bar{y})\in Z$, вектором цен $\bar{p}$, $p\geq 0, \sum_i p_i=1$, и темпом расширения $\alpha>0$, которые находятся в следующих соотношениях:

1) $\alpha\bar{x}\leq\bar{y}$,

2) $\alpha\bar{p}x\geq\bar{p}y$ для всех $(x,y)\in Z$;

3) $\bar{p}\bar{y}>0.$

Характерное свойство состояния равновесия состоит в том, что если модель находится в этом состоянии в течение какого-то времени, то количества всех продуктов, имеющихся в ненулевых количествах, увеличиваются в темпе α, а цены всех продуктов, соответственно падают в темпе α.

Модели, у которых экзогенные факторы (трудовые и природные ресурсы, конечное потребление) задаются с помощью достаточно простых функций времени, могут быть сведены к замкнутым (см. например, [5]). Поэтому в них также может быть определно состояние равновесия, характеризуемое процессом, вектором цен и темпом расширения.

В главе У своей книги [6] Моришима рассмотрел модель неймановского типа, в которой конечное потребление определялось не экзогенно, а с помощью функций спроса. Состояние равновесия этой модели характеризовалось уже процессом, вектором цен и двумя числами, α и β, $\alpha < \beta$, причем α -представляло собой темп расширения модели, а β — темп падения цен.

В настоящей заметке рассматривается модель неймановского типа, причем конечное потребление населения описывается не с помощью функций спроса, как у Моришимы, а с помощью функции полезности $u(c)$, где c -неотрицательный n - мерный вектор, показывающий количества всех продуктов, которые поступают для конечного потребления. Для этой модели определяется состояние равновесного сбалансированного роста, доказывается его существование и дается его экономическая интерпретация.

Итак, рассматриваемая модель задается с помощью уже введенного конуса производственных процессов Z, функций $W(x,y)$ и $u(c)$ и числа α. Здесь $u(c)$ -функция полезности, α -темп роста трудовых ресурсов, т.е. предполагается, что трудовые ресурсы возрастают экзогенно темпом α. Положительная функция $W(x,y)$ определена на всех процессах $(x,y)\in Z$ и показывает количество труда, затрачиваемое в процессе (x,y).

Для данной модели делаются также следующие дополнительные предположения:

I) Максимально возможный в состоянии равновесия темп расширения модели $M(Z)$ не меньше α. Это означает, что если труд не является лимитирующим фактором, то темп роста продуктов α может быть реализован.

2) $W(\lambda x, \lambda y) = \lambda W(x,y), \lambda > 0$, и $W(x,y) > 0$ для всех $(x,y)\in Z$, т.е. затраты труда необходимы во всех производственных процессах.

3) $u(c)$ -выпуклая вверх неубывающая функция, показывающая величину полезности набора продуктов c, приходящихся на душу населения.

4) В задаче: "найти $\max u(c)$ при ограничениях $y - c \geq \alpha x$, $(x,y)\in Z$, $W(x,y) = 1$" решение $u(\bar{c}) > 0$.

Данную модель также можно свести к замкнутой. Делается это следующим образом: определим конус Z', лежащий в неотрицательном ортанте $2n+2$ -мерного пространства. Конус Z' состоит из процессов вида $[(w(x,y),x,0);(w(x,y),y/\alpha-c,u(c))]$ и $[(0,\dots,0,1);(0,\dots,0,\lambda)],\lambda>1$, и их выпуклых комбинаций. Здесь проделана операция деления векторов выпуска y на α, чтобы рассматривать процессы при неизменном количестве труда. Это допустимо в силу однородности первой степени отображения

$$(w(x,y),x)\to(0,y).$$

Получившаяся замкнутая модель $M(Z')$ имеет состояние равновесия, определяемое процессом $[(0,\dots,0,1);(0,\dots,0,\lambda)]$, вектором цен $\bar{p}$ и темпом расширения λ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Состоянием равновесного сбалансированного роста модели $M(Z')$ называется процесс $(\bar{x},\bar{y})\in Z$, вектор цен $\bar{p}$, вектор конечного потребления $\bar{c}$ и числа α и β, если выполнены следующие соотношения:

1) $\alpha\bar{x}\leq\bar{y}-\bar{c}$,

2) $w(\bar{x},\bar{y})=1$,

3) $\beta\bar{p}\bar{x}=(\bar{y}-\bar{c})\bar{p}+u(\bar{c})$,

где $\bar{p}$ - вектор цен состояния равновесия модели $M(Z')$ с темпом расширения λ, $\beta=\alpha\lambda$.

ТЕОРЕМА. В принятых предположениях состояние равновесного сбалансированного роста модели $M(Z')$ существует.

Доказательство. Рассмотрим выпуклый конус

$$\bar{Z}=\Big\{[(w(x,y),x,\gamma);(w(x,y),y-c,\lambda\gamma+u(c))]:$$
$$[(w(x,y),x,\gamma);(w(x,y),y-c,\lambda\gamma+u(c))]\in Z',\ x\leq y-c\Big\}.$$

Состояние равновесия модели $M(\bar{Z})$ с темпом расширения λ определяется процессом $[(0,\dots,0,1);(0,\dots,0,\lambda)]$ и некоторым вектором цен $\tilde{p}'=(\tilde{p},1)$. Вектор $\tilde{p}\neq 0$, поскольку в противном случае для процесса $[(1,\tilde{x},0);(1,\tilde{y}-\tilde{c},u(\tilde{c}))]\in\bar{Z}$, дающего решение задачи максимизации функции $u(c)$, сформулированной в предположении 4); условие 2) определения состояния равновесия не будет выполняться. Очевидно, что любой процесс из $\bar{Z}$, для которого выполняются соотношения 2) и 3) определения состояния равновесного сбалансированного роста, и дает состояние равновесного сбалансированного роста для модели $M(\bar{Z})$. Такой процесс всегда существует в силу непустоты конуса $\bar{Z}$.

Пусть равновесные цены $\tilde{p}'$ определены однозначно. Тогда гиперплоскость с коэффициентами $(\lambda\tilde{p}', \tilde{p}')$ является опорной к конусу Z' в точке $[(1, \tilde{x}, 0); (1, \tilde{y}-\tilde{c}, u(\tilde{c})]$. Действительно, она является опорной в этой точке к конусу $\bar{Z}$. И хотя конус Z' является расширением конуса $\bar{Z}$, точка $[(1, \tilde{x}, 0); (1, \tilde{y}-\tilde{c}, u(\tilde{c}))]$ остается граничной и для Z'. В случае, когда существует целое множество векторов равновесных цен, в этом множестве по тем же соображениям всегда найдется такой вектор $\tilde{p}'$, что гиперплоскость с коэффициентами $(\lambda\tilde{p}', \tilde{p}')$ будет опорной к конусу Z' в данной точке. Таким образом, окончательно получаем, что процесс $[(1, \tilde{x}, 0); (1, \tilde{y}-\tilde{c}, u(\tilde{c}))]$ определяет состояние равновесного сбалансированного роста модели $M(Z')$.

Несколько слов об экономической интерпретации понятия состояния равновесного сбалансированного роста. Следующие далее утверждения сформулированы несколько произвольно, однако они могут быть уточнены. Если экономика находится в состоянии равновесного сбалансированного роста в течение длительного времени, то получающаяся траектория доставляет максимум функции полезности, приведенной к одному моменту времени с помощью коэффициента дисконтирования λ.

Следуя Моришиме [6], можно интерпретировать рассмотренную модель, как модель конкурентной капиталистической экономики. В этой модели рабочие (владельцы трудовых ресурсов) стремятся к максимуму функции полезности $u(c)$, а капиталисты (владельцы средств производства) стремятся к максимуму прибыли, из которой фиксированную долю они направляют в дальнейшее производство (накопление), а остальную часть расходуют на потребление, причем в процессе потребления они стремятся, как и рабочие, максимизировать функцию полезности $u(c)$. Тогда состояние равновесного сбалансированного роста определяет конкурентное равновесие. Величина коэффициента приведения λ определяется долей прибыли капиталистов, идущей на потребление. В частности, если потребление капиталистов равно нулю, то $\lambda = 1$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. Д.Гейл. Замкнутая линейная модель производства. В сб. "Линейные неравенства и смежные вопросы", М. 1959 г.

2. J.Kemeny, Morgenstern O, G.Thompson .Econometrica v. 24.N 2 (1956) 115-135.

3. Дж.Томпсон. О решении одной задачи теории игр. Сб. "Линейные неравенства и смежные вопросы" М. 1959 г.

4. В.Л.Макаров Состояние равновесия замкнутой линейной модели расширяющейся экономики. Ж."Экономика и математические методы" I № 5,(1965),736-738.

5. В.Л.Макаров. Асимптотика решений линейных динамических моделей с дискретным временем.-ДАН т.165 № 4 (1965),767-769.

6. M.Morishima. Equlibrium, stability and Growth. Oxford, Clarendon Press, 1964.