ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Сборник трудов
1967 г. Института математики СО АН СССР Выпуск 7

И. А. КРАСС, И. А. ПОЛЕТАЕВ

ЗАДАЧА ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ДИСПЕТЧЕРИЗАЦИИ ХИМИЧЕСКОГО ПРОИЗВОДСТВА

§ I. Описание системы

Рассматриваемое производство состоит из блоков, каждому из них присвоен номер i ($i=1,\ldots,M$). Каждому блоку ставится в соответствие некоторое количество функций $X_j^i(t)$, зависящих от времени $t\in[t_0,\infty)$ ($j=1,\ldots,n_i$), которые называются функциями-параметрами блока, а их значение в момент t – параметрами блока. Все функции-параметры X_j^i блока i разбиваются на 3 группы:

1) $j\in N_1^i=\{1,\ldots,n_1^i\}$,

2) $j\in N_2^i=\{n_1^i+1,\ldots,n_2^i\}$,

3) $j\in N_3^i=\{n_2^i+1,\ldots,n_3^i\}$.

Функции-параметры с $j\in N_1^i$ называются входными функциями блока i; для $j\in N_2^i$ – внутренними функциями, для $j\in N_3^i$ – выходными функциями. На функции $X_j^i(t)$ наложены дифференциальные связи вида:

$$\frac{dx_\ell^i}{dt} = \varphi_\ell^i (x_q^i + u_q^i), \tag{1}$$

где $p \in N_2^i$, $\ell \in N_2^i \cup N_3^i$.

Функции U_q^i называются управляющими функциями.

Все блоки связаны между собой следующими связями:

$$x_p^i = x_q^{j_p}, \tag{2}$$

где $i \in \{1,2,\ldots,M-1\}; p \in N_3^i$ и

$j_p \in \{2,\ldots,M\}$; $q \in N_1^{j_p}$,

т.е. p -й выход блока i является q -м входом блока j_p. Функции $x_p^1(t)$ $(p \in N_1^1)$ называются входными функциями всей системы, а функции x_p^M $(p \in N_3^M)$ - выходными функциями всей системы.

Если связь (2) имеет место, то мы будем говорить, что имеется канал, связывающий p -й выход блока i с q -м входом блока j_p.

Кроме управляющих функций U_q^i, выбирая которые диспетчер может воздействовать на параметры блока i (управлять) (управление с помощью функций $U_q^i(t)$ мы будем называть "мягким" управлением), на всех входных и выходных каналах блока i имеются клапаны, позволяющие полностью выключить блок i из системы, т.е. в любой момент t_0 диспетчер может для любого блока i положить

$$X_p^i(t) \equiv 0, \quad p \in N_1^i \cup N_3^i, \quad t \geq t_0 .$$

(Управление с помощью клапанов мы будем называть "жестким" управлением).

Это, однако, не означает, что вся система после этого прекратит работу.

Предполагается, что каждый блок i снабжен местной системой автоматики, поддерживающей устойчивый режим работы блока (см. [I]) возле некоторого стационарного режима, который задается следующей системой равенств:

$$\dot{X}_p^i(t) = \dot{a}_{op}^i = const,$$
$$X_p^i(t) = a_{op}^i = const \tag{3}$$

и координаты которого при условии, что $U_i^q = 0$, удовлетворяют системе (I), т.е. внутренние параметры удерживаются системой автоматики постоянными по величине, в то время как входные и выходные параметры удерживаются постоянными по величине их скорости изменения.

Система автоматики поддерживает величины $X_p^i\ (p \in N_2^i)$ и $\dot{X}_q^i\ (q \in N_1^i \cup N_3^i)$ возле стационарного режима (3) в том смысле, что если в некоторый момент t_0 заданы величины $X_p^i(t_0)\ (p \in N_2^i)$ и $\dot{X}_q(t_0)\ (q \in N_1^i \cup N_3^i)$ так, что вектор $\widetilde{X}^i = (\dot{x}_1^i(t_0), \ldots, \dot{x}_{n_1^i}^i(t_0),\ x_{n_1^i+1}^i(t_0), \ldots,$
$x_{n_2^i}^i(t_0),\ x_{n_2^i+1}(t_0), \ldots, x_{n^i}(t_0)) \in V_1^i,$

где V_1^i – открытая область n – мерного евклидова пространства, то

$$\lim_{t \to +\infty} \widetilde{X}^i(t) = \widetilde{a}_0^i \in V_1^i. \tag{4}$$

Здесь $\widetilde{a}_0^i$ – вектор, координаты которого задаются системой (3), а предел берется в смысле нормы, имеющейся в нашем пространстве. Условие (4) есть условие асимптотической устойчивости (см. [I]) системы автоматического управления блока.

В дальнейшем под входными и выходными параметрами блока i мы будем понимать не величины $X_p^i\ (p \in N_1^i \cup N_3^i)$, а их производные $\dot{X}_p^i$.

Область $V_1^i \subset E_{n_i}$ называется допустимой областью и обычно имеет такой вид

$$\widetilde{b}_1^i < \widetilde{X}^i < a_1^i, \tag{5}$$

где координаты векторов $\tilde{a}_1^i, \tilde{b}_1^i \in E_{n_i}$ называются верхними и нижними границами допустимой области. (Неравенства в (5) имеются в виду покоординатные).

Кроме того, в пространстве E_{n_i} заданы еще открытые области V_2^i и V_3^i такие, что $V_3^i \supseteq V_2^i \supseteq V_1^i$.

Область V_2^i характеризуется тем, что если в некоторый момент t_0 $\tilde{x}^i(t_0) \in V_2^i \setminus V_1^i$, то система автоматики не сможет вернуть блок в допустимую область, однако сам диспетчер с помощью управляющих функций "мягкого" управления (выбор функций $U_q^i(t)$ (I)) может вернуть блок в допустимую область за время $\tau_1^i = \tau_1^i(\tilde{x}^i(t_0))$ (наиболее естественное предположение $\tau_1^i = \tau_1^i(\|\tilde{x}^i(t_0)\|)$.

Область V_2^i будем называть безаварийной областью, а границу области V_2^i, т.е. множество $[V_2^i] \setminus V_2^i$, будем называть границей безаварийной области. Как и выше, область обычно имеет вид:

$$\tilde{b}_2^i < \tilde{x}^i < \tilde{a}_2^i, \tag{6}$$

где $\tilde{a}_2^i \geqslant \tilde{a}_1^i$, а $\tilde{b}_2^i \leq \tilde{b}_1^i$ – соответственно нижняя и верхняя границы безаварийной области.

Множество $V_2^i \setminus V_1^i$ будем называть зоной устранимой аварии.

Безаварийная область V_2^i характеризуется еще и тем, что вне ее уравнения (I) не выполняются, т.е. компоненты вектора считаются независимыми функциями, хотя связи (2) сохраняются. Другими словами, если в момент t_0 параметр $x_j^i(t_0) = x$, причем $x \notin (\tilde{a}_{2j}^i, \tilde{b}_{2j}^i)$, то прочие параметры $\tilde{x}_\ell^i$ $(\ell = (1,2,\dots,n_i), \ell \neq j)$ могут как угодно долго принимать, например, стационарное значение $\tilde{a}_{0\ell}^i$. Это довольно жесткое ограничение делается только для простоты дальнейшего изложения и, в принципе, может быть отброшено; т.е. можно считать, что и вне области выполняются какие-то соотношения типа (I).

Множество $V_3^i \setminus V_2^i$, которое будем называть зоной "мягкой аварии", характеризуется тем, что если в момент t_0 $\tilde{x}^i(t_0) \in V_3^i \setminus V_2^i$, то не существует "мягкого" управления, возвращающего блок в допустимую область. Однако диспетчер может воспользоваться жестким управлением и выключить блок, затем отремонтировать его за время $\tau_2^i = \tau_2^i(\tilde{x}^i)$ (опять же естественней считать $\tau_2^i = \tau_2^i(\|\tilde{x}^i\|)$) и снова включить в систему.

Суммарное время включения и выключения блока постоянно и не зависит от номера блока, оно равно Δ_1. И, наконец, множество $E_{n_i} \setminus V_3^i$, которое мы будем называть зоной "жесткой аварии", характеризуется тем, что если в момент t_0 $\tilde{x}^i(t_0) \in E_{n_i} \setminus V_3^i$, то блок i "сгорает", т.е., если диспетчер выключит блок i в момент t_0, то он обязан заменить блок i на новый, на что уходит Δ_2 единиц времени.

На каждом блоке i имеется n_i приборов, которые измеряют параметры $\tilde{x}_j^i$. Эти приборы мы будем обозначать так: $A_1^i, \ldots, A_{n_i}^i$, а показания прибора A_j^i в момент t_0 будем обозначать символом $\alpha_j^i(t_0)$.

Предполагается, что все приборы связаны с диспетчером в том смысле, что показания любого прибора могут быть прочтены диспетчером. Для того, чтобы узнать показания прибора A_j^i, диспетчер должен затратить время $\Delta_3 + \Delta_4$. Здесь Δ_3 – время соединения диспетчера с приборным пультом блока i, а Δ_4 – время присоединения диспетчера к прибору j блока i, если он уже соединен с приборным пультом блока i; т.е. если диспетчер в данный момент узнал показания прибора A_j^i, то для определения показаний прибора A_ℓ^i $(\ell \neq j)$ ему надо затратить время Δ_4, а для определения показаний прибора A_ℓ^k $(k \neq i)$ ему надо затратить время $\Delta_4 + \Delta_3$,

§ 2. Вероятностные характеристики системы

Как уже было замечено выше, каждый блок i снабжен системой автоматического регулирования, которая не дает возможности точке $\tilde{x}^i(t)$ покинуть область V_1^i, если блок не подвергается посторонним воздействиям. Такие "посторонние" воздействия мы будем считать случайными и происходящими в случайные моменты времени, т.е. мы будем предполагать, что существует функция распределения (см. [2])

$$F = F(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^M, t, \tilde{x}_0^1, \ldots, \tilde{x}_0^M, t_0). \quad (7)$$

Функция F дает возможность вычислить, какова вероятность того, что выполняются одновременно условия $t_1 \leq t$ и $\tilde{x}_j^i(t_1) \leq \tilde{x}_j^i$ $(i=1,\ldots,M; j=1,\ldots,n_0)$. Пусть функции распределения (7) соответствует функция, задающая плотность вероятности

$$p = p(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^M, t, \tilde{x}_0^1, \ldots, \tilde{x}_0^M, t_0), \quad (8)$$

т.е.

$$\int\limits_{U_1} d\tilde{x}^1 \int\limits_{U_2} d\tilde{x}^2 \ldots \int\limits_{U_M} d\tilde{x}^M \int\limits_{t_1}^{t_2} p(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^M, t, \tilde{x}_0^1, \ldots, \tilde{x}_0^M, t_0)\, dt$$

есть вероятность того, что для $t \in [t_1, t_2]$ параметры блока i будут таковы, что $\tilde{x}^i \in U_i$, если в момент t_0 $\tilde{x}^i(t_0) = \tilde{x}_0^i$, где $U_i \subset E_{n_i}$.

Сделаем некоторые предположения о плотности распределения (8).

---

*) Под символом $\int\limits_{U_i} f(\tilde{x}^i)\, d\tilde{x}^i$ понимается

$$\int \ldots \int\limits_{U_i} f(\tilde{x}^i)\, d\tilde{x}_1^i \ldots d\tilde{x}_{n_i}^M, \quad \tilde{x}^i \in U_i \subset E_{n_i}$$

Во-первых, положим, что

$$p(\tilde{x}^1,\ldots,\tilde{x}^M,t,\tilde{x}_0^1,\ldots,\tilde{x}_0^M,t_0)=\prod_{i=1}^{M}p_i(\tilde{x}^i,t,\tilde{x}_0^i,t_0) \quad (9),$$

где $p_i(\tilde{x}^i,t,\tilde{x}_0^i,t_0)$ есть плотность вероятности, аналогичная функции (8), однако написанная для блока i.

Равенство (9) означает, что случайные величины, выводящие блоки i и j из допустимой области ($i,j=1,\ldots,M$), независимы. Это не означает, что изменения в одном блоке не сказываются на изменениях в другом, т.к. равенства (2) имеют место. Однако такие изменения (подчиняющиеся равенствам (2)) мы не относим к случайным. Равенство (9) естественно, если блоки i и j не связаны физически никак, кроме входов и выходов, т.е. нет, например, единых, питающих все блоки сразу, энергосистем. Это предположение сделано тоже лишь для простоты дальнейшего изложения и, в принципе, может быть отброшено.

Функция $p_i(\tilde{x}^i,t,\tilde{x}_0^i,t_0)=p_i$ обладает следующими свойствами:

1) $p_i(\tilde{x}^i,t,\tilde{x}_0^i,t_0)\equiv 0$ для любых $\tilde{x}^i,\tilde{x}_0^i\in E_{n_i}$, если $t<t_0$;

2) $p_i(\tilde{x}^i,t,\tilde{x}_0^i,t_0)\equiv 0$ для $t>t_0$, если

$$(\tilde{x}_0^i\in V_3^i\setminus V_2^i \text{ и } \tilde{x}^i\in V_2^i) \text{ или } (\tilde{x}_0^i\in E_{n_i}\setminus V_3^i \text{ и } \tilde{x}^i\in V_3^i).$$

Это означает, что блок i не может сам починиться.

3) $p(\tilde{x}^i,t,\tilde{x}_0^i,t_0)\equiv p_i(\tilde{x}^i,t,\tilde{a}_0^i,t_0)$, если $\tilde{x}_0^i\in V_1^i$.

Это соответствует тому, что диспетчеру безразлично, в какой именно точке допустимой области находится блок (ввиду наличия системы автоматического управления).

Рассмотрим несколько простых, но "технически естественных" функций p_i.

Можно считать, что отдельные непересекающиеся временные интервалы независимы в том смысле, что выход или невыход системы из допустимой области в одном из таких интервалов не влияет на это событие в другом. Поэтому естественно принять, что по времени у нас процесс подчиняется распределению Пуассона (см. [3]), т.е. вероятность, что выход из допустимой области произойдет к моменту t, есть

$$F(t) = \begin{cases} 1 - \lambda e^{-\lambda(t-t_0)}, & t \geq t_0 \\ 0 & t < t_0 \end{cases},$$

а плотность вероятности

$$p_t = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(t-t_0)}, & t \geq t_0 \\ 0, & t < t_0, \end{cases}$$

(λ - нормировочный множитель).

Соответственно по параметрам можно предположить существование нормального распределения ж)

$$p_{\tilde{x}^i} = \frac{1}{\left(\prod\limits_{j=1} 2\pi\sigma_j^i\right)^{1/2}} e^{-\sum\limits_{j=1}^{n_i}\left[\frac{\tilde{x}_j^i(t)-\tilde{x}_j^i(t_0)}{\sigma_j^i(t-t_0)}\right]^2 \frac{1}{2}}.$$

Здесь $\sigma_j^i(t)$ (неубывающая функция времени) - дисперсия величин $\tilde{x}_j^i$ (обычно $\sigma_j^i = const$).

А общее распределение будет иметь вид :

$$p_i = p_t \cdot p_{\tilde{x}^i}, \tag{10}$$

причем выполняется условие

$$\int\limits_{t_0}^{\infty}\int\limits_{E_{n_i}} p_i \, dt \, d\tilde{x}^i = 1 . \tag{11}$$

ж) На $p_{\tilde{x}^i}$ налагаются условия 2) и 3), изложенные выше .

Если считать, что мы рассматриваем все процессы до какого-то достаточно большого момента времени T, т.е. $t\in[t_0,T]$, то в качестве p_t можно принять равномерное распределение

$$p_t=\frac{1}{T-t_0}\ .$$

Аналогично и по параметрам можно принять распределение, соответствующее равномерному распределению:

$$p_{\tilde{x}^i}=\{V^i_{kj}\ ,\quad \tilde{x}^i_0\in V^i_k\setminus V^i_{k-1}\ ;\ \tilde{x}^i(t)\in V^i_j\setminus V^i_{j-1} \tag{12}$$

для всех $t>t_0$. Здесь $V^i_0=\emptyset$, а $V^i_4=E_{n_i}$, $V^i_{kj}\ (k,j=1,\dots,4)$ — константы такие, что выполняются соотношения 2) и 3), а также равенство (11). Естественно, эти предположения о функции (8) можно комбинировать.

Рассмотрим вспомогательную задачу, решение которой будет использовано в § 4.

Пусть в момент $t=t_0$ известно, что $\tilde{x}^i=\tilde{x}^i_0$, а в момент $t=t_1$ диспетчер измерил параметр $\tilde{x}^i_j$, и он оказался равным $\tilde{x}^i_j(t_1)=\alpha^i_j$. Тогда вероятность того, что $\tilde{x}^i_j(t_1)=\alpha^i_j$, можно определить так (см. [2]):

$$P(\tilde{x}^i_j(t_1)=\alpha^i_j)=\int_{E^j_{n_i}} p(\tilde{x}^i_1,\dots,\tilde{x}^i_{j-1},\tilde{x}^i_j=\alpha^i_j,\tilde{x}^i_{j+1},\dots,\tilde{x}^i_{n_i},t=t_1,\tilde{x}^i_0,t_0)\,d\tilde{x}^i. \tag{13}$$

Здесь $E^j_{n_i}$ - (n_i-1)-мерная гиперплоскость пространства E_{n_i}, натянутая на оси $\tilde{x}^i_1,\dots\tilde{x}^i_{j-1},\tilde{x}^i_{j+1},\dots,\tilde{x}^i_{n_i}$. Чтобы подсчитать вероятность выполнения двух событий: $x^i_j=\alpha^i_j$ и $\tilde{x}^i\in V^i_\ell\setminus V^i_{\ell-1}\ (\ell=1,\dots,4)$ (здесь, как и в (12), $V^i_0=\emptyset$, $V^i_4=E_{n_i}$), надо вычислить четыре интеграла такие же, как и в (I3), распространенные, однако только на область $(V_\ell^i \setminus V_{\ell-1}^i) \cap E_{n_i}^j$ Обозначим их через $H[\widetilde{x}_j^i(t_1) = \alpha_j^i, \widetilde{x}^i(t_1) \in V_\ell^i \setminus V_{\ell-1}^i]$ тогда искомая вероятность, которую мы будем обозначать $p[\widetilde{x}_j^i(t_1) = \alpha_j^i, \widetilde{x}^i(t_1) \in V_\ell^i \setminus V_{\ell-1}^i]$ определяется так:

а) если $\alpha_j^i \in V_2^i \cap E^{(j)}$, то

$$p[\widetilde{x}_j^i(t_1) = \alpha_j^i ; \widetilde{x}^i(t_1) \in V_\ell^i \setminus V_{\ell-1}^i] = H[\widetilde{x}_j^i(t_1) = \alpha_j^i ; \widetilde{x}^i(t_1) \in V_\ell^i \setminus V_{\ell-1}^i]$$

в) если $\alpha_j^i \in (V_3^i \setminus V_2^i) \cap E^{(j)}$, то

$$p[\widetilde{x}_j^i(t_1) = \alpha_j^i ; \widetilde{x}^i(t_1) \in V_\ell^i \setminus V_{\ell-1}^i] = 0 \quad \text{для} \quad \ell = 1,2,$$

$$p[\widetilde{x}_j^i(t_1) = \alpha_j^i ; \widetilde{x}^i(t_1) \in V_3^i \setminus V_2^i] = \sum_{\ell=1}^{3} H[\widetilde{x}_j^i(t_1) = \alpha_j^i ; \widetilde{x}^i(t_1) \in V_\ell^i \setminus V_{\ell-1}^i]; \; p[\widetilde{x}_j^i(t_1) = \alpha_j^i ; \widetilde{x}^i(t_1) \in V_4^i \setminus V_3^i] = H[\widetilde{x}_j^i(t_1) = \alpha_j^i ; \widetilde{x}^i \in V_4^i \setminus V_3^i]$$

с) если $\alpha_j^i \in (V_4^i \setminus V_3^i) \cap E^{(j)}$, то

$$p[\widetilde{x}_j^i(t_1) = \alpha_j^i ; \widetilde{x}^i(t_1) \in V_\ell^i \setminus V_{\ell-1}^i] = 0 \quad \text{для} \quad \ell = 1,2,3,$$

$$p[\widetilde{x}_j^i(t_1) = \alpha_j^i ; \widetilde{x}^i(t_1) \in V_4^i \setminus V_3^i] =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{4} H[\widetilde{x}_j^i(t_1) = \alpha_j^i ; \widetilde{x}^i(t_1) \in V_\ell^i \setminus V_{\ell-1}^i] = p[\widetilde{x}_j^i(t_1) = \alpha_j^i].$$

Здесь $E^{(j)}$ — j-я ось пространства E_{n_i}. Соотношения а), в) и с) написаны на основании условия 2) для функции $p_i[\widetilde{x}^i, t, \widetilde{x}_0^i, t_0]$. Тогда вероятность того факта, что $\widetilde{x}^i(t_1) \in V_\ell^i \setminus V_{\ell-1}^i$ при условии $x_j^i(t_1) = \alpha_j^i$ (об условной вероятности см. [3]), может быть вычислена так:

$$p[\widetilde{x}^i(t_1) \in V_\ell^i \setminus V_{\ell-1}^i / \widetilde{x}_j^i(t_1) = \alpha_j^i] = \frac{p[\widetilde{x}_j^i(t_1) = \alpha_j^i ; \widetilde{x}^i(t_1) \in V_\ell^i \setminus V_{\ell-1}^i]}{p[\widetilde{x}_j^i(t_1) = \alpha_j^i]}. \quad (I4)$$

Пусть в момент $t_2 > t_1$ диспетчер измерил еще и показание прибора A_k^i и получил, что $\tilde{x}_k^i(t_2) = \alpha_k^i$; тогда для любого вектора $\tilde{x}^i(t)$ такого, что $\tilde{x}_j^i(t_1) = \alpha_j^i$, можно вычислить вероятность события $\tilde{x}^i(t_2) \in V_\ell^i \setminus V_{\ell-1}^i$ $(\ell = 1,2,3,4)$, $\tilde{x}_k^i(t_2) = \alpha_k^i$, если в момент $t = t_1$ вектор $\tilde{x}^i(t)$ известен (по формуле (13), где вместо t_0 стоит t_1, а вместо $\tilde{x}_0^i$ - $\tilde{x}^i(t_1)$). Пусть эта вероятность будет

$$p[\tilde{x}_k^i(t_2) = \alpha_k^i ; \tilde{x}^i(t_2) \in V_\ell^i \setminus V_{\ell-1}^i ; \tilde{x}^i(t_1), t_2].$$

Для того, чтобы найти вероятность совместного события

$\tilde{x}_j^i(t_1) = \alpha_j^i ; \tilde{x}_k^i(t_2) = \alpha_k^i ; \tilde{x}^i(t_2) \in V_\ell^i \setminus V_{\ell-1}^i$, надо

вычислить интеграл:

$$p[\tilde{x}_k^i(t_2) = \alpha_k^i ; \tilde{x}^i(t_2) \in V_\ell^i \setminus V_{\ell-1}^i ; \tilde{x}_j^i(t_1) = \alpha_j^i] =$$

$$= \int\limits_{E_{n_i}^j} p[\tilde{x}_k^i(t_2) = \alpha_k^i ; \tilde{x}^i(t_2) \in V_\ell^i \setminus V_{\ell-1}^i, \tilde{x}_1^i(t_1), \dots, \tilde{x}_{j-1}^i(t_1), \tilde{x}_j^i = \alpha_j^i, \tilde{x}_{j+1}^i, \dots, \tilde{x}_{n_i}^i] d\tilde{x}^i. \qquad (15)$$

Таким же образом вычисляется совместная вероятность событий $\tilde{x}_j^i(t_1) = \alpha_j^i, \tilde{x}_k^i(t_2) = \alpha_k^i$ и, наконец, условная вероятность:

$$p(\tilde{x}^i(t_2) \in V_\ell^i \setminus V_{\ell-1}^i / \tilde{x}_j^i(t_1) = \alpha_j^i, \tilde{x}_k^i(t_2) = \alpha_k^i).$$

Если известно, что диспетчер сделал K замеров до момента t_K (когда он сделал последний замер), то можно, идя шаг за шагом по вышеописанной схеме, определить вероятность события

$\tilde{x}^i(t_2) \in V_\ell^i \setminus V_{\ell-1}^i$ при условии $\tilde{x}_{j_1}^i(t_1) = \alpha_{j_1}^i, \dots,$

$\tilde{x}_{j_K}^i(t_K) = \alpha_K^i$, т.е.

$$p(\tilde{x}^i(t_k)\in V_l^i \setminus V_{l-1}^i / \tilde{x}_{j_1}^i(t_1)=\alpha_{j_1}^i, \ldots, \tilde{x}_{j_k}^i(t_k)=\alpha_{j_k}^i).$$

Здесь, вообще говоря, может быть, что $j_l = j_p$ $(l,p=1,2,\ldots,k)$.

Чтобы закончить вероятностное описание системы, заметим, что каждый прибор A_j^i может дать случайно неверное показание. Предположим, что если измеряемый прибором параметр $\tilde{x}_j^i \in (V_l^i \setminus V_{l-1}^i) \cap E^{(j)}$, то с вероятностью $p_{j,ll}^i$ прибор дает верное показание, т.е. $\tilde{x}_j^i = \alpha_j^i$; с вероятностью $p_{j,lk}^i$ ошибается, причем так, что $\alpha_j^i \in (V_k^i \setminus V_{k-1}^i) \cap$ $\cap E^{(j)}$. Другими словами, для каждого прибора A_j^i задана матрица $\| p_{j,lk}^i \|$ $(l,k=1,\ldots 4)$ такая, что все $p_{j,l k}^i \geq 0$ и

$$\sum_{k=1}^{4} p_{j,lk}^i = 1 \qquad l=1,\ldots 4. \tag{16}$$

Мы считаем, что вероятности $p_{j,lk}^i$ не зависят от времени, хотя это предположение тоже сделано для простоты изложения.

Предполагается, что диспетчер может применять "мягкое" управление к блоку i в том и только в том случае, если он будет знать все параметры i -го блока $\{\tilde{x}_j^i\}$ за время не большее, чем $n_i \Delta_3$ (т.е. он должен определять показания приборов i -го блока подряд). Естественно, считается $x_j^i \in (V_2^i \setminus V_1^i) \cap E^{(j)}$.

§ 3. Постановка экстремальной задачи

Для характеристики траектории системы, т.е. вектор-функции $\tilde{x}(t) = (\tilde{x}^1(t) \dots \tilde{x}^M(t))$, введем целевую функцию или функцию штрафов

$$C = C(\tilde{x}(t)) \geq 0.$$

Будем называть траекторию $\tilde{x}(t)$ $\tilde{x}(t_0) = \tilde{x}_0$ оптимальной на сегменте $[t_0, T]$, если выполняется условие:

$$\min \int_{t_0}^{T} c(x(t))\,dt = \int_{t_0}^{T} c(\tilde{x}(t))\,dt. \tag{17}$$

Относительно функции $C(\tilde{x}(t))$ сделаем следующие предположения, носящие в основном также вспомогательный характер.

Будем считать

$$C(\tilde{x}(t)) = \sum_{i=1}^{M} C^i(\tilde{x}^i(t)) \quad ; \tag{18}$$

$C^i(\tilde{x}^i(t))$ называется целевой функцией блока i.

Относительно функций C^i сделаем такие предположения:

1) $C^i(\tilde{x}^i(t)) = 0$, если $\tilde{x}^i(t) \in V_2^i$,

2) $C^i(\tilde{x}^i(t)) = C_1^i = Const$, если $\tilde{x}^i(t) \in V_3^i \setminus V_2^i$,

3) $C^i(\tilde{x}^i(t)) = C_1^i + C_2^i\,\delta(t - t_1)$, если $\tilde{x}^i(t_1) \in V_4^i \setminus V_3^i$,

а следовательно, и $\tilde{x}^i(t) \in V_4^i \setminus V_3^i$ для $t > t_1$. .

Константа C_1^i соответствует штрафу за то, что i -й блок не выдает продукцию, и, следовательно, вся система не работает с максимальной выдачей. Если в момент t_0 диспетчер отключит блок i при условии, что $\tilde{x}^i(t_0) \in V_3^i \setminus V_2^i$, то мы будем считать, что в течение времени $\Delta_1 + \tau_2^i(\tilde{x}^i(t_0))$ вектор $\tilde{x}^i \in V_3^i \setminus V_2^i$, а после этого времени $\tilde{x}^i(t_0 + \Delta_1 + \tau_2^i(\tilde{x}^i(t_0))) = a_0^i$. Аналогично, если $\tilde{x}^i \in \dot{V}_3^i \setminus V_2^i$, то в течение времени Δ_1 мы будем считать $\tilde{x}^i \in V_3^i \setminus V_2^i$, а $\tilde{x}^i(t_0 + \Delta_1) = a_0^i$.

Константа c_1^i - цена сгоревшего блока.

$\delta(t)$ - дельта-функция Дирака (см. [4]).

§ 4. Решение задачи

Будем сначала считать, что приборы на всех блоках работают безошибочно.

Будем полагать, что в любой момент t_0 диспетчер либо занят тем, что подсоединяется к какому-либо прибору, либо управляет каким-либо блоком. Если он кончает одну работу, то решает вопрос о следующем шаге, причем время принятия решения нулевое.

Если диспетчер в момент t_0 окончил работу, то у него имеется несколько альтернатив по поводу дальнейших действий, которые мы будем называть стратегиями. Приняв одну из альтернатив, он начнет выполнять некоторую работу, на которую он затратит время τ. За это время в результате случайностей вектор $\tilde{x}(t_0)$ может принять некоторое случайное значение $\tilde{x}(t+\tau)$, так что к моменту $t_0+\tau$ диспетчер уплатит штраф

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} c(\tilde{x}(t))\,dt .$$

Ввиду сделанных предположений относительно функции (I9), нас будет интересовать лишь попадание точки на множества

$V_j^i \setminus V_{j-1}^i$ $(j=1,\dots 4)$, а не конкретное значение параметров $\tilde{x}(t)$; т.е. в результате случая может получиться лишь ограниченное число ситуаций, требующих некоторых конкретных выплат штрафов. Эти различные случаи мы будем называть стратегиями природы. Тогда задачу о минимизации функционала (I7) можно рассматривать как антагонистическую игру [5] , где игрок I есть диспетчер, а игрок II есть природа, причем матрица данной игры, вообще говоря, зависит от состояния системы в данный момент и от значений тех замеров, которые уже делал диспетчер.

Рассмотрим сначала упрощенный случай: вся система состоит из одного блока.

I. Пусть имеется следующая ситуация:

I) в момент t_0 $\tilde{x}^i(t_0)\in V_1^i$;

2) с момента t_0 до настоящего момента t никаких изменений диспетчер не производил.

Тогда у диспетчера имеется n различных возможностей, а именно: замерить показание i -го прибора в момент $t+\Delta_4$ $(i=1,\dots n)$ и принять решение о дальнейших действиях. Все дальнейшие действия классифицируются так: либо отключить блок на время $\tau(\tilde{x})$, если показание прибора удовлетворяет некоторым условиям , где

$$\tau(\tilde{x})=\begin{cases}\Delta_1, \text{если} & \tilde{x}\in V_2,\\ \Delta_1+\bar{\tau}(\tilde{x}), \text{ если} & \tilde{x}\in V_3\setminus V_2,\\ \Delta_1+\Delta_2, \text{ если} & \tilde{x}\in V_4\setminus V_3,\end{cases}$$

где $\bar{\tau}_2(\tilde{x})$ - среднее время ремонта (может быть подсчитано при заданной $p(\tilde{x},t,\tilde{x}_0,t_0)$) ; либо не отключать блок, а перейти к замеру следующего параметра, тем самым опять придя в первоначальную ситуацию, но вместо условия 2) будем иметь

$\tilde{x}_i(t+\Delta)=\alpha_i$.

Каждая подобная стратегия диспетчера может быть описана так: если параметр $\tilde{x}_i\in(V_\ell\setminus V_{\ell-1})\cap E^{(i)}$, где $\ell=1,2,3,4,$

то выключить блок, в противном случае-не выключать; т.е. каждая такая стратегия может быть записана в виде (i_1, i_2, i_3, i_4), где $i_\ell \in \{0,1\}$ $(\ell = 1,2,3,4)$; если $i_\ell = 1$ и $\widetilde{X}_i \in (V_\ell \setminus V_{\ell-1}) \cap E^{(i)}$, то выключить блок, если $i_\ell = 0$, то не выключать. Кроме этого, есть еще одна стратегия: выключить с самого начала.

Всего, таким образом, у диспетчера 9 стратегий.

Ответные ситуации можно расчленить на следующие случаи – стратегии блока, которые характеризуются следующими условиями:

1) $\widetilde{X}(t) \in V_2$ либо $\widetilde{X}(t) \in V_\ell \setminus V_{\ell-1}$ $(\ell = 3,4)$,

2) $\widetilde{X}(t+\Delta_4) \in V_2$ либо $\widetilde{X}(t) \in V_k \setminus V_{k-1}$ $(k=3,4)$,

3) $\widetilde{X}(t+2\Delta_4) \in V_2$ либо $\widetilde{X}(t) \in V_n \setminus V_{n-1}$ $(n=3,4)$,

4) $X_i(t+\Delta_4) \in (V_m \setminus V_{m-1}) \cap E^{(i)}$ $(m=1,2,3,4)$,

т.е. каждую стратегию блока можно обозначить четверкой чисел (ℓ, k, n, m), где числа ℓ, k, n характеризуют $\widetilde{X}(t)$ в моменты $t, t+\Delta_4, t+2\Delta_4$ (если $\ell = 2$, то $\widetilde{X}(t) \in V_2$ и т.д.), а m – измеряемый параметр $X_i(t+\Delta_4)$ ($\ell, k, n \in \{2,3,4\}$, $m \in \{1,2,3,4\}$).

Ввиду условий а),в), с) (§ 4) состояния вида (2,3,2,2) или (2,2,2,3) не имеют физического смысла, поэтому множество, состоящее из четверок (ℓ, k, n, m), содержит 30 элементов.

Примем следующие предположения.

Если $\widetilde{X}(t_1) \in V_2$, $\widetilde{X}(t_2) \in V_3 \setminus V_2$, и в интервале (t_2, t_1) никаких действий над блоком диспетчер не производил, то $X(t) \in V_3 \setminus V_2$ для всех $t \in (t_2, t_1)$. Более точным предположением является $\widetilde{X}(t) \in V_3 \setminus V_2$ ... $t \in (t_1 + \alpha(t_2 - t_1), t_2)$, где $\alpha(\widetilde{X}(t_2), \widetilde{X}(t_1)) \in [0,1]$ и может быть вычислено из функции F (7).

Матрица платы составляется, исходя из свойств целевой функции (I9) с учетом следующего факта: если $\widetilde{x}(t_1) \in V_3 \setminus V_2$ и $\widetilde{x}(t) \in V_3 \setminus V_2$ для $t \in (t_1, t_1 + \tau)$, то проигрыш в целевой функции составит

$$C_1 \times \tau + C_1 \times \tau(\widetilde{x}(t_1)),$$

а для $\widetilde{x}(t_1) \in V_4 \setminus V_3$, соответственно, $C_1 \times \tau + C_1 \times \tau(\widetilde{x}(t_1)) + C_2$. Второе слагаемое в обоих случаях появляется за счет того, что блок сам починиться не может, а диспетчер на его исправление обязан потратить, по крайней мере, $\tau(\widetilde{x}(t_1))$ времени (в это время блок из работы выключен).

Кроме того, если диспетчер в момент t примет решение не выключать блока, а сделать замер следующего параметра, то он сможет его выключить не раньше, чем в момент $t + \Delta_4$.

Ввиду отсутствия места вся матрица платы 9 х 30 не может быть приведена. Приведе‘ пример, поясняющий принцип ее составления.

Если диспетчер принял стратегию (0,0,I,0), а ответная стратегия блока (2,3,3,3), то соответствующий элемент матрицы платы есть

$$C_1 \Delta_4 + C_1 \tau(\widetilde{x}(t + \Delta_4)) \qquad (\text{здесь } \widetilde{x}(t + \Delta_4) \in V_3 \setminus V_2),$$

а если блок ответит (2,3,3,2), то этот элемент будет равен

$$2 C_1 \Delta_4 + C_1 \tau(\widetilde{x}(t + \Delta_4))$$

и т.д.

П. Следующая возможная ситуация такова:

I) В момент t_0 $\widetilde{x}(t_0) \in V_1$.

2) В момент t_1 $\widetilde{x}_i(t_1) = \alpha_i$.

Возможны два подхода к данной ситуации.

Первый подход состоит в увеличении количества стратегий блока, ибо теперь возможны ситуации:

$$\tilde{x}(t_1) \in V_2 \quad \text{либо} \quad \tilde{x}(t_1) \in V_p \setminus V_{p-1} \quad (p=3,4);$$

$$\tilde{x}(t) \in V_2 \quad \text{либо} \quad x(t) \in V_\ell \setminus V_{\ell-1} \quad (\ell=3,4);$$

$$\tilde{x}(t+\Delta_4) \in V_2 \quad \text{либо} \quad x(t+\Delta_4) \in V_k \setminus V_{k-1} \quad (k=3,4);$$

$$\tilde{x}(t+2\Delta_4) \in V_2 \quad \text{либо} \quad x(t+2\Delta_4) \in V_n \setminus V_{n-1} \quad (n=3,4);$$

$$\tilde{x}_j(t+\Delta_4) \in (V_m \setminus V_{m-1}) \cap E^{(j)} \qquad (m=1,2,3,4),$$

т.е. стратегии блока тут записываются в виде пяти символов (p,ℓ,k,n,m) , где смысл каждого символа такой же, как у введенных выше (стр. 98). Причем количество стратегий блока ввиду условий а), в), с) (§ 4) увеличивается не в 3 раза, а на 21 штуку (причем часть стратегий может исчезнуть, если $\alpha_i \notin V_2$).

Случай с большим числом замеров по этой схеме исследуется так же, причем число стратегий блока для случая, когда до момента t произведено ℓ замеров, можно вычислить по формуле:

$$\sigma_\ell = \sum_{k=0}^{\ell}(a_k+b_k) + 4, \tag{20}$$

где

$$a_{k+1} = a_k + b_k + 4, \qquad a_0 = 16,$$

$$b_{k+1} = b_k + 4 = 10 + 4(k+1), \qquad b_0 = 10.$$

Второй подход к решению поставленной задачи таков.

Т.к. условные вероятности $p[(\tilde{x}(t_1)) \in V_\ell \setminus V_{\ell-1} / x_i(t_1) = \alpha_i]$ могут быть вычислены (§ 4), то, если $\tilde{x}(t) \in V_3 \setminus V_2$ или $\tilde{x}(t) \in V_4 \setminus V_2$, могут тем самым быть определены вероятности $\tilde{x}(t_1) \in V_p \setminus V_{p-1}$ $(p=1,\dots 4)$ и определен вероятный проигрыш при той или иной стратегии блока и стратегии диспетчера.

Итак, в этом случае размеры матрицы платы не меняются, а меняются сами ее элементы (некоторые). Например, элемент, описанный на стр. 101 ,останется таким же, но если блок "примет" стратегию (3,3,3,2), а диспетчер - (0,0,1,0), то в ситуации I элемент матрицы платы равен:

$$C_1(t+\Delta_4-t_0)+C_1\tau(\tilde{x}(t+\Delta_4)),$$

а в ситуации П :

$$p(\tilde{x}(t)\in V_3\setminus V_2 / \tilde{x}_i(t_1)=\alpha_i)\times C_1\times(t+\Delta_4-t_0)+$$
$$+p(\tilde{x}(t)\in V_2 / \tilde{x}_i(t_1)=\alpha_i)\times C_1\times(t+\Delta_4-t_1)+C_1\tau(\tilde{x}(t+\Delta_4)). \qquad (21)$$

Аналогично пересчитываются и прочие элементы.Вопрос с большим количеством измерений решается так же с учетом того ,что наши случайные события независимы и, следовательно, соответствующие вероятности перемножаются. Как видно из примера (21), такое продвижение в прошлое на некотором шагу можно будет обрывать, т.к. оно уже будет давать поправки малые по сравнению с основным членом, не зависящим от поведения блока в прошлом.

Ш. Следующая возможная ситуация такова:

1) В момент t_0 $\tilde{x}(t_0)\in V_1$.

2) До момента t , начиная с момента $t-(n-1)\Delta_4$, диспетчер сделал ровно $n-1$ замер $(n-1)$-го параметра и в момент t замеряет последний n -й параметр.

Тогда, если все измеренные параметры $\tilde{x}_i\in V_2\cap E^{(i)}$ и хотя бы один из них принадлежал зоне устранимой аварии $x_j\in(V_2\setminus V_1)\cap E^{(j)}$, то наряду со стратегиями диспетчера вида (i_1,i_2,i_3,i_4), где $i_\ell\in\{0,1\}$, появляются стратегии вида ($\tilde{i}_1,\tilde{i}_2,i_3,i_4$) , $\tilde{i}_1,\tilde{i}_2\in\{0,1,2\}$. Здесь значения $\{0,1\}$ имеют тот же смысл, что и выше (стр. 98), а значение 2 означает, что при попаданиях измеряемого параметра в область V_1 или $V_2\setminus V_1$ (соответственно, $\tilde{i}_1=2$ или $\tilde{i}_2=2$) диспетчер будет применять "мягкое управление". На это диспетчер затратит в среднем τ_2 единиц времени (на этот отрезок времени диспетчер занят).

Если же измеренные параметры $\widehat{x}_i \in V_1$,то появляются новые стратегии только вида (i_1, i_2, i_3, i_4).

Пусть осуществится одна из трех изложенных ситуаций; тогда мы придем к антагонистической игре двух лиц: природы - диспетчера, с заданной матрицей платы [5] . Если неизвестна функция (7), то можно принять, что оба противника применяют оптимальные стратегии,и узнать их методами линейного программирования (в этом случае второй подход, изложенный для ситуации II, не применим).

Если же функция (7) задана, то тем самым задана смешанная стратегия блока,и вместо оптимальной стратегии диспетчер может ввести чистую, которая определяется равенством

$$\sum_{i=1}^{i=K_1} c_{ij} \cdot \beta_i = \min_{j=(1,2,\dots K_2)} \left(\sum_{i=1}^{i=K_1} c_{ij} \beta_i \right) = v, \tag{22}$$

Здесь c_{ij} - элемент матрицы платы,

β_i - компоненты смешанной стратегии блока,

K_1 - число стратегий блока,

K_2 - число стратегий диспетчера.

Значение игры $\vartheta \geq \vartheta_0$, где ϑ_0 - значение игры, получаемое при оптимальных стратегиях обоих игроков.

Заметим, что любая стратегия диспетчера ведет к тому, что диспетчер, начиная с момента t , занят на время T_{ij} (i - стратегия блока, а j - диспетчера), т.е. в среднем диспетчер занимает время

$$T = \sum_{i=j=1}^{i=K_1, j=K_2} \gamma_j \beta_i T_{ij}, \tag{23}$$

где $\{\beta_1 \dots \beta_{K_1}\}$ - смешанная стратегия блока,

$\{\gamma_1 \dots \gamma_{K_2}\}$ - смешанная стратегия диспетчера.

Если принять во внимание, что каждый прибор может давать неверное показание (см. стр. 12), то количество стратегий блока возрастет (возможны стратегии $\alpha_i(t)\in V_\ell \setminus V_{\ell-1}$, а $\tilde{x}_i(t)\in V_m \setminus V_{m-1}$ $(\ell, m=1,..4)$; здесь $\alpha_i(t)$ - показание i -го прибора в момент t).

Управление блоком осуществляется следующим образом. В момент t определяется значение игр $\vartheta_1, \ldots \vartheta_n$, при которых первым измеряется параметр I, 2, ... , n , и выбирается

$$\vartheta = \max_{i=1,\ldots n} \vartheta_i \; . \tag{24}$$

Тот номер i , на котором достигается максимум в выражении (24), и соответствует истинной игре, совершаемой диспетчером в момент t . Таким же образом осуществляются и последующие шаги.

Рассмотрим теперь систему блоков, связанных соотношениями (I2).

Пусть опять в момент t_0 $\tilde{x}(t_0)\in V_2$ (здесь $V_2 = V_2^1 \times \ldots \times V_2^M$). Тогда относительно каждого блока у диспетчера имеется две альтернативы:

I) Играть с i -м блоком одношаговую игру, затратив на это среднее время T^i, и получить выигрыш ϑ^i .

2) Ничего не делать с i -м блоком.

Так как в момент t диспетчер должен начать выполнять какую-то работу, и притом только одну, то это значит, что в момент t у него имеется M стратегий вида

$$(\underbrace{0,\ldots,0}_{i-1}, i, \underbrace{0,\ldots,0}_{M-i-1}).$$

Каждая такая стратегия означает, что с i -м блоком производится игра, а с остальными блоками ничего не делается, по крайней мере в течение времени T^i. Ответные стратегии системы блоков имеют вид $(\ell^1, \ell^2, \ldots \ell^M)$, где $\ell^i \in \{2,3,4\}$ (если ℓ = 2, то $\tilde{x}^i(t)\in V_2^i$, если ℓ = 3,4, то $\tilde{x}^i(t)\in V_\ell^i \setminus V_{\ell-1}^i$).

Заметим, что пока у нас нигде не использовались связи(2), т.е. то, что, измеряя один из параметров блока i, мы одновременно измеряем какой-либо из параметров блока j. В этом случае может оказаться, что та стратегия, которая обеспечивает минимум в выражении (22), не дает минимума с точки зрения игры с системой блоков (стр. 105), поэтому кроме оптимальной (в смысле функции (22))стратегии диспетчера по отношению к блоку i, надо просмотреть все стратегии, связанные с измерением параметров,общих для нескольких блоков, ввиду связей (2) с другими блоками.

При большой системе блоков матрица игры получается весьма большой, число стратегий системы блоков равно 3^M, где M - число блоков. Если выход параметров $\bar{x}^i$ за пределы допустимой области-событие редкое, т.е. вероятность, что одновременно параметры двух блоков, не связанных между собой каналами (2), одновременно покинут допустимую область, пренебрежимо мала, то можно рассматривать всю матрицу. В этом случае достаточно вместо полной матрицы игры рассмотреть часть ее, включающую „подозрительный" блок (у которого один из параметров вышел за область V_1^i), и те блоки, которые с ним связаны каналами (2) (первая окрестность блока i).

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Айзерман. Лекции по теории регулирования,Гостехиздат, 1956.
2. Б. В. Гнеденко. Курс теории вероятностей, Гостехиздат, 1950.
3. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей, ИЛ, 1952.
4. И. М. Гельфанд. Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, 1958.
5. Р. Д. Льюис и Х. Райф. Игры и решения, ИЛ, 1961.