О П Т И М А Л Ь Н О Е   П Л А Н И Р О В А Н И Е

Сборник трудов

1967 г. Института математики СО АН СССР Выпуск 7

В. В. ТИТОВ

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О КОММИВОЯЖЕРЕ

Постановка данной задачи очень проста: нужно найти кратчайший маршрут, по которому коммивояжер, отправляющийся из пункта P_1, может посетить намеченные пункты $P_2,\dots,P_N$ и вернуться в исходный пункт, проезжая через каждый пункт только один раз.

Пусть расстояния между пунктами задаются матрицей $A=(a_{ij})$, $i,j=1,2,\dots,N$, где a_{ij} -расстояние между i-м и j-м пунктами, причем $a_{ii}=M$, где M -достаточно большое число или ∞. Если между какими-то пунктами нет связи, то соответствующие элементы матрицы A также приравниваем M. Будем предполагать, что существует хотя бы один маршрут через все пункты.

Обозначим через μ_k один из маршрутов, $k=1,2,\dots(N-1)!$. Тогда μ_k может быть представлен набором N упорядоченных пар индексов (i,j), образующих замкнутый контур, проходящий через каждый пункт только один раз. Зная расстояние между любой парой пунктов, можно найти длину $F(\mu_k)$ любого возможного маршрута μ_k, а именно:

$$F(\mu_k)=\sum_{(i,j)\in\mu_k} a_{ij}\,. \tag{1}$$

Нас интересует

$$F(A)=\min\{F(M_K),\ K=1,2,\dots,(N-1)!\}. \qquad (2)$$

Просмотреть все $(N-1)!$ маршрутов при большом N невозможно. В данной работе предлагается алгоритм получения одного из возможных маршрутов, которому соответствует $F(M_K)$, близкое к значению $F(A)$ либо равное ему.

Рассмотрим вычислительную схему алгоритма.

I. Заменим матрицу A матрицей Z по следующему правилу:

$$Z=(z_{ij})=(a_{ij}-a_i-a_j), \qquad (3)$$

где

$$a_i=\min_j\{a_{ij}\}, \qquad (4)$$

$$a_j=\min_i\{a_{ij}-a_i\}. \qquad (5)$$

Отсюда

$$(a_{ij})=(z_{ij}+a_i+a_j). \qquad (6)$$

Поставим в (I) значение a_{ij} из (6). Тогда

$$F(M_K)=\sum_{(i,j)\in M_K} a_{ij}=\sum_{(i,j)\in M_K}(z_{ij}+a_i+a_j)=$$

$$=\sum_{(i,j)\in M_K} z_{ij}+\sum_i a_i+\sum_j a_j, \qquad (7)$$

$$\sum_i a_i+\sum_j a_j=const. \qquad (8)$$

Следовательно, заменой матрицы A матрицей Z получаем задачу, эквивалентную исходной.

2. Матрица Z имеет в каждом столбце и каждой строке, по крайней мере, по одному нулю. Это легко следует из формул (3)-(5).

Пусть R - множество индексов (i,j), соответствующих нулевым элементам матрицы Z.

Очевидно, что нулевые элементы матрицы Z с большей вероятностью принадлежат оптимальному маршруту, чем те, для которых $(i,j)\notin R$.

Будем предполагать последовательно для всех $(i,j)\in R$, что они не входят в оптимальный маршрут $M_{опт.}$ и оценим вероятное увеличение длины маршрута.

Каждому $(i,j)\in R$ поставим в соответствие пару чисел q^i_{ij} и q^j_{ij}, где

$$q^i_{ij} = \min\{z_{i1}, z_{i2}, \ldots, z_{i,j-1}, z_{i,j+1}, \ldots, z_{iN}\},$$

$$q^j_{ij} = \min\{z_{1j}, z_{2j}, \ldots, z_{i-1,j}, z_{i+1,j}, \ldots, z_{Nj}\}.$$

Таким образом, q^i_{ij} есть минимальный элемент i-ой строки, исключая z_{ij}. Если в i-ой строке имеется более одного нулевого элемента, то $q^i_{ij}=0$. Определение q^j_{ij} аналогично q^i_{ij}. Числа q^i_{ij} и q^j_{ij} будут оценивать возможное увеличение издержек маршрута, если соответствующий нулевой элемент матрицы Z не войдет в $\mu_{опт.}$.

Поставим в соответствие каждому $(i,j)\in R$ число

$$Q'_{ij} = q^i_{ij} + q^j_{ij}, \quad (i,j)\in R. \tag{9}$$

3. Для каждого фиксированного i определим множество $R_i=\{(i,j)\in R\}$. Для каждого фиксированного j определим множество $R^j=\{(i,j)\in R\}$. Тогда каждому $(i,j)\in R$ поставим в соответствие два числа Q^i_{ij} и Q^j_{ij}, где

$$Q^i_{ij} = \max\{Q'_{i\ell}, (i,\ell)\in R_i, \ \ell\neq j\},$$

$$Q^j_{ij} = \max\{Q'_{mj}, (m,j)\in R^j, \ m\neq i\}.$$

Далее каждому $(i,j)\in R$ поставим в соответствие новое число

$$Q_{ij} = Q'_{ij} - Q^i_{ij} - Q^j_{ij}. \tag{10}$$

Если R_i (R^j) сводится к элементу (i,j), то полагаем

$$Q_{ij} = Q'_{ij}. \tag{11}$$

Смысл значения Q_{ij} аналогичен Q'_{ij}, т.е., если мы предположим, что (i,j) не войдет в оптимальный маршрут, то возможно увеличение длины маршрута на величину Q_{ij}.

4. Определим множество $R_1=\{(i,j)\in R, Q_{ij}\neq 0\}$. Теперь мы можем сказать, что элементы $(i,j)\in R_1$ с большей вероятностью принадлежат оптимальному пути, чем все другие эле-

менты матрицы Z .

5. Теперь окончательно выбираем $(m,\ell)\in R_1$ так, чтобы

$$Q^*_{m\ell} = max\{Q_{ij},\ (i,j)\in R_1\}. \qquad (12)$$

6. Далее включаем (m,ℓ) в строящийся маршрут. Если (12) справедливо для нескольких $(m,\ell)\in R_1$, то выбираем любой из них.

7. В матрице Z зачеркиваем m -ю строку и ℓ-й столбец, элемент $z_{\ell m}$ приравниваем M . На этом первый этап вычислений закончен. Переходим к пункту 8 данной вычислительной схемы. Для второго и последующих этапов-переход к пунктам 9,10.

8. Обозначим преобразованную матрицу Z через A^2. Переходим ко второму этапу вычислений, возвращаясь снова к первому пункту данной схемы.

9. Каждый этап вычислений дает нам по одному элементу маршрута. Из этих элементов составляем отдельные участки будущего маршрута, представляющие упорядоченные наборы пар индексов. Например, возьмем один из таких участков $(m,\ell)(\ell,i)$. Пусть на данном этапе мы зафиксировали $(i,j)\in R_1$. Среди имеющихся участков маршрута ищем такой, чтобы он начинался с индекса j , либо заканчивался индексом i , а затем к такому участку добавляем новую пару индексов. Если среди имеющихся цепочек маршрута не найдется такой, которой принадлежал бы один из индексов i,j , то получаем отдельное новое звено маршрута. В нашем примере получаем цепочку $(m,\ell)(\ell,i)(i,j)$. Далее проверяем, не являются ли отдельные цепочки маршрута продолжением либо началом других. Это легко проверяется по индексам, которые стоят в начале и конце цепочки. Такие цепочки нужно объединять в одну цепь маршрута.

10. Приравниваем часть элементов матрицы Z^s , где S – номер этапа вычислений, $S=2,3,\dots,(N-2)$, числу M . Индексы этих элементов соответствуют концу и началу цепочек маршрута, которые мы составили ранее. Например, имеем отдельный участок цепи $(m,\ell)(\ell,i)(i,j)$. Полагаем $z^s_{jm}=M$ для того, чтобы на следующем этапе нельзя было зафиксировать $(j,m)\in R_1$, тем самым замкнув контур, в который не входят все вершины маршрута.

Далее обозначаем преобразованную матрицу Z^s (согласно 7 в 10 пунктам схемы) через A^{s+1} и переходим к следующему этапу вычислений. Всего будет $(N-2)$ этапа. Последние две пары индексов определятся автоматически.

Рассмотрим предлагаемый выше алгоритм решения задачи с точки зрения оптимальности.

Данный алгоритм проверялся на многих задачах, для которых известно решение и исходная матрица A . Решались задачи с $N=6,10,20,25,48$. Для всех этих задач данный алгоритм обеспечивал нахождение оптимального решения. Это, однако, не доказывает, что оптимальность решения гарантируется для всех задач.

Алгоритм обеспечивает нахождение оптимального решения для задачи с $N=3$. В этой задаче нужно из двух возможных маршрутов выбрать один. Значение $Q^{*}_{m\ell}$ точно указывает, какой из этих маршрутов длиннее другого, т.к. просматриваются все элементы матрицы Z .

Решаемые задачи с $N\leq 10$ были с асимметричными и симметричными матрицами. Задача с $N=20$ была с асимметричной матрицей. Решение этих задач проверялось методом „ветвей и границ" [1].

Задачи *) с $N=25,48$ имели симметричную матрицу. Решение задачи с $N=48$ вручную заняло около шести часов.

Таким образом, используя данный алгоритм для решения задачи о коммивояжере, можно найти если не оптимальное, то близкое к оптимальному решение.

---

*) Кибернетический сборник № 9, 1964 г., Изд-во "Мир" стр.213-215

Литература

1. Дж. Литл, К. Мурти, Д.Суини, К. Карел. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере. Экономика и математические методы. Том 1, вып.1, 1965 г., стр. 94-107.