ОПТИМАЛЬНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

Сборник трудов
1967 г. Института математики СО АН СССР Выпуск 7

Э. О. РАПОПОРТ

О РЕШЕНИИ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Требуется найти непрерывную траекторию $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, минимизирующую функционал

$$Ix = \langle g, x \rangle = \int_0^1 \sum_{i=1}^n g_i(t)\, x_i(t)\, dt$$

при условиях

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + u(t), \quad t \in [0,1], \; x(0) = 0, \qquad (1)$$

где $A(t)$ - матричная функция $[n \times n]$, а измеримое управление $u = (u_1, \ldots, u_n)$ выбирается в многограннике

$$C\,u(t) \geq b(t), \quad t \in [0,1] \qquad (2)$$

(C - матрица $[m \times n]$, $b(t)$ - m - мерный вектор).

Мы будем предполагать, что все компоненты векторов $b(t)$ и $g(t)$ непрерывно дифференцируемы при $t \in [0,1]$ и существует такое управление $u(t)$, что $C\,u(t) > b(t)$.

Умножив (1) слева на C, перепишем задачу в виде:

Задача 1. Найти непрерывную вектор-функцию $x(t)$, минимизирующую

$$Ix = \langle g, x \rangle$$

при условиях

$$x(0)=0,$$

$$C\dot{x}(t) - CA(t)x(t) \geq b(t). \qquad (1')$$

Одновременно с задачей I рассмотрим следующую задачу.

З а д а ч а 2. Найти неотрицательную вектор-функцию

$$z(t) = (z_1(t), \ldots, z_m(t)),$$

максимизирующую

$$Lz = \langle b, z \rangle = \int_0^1 \sum_{k=1}^m b_k(t) z_k(t)\, dt$$

при условиях

$$C^*\dot{z}(t) + A^*(t)C^*z(t) = -g(t), \qquad (3)$$
$$C^*z(1) = 0.$$

Легко показать, что справедливо неравенство

$$Lz \leq Ix,$$

где x удовлетворяет условиям (I$'$), а z - условиям (3).

Т е о р е м а. Для того, чтобы $\bar{x}(t)$ было решением задачи I, необходимо и достаточно существование $\bar{z}(t)$, удовлетворяющего условиям (3) и такого, что $I\bar{x} = L\bar{z}$ (см.[I]).

Эта теорема позволяет построить алгоритм для решения задачи I, являющейся аналогом метода последовательного улучшения плана для задачи линейного программирования [2]. Чтобы не рассматривать ситуаций вырождения, потребуем выполнения следующих условий:

А. $m > n$, и определитель любой квадратной (размером $(n+1)\times(n+1)$) подматрицы матрицы $[C, b(t)]$ обращается в ноль лишь в конечном числе точек при $t \in [0,1]$.

Б. Каждая координата вектора $g(t)$ имеет конечное число нулей при $t \in [0,1]$.

Л е м м а. Пусть $\bar{x}(t)$ - решение задачи I. Тогда промежуток $[0,1]$ можно разбить на конечное число сегментов $[t_i, t_{i+1}]$ так, что в каждом (t_i, t_{i+1}) ровно n неравенств в (I$'$) обращаются в равенства, а остальные неравенства выполняются строго.

Доказательство. В качестве t_i возьмем точки, в которых обращаются в ноль определители подматриц матрицы $[C, b(t)]$. По предположению, таких точек конечное число.

Предположим теперь, что существует такая точка t_0, что в некотором интервале (t', t''), содержащем t_0, обращаются в равенства $n+1$ неравенств. Но тогда в (t', t'') соответствующая подматрица матрицы $[C, b(t)]$ особенная, что противоречит условию А. Пусть теперь в (t', t'') обращаются в равенства только $n-1$ неравенств. Тогда $\bar{x}_1(t), \ldots, \bar{x}_{n-1}(t)$ (компоненты вектора $x(t)$) можно представить как функции от $\bar{x}_n(t)$. Подставив их в остальные $m-n+1$ неравенств и в функционал I, получим $m-n+1$ строгих неравенств относительно $\bar{x}_n(t)$ и $I = I(\bar{x}_n)$. Пусть $\tilde{x}_n = \bar{x}_n + \varepsilon \varphi(t)$. Ясно, что ε и $\varphi(t)$ можно выбрать так, чтобы все ограничения удовлетворялись, а $I(\tilde{x}_n) < I(\bar{x}_n)$. Лемма доказана.

Базисным вектором задачи 2 назовем неотрицательный вектор $z(t)$, удовлетворяющий (3) и такой, что промежуток $[0, 1]$ можно разбить на конечное число сегментов $[t_i, t_{i+1}]$ так, что на каждом (t_i, t_{i+1}) отличны от нуля только n компонент вектора $z(t)$. Лемма утверждает, что решение задачи 2 достигается только на базисных векторах. Легко показать, что решения задач I и 2 единственны.

Задачу 2 можно упростить, разрешив систему

$$C^* \dot{z}(t) + A^*(t) C^* z(t) = -g(t)$$
$$C^* z(1) = 0$$

относительно

$$C^* z(t).$$

Имеем

$$C^* z(t) = \Gamma(t). \tag{4}$$

Пусть $z^{(v)}$ базисный вектор, удовлетворяющий (4). Обозначим через $z_1^{(v)}, \ldots, z_n^{(v)}$ те компоненты $z^{(v)}$, которые отличны от нуля на некотором промежутке (t', t'') (будем называть их базисными переменными), а остальные компоненты (не -

базисные переменные) обозначим через $y_1^{(1)}, \dots, y_{m-n}^{(1)}$.

Из уравнений (3) $x_1^{(1)}, \dots, x_n^{(1)}$ можно выразить через каждый из $y_j^{(1)}$, считая остальные $y_i^{(1)}$ ($i \neq j$) равными нулю:

$$x_i(t) = x_i^{(1)}(t) + r_{ij} y_j(t). \qquad (5)$$

Подставив $x_i(t)$ в $\sum_{k=1}^{m} b_k(t) x_k(t)$, получим при $y_j^{(1)}$ некоторый коэффициент. Если он отрицателен при всех t из (t', t''), то вводя $y_j^{(1)}$ на этом интервале в базис, мы не сможем улучшить линейную форму.

Базисному вектору $x^{(1)}$ соответствует вектор $x^{(1)}$, получающийся следующим образом: $x^{(1)}(0) = 0$; если на (t', t'') отличны от нуля компоненты $x^{(1)}$ с номерами $\alpha_1, \dots \alpha_n$, то на этом промежутке $x^{(1)}$ - решение тех уравнений системы (I), которые имеют номера $\alpha_1, \dots \alpha_n$.

Заметим, что коэффициент при $y_j^{(1)}$ в линейном функционале L будет равен $b_{\alpha_j}(t) - [C\dot{x}^{(1)}(t) - CA(t)x^{(1)}(t)]_{\alpha_j}$. Это позволяет вместо вычисления зависимости линейного функционала от каждой небазисной переменной $y_j^{(1)}$ проверять, удовлетворяется ли неравенство, соответствующее $y_j^{(1)}$, для $x^{(1)}$.

Процесс решения задачи I состоит в следующем:

I. Находим какое-либо базисное решение $x^{(1)}$.

2. Строим вектор $x^{(1)}$, соответствующий $x^{(1)}$.

3. Проверяем допустимость $x^{(1)}$ для ограничений задачи I.

Если $x^{(1)}$ допустимый, то задача решена. Пусть $x^{(1)}$ недопустимый, то есть в задаче I найдется неравенство α_j, которое нарушается на интервале (t_1, t_2) (причем все неравенства удовлетворяются для $t \in [0, t_1]$). Тогда на этом интервале в базис надо ввести небазисную переменную $y_j^{(1)}$.

4. Найдем, какую из базисных переменных $x_i^{(1)}$ вытесняет $y_j^{(1)}$. Положив в (5) $x_i(t) \equiv 0$, получим n различных

значений $y_j^{(1)}: y_{j_1}^{(1)}, \ldots, y_{j_k}^{(1)}$. Пусть

$$\bar{y}_j(t) = \inf_{k, y_{j_k}^{(1)} > 0} (y_{j_k}^{(1)}).$$

Если существует $(t', t'') < (t_1, t_2)$ такой, что все $y_{j_k}^{(1)}(t)$ при $t \in (t', t'')$ отрицательны, то это означает, что максимизируемый функционал в задаче 2 неограничен, а задача I не имеет допустимых векторов. Если же $\bar{y}_j(t)$ определен при всех $t \in (t_1, t_2)$, то на этом промежутке получаем новый базис $x^{(2)}$, совпадающий с $x^{(1)}$ вне (t_1, t_2). После этого процесс повторяется. Монотонность процесса очевидна. Конечность его следует из леммы I.

Заметим, что в пункте 3 алгорифма вместо проверки на допустимость вектора $x^{(1)}$ можно проверять допустимость соответствующего управления для ограничений (2).

Для нахождения допустимого базиса задачи 2 рассмотрим вспомогательную задачу 2°.

$$C^* z(t) + E\varphi(t) - E\psi(t) = F(t),$$
$$z(t), \varphi(t), \psi(t) \geq 0,$$

максимизировать

$$K(\varphi, \psi) = -\int_0^1 \sum (\varphi_i(t) + \psi_i(t))\, dt.$$

У этой задачи допустимое базисное решение очевидно:

$$\varphi_i(t) = 0, \quad \psi_i(t) = F_i(t), \quad \text{если} \quad F_i(t) \leq 0,$$

$$\psi_i(t) = 0, \quad \varphi_i(t) = F_i(t), \quad \text{если} \quad F_i(t) \geq 0.$$

Если при решении этой задачи по предлагаемому алгоритму, мы получим, что максимум функционала достигается на базисе, в котором некоторые компоненты векторов φ и ψ отличны от нуля, то задача 2 не имеет допустимого вектора, и минимизируемый функционал в задаче I неограничен. Если же оптимальный базис задачи

2^0 не содержит компонент векторов φ и ψ, то этот базис можно взять в качестве исходного для задачи 2.

Пример. Найти непрерывные

$$x(t) \text{ и } y(t), \quad x(0)=y(0)=0,$$

минимизирующие

$$I=\int_0^1 (-x-y)\,dt,$$

если

$$\begin{cases} \dot{x}+11x+15y=u \\ \dot{y}-6x-8y=v, \end{cases}$$

а управление (u,v) выбирается в многограннике

$$\begin{cases} u+v\geq 1 \\ -2u+v\geq -2 \\ u-2v\geq -2 \\ u+4v\geq 2 . \end{cases}$$

Тогда задача I выглядит так:

Найти непрерывные

$$x(t) \text{ и } y(t), \quad x(0)=y(0)=0,$$

минимизирующие

$$I=\int_0^1 (-x-y)\,dt$$

при условиях

$$\begin{aligned} \dot{x}+\dot{y}+5x+7y&\geq 1 \\ -2\dot{x}+\dot{y}-28x-38y&\geq -2 \\ \dot{x}-2\dot{y}+23x+31y&\geq -2 \\ \dot{x}+4\dot{y}-13x-17y&\geq 2 . \end{aligned}$$

Ей соответствует задача 2:

Найти неотрицательные

$$\alpha(t),\ \beta(t),\ \gamma(t),\ \delta(t),$$

максимизирующие

$$L=\int_0^1 (\alpha-2\beta-2\gamma+2\delta)\,dt$$

при условиях

$$\dot\alpha - 2\dot\beta + \dot\gamma + \dot\delta - 5\alpha + 28\beta - 23\gamma + 13\delta = 1$$
$$\dot\alpha + \dot\beta - 2\dot\gamma + 4\dot\delta - 7\alpha + 38\beta - 31\gamma + 17\delta = 1$$
$$\alpha(1) - 2\beta(1) + \gamma(1) + \delta(1) = 0$$
$$\alpha(1) + \beta(1) - 2\gamma(1) + 4\delta(1) = 0.$$

Эту систему можно привести к виду

$$\alpha - 2\beta + \gamma + \delta = 2e^{2(t-1)} - 3e^{t-1} + 1$$
$$\alpha + \beta - 2\gamma + 4\delta = 3e^{2(t-1)} - 5e^{t-1} + 2.$$

В качестве начального базисного решения возьмем следующее:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{8}{3}e^{2(t-1)} - \frac{13}{3}e^{t-1} + \frac{5}{3} \\ \beta = \frac{1}{3}e^{2(t-1)} - \frac{2}{3}e^{t-1} + \frac{1}{3} \\ \gamma = 0 \\ \delta = 0 \end{cases} \qquad \text{для} \quad t \in [0, 1-\ln\tfrac{8}{5}]$$

и

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = -\frac{7}{3}e^{2(t-1)} + \frac{11}{3}e^{t-1} - \frac{4}{3} \\ \gamma = -\frac{8}{3}e^{2(t-1)} + \frac{13}{3}e^{t-1} - \frac{5}{3} \\ \delta = 0 \end{cases} \qquad \text{для} \quad t \in [1-\ln\tfrac{8}{5}, 1].$$

Легко проверяется, что ограничение, соответствующее $\delta(t)$, нарушается при $t \in [0, 1-\ln\frac{8}{5}]$. Следовательно, при таких t $\delta(t)$ необходимо ввести в базис.

При $t \in [0, 1-\ln\frac{8}{5}]$ имеем

$$\alpha(t) = \frac{8}{3}e^{2(t-1)} - \frac{13}{3}e^{t-1} + \frac{5}{3} - 3\delta(t)$$
$$\beta(t) = \frac{1}{3}e^{2(t-1)} - \frac{2}{3}e^{t-1} + \frac{1}{3} - \delta(t).$$

Отсюда:

$$\delta_1(t) = \frac{8}{9}e^{2(t-1)} - \frac{13}{9}e^{t-1} + \frac{5}{9},$$

$$\delta_2(t)=\frac{1}{3}e^{2(t-1)}+\frac{2}{3}e^{t-1}+\frac{1}{3}.$$

При $\quad 0\le t\le 1-\ln\frac{5}{2} \qquad \delta_1\ge\delta_2>0.$

При $\quad 1-\ln\frac{5}{2}\le t\le 1-\ln\frac{8}{5} \qquad \delta_2\ge\delta_1>0.$

Следовательно, в новый базис входят $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ при $t\in[0,1-\ln\frac{5}{2}]$, $\beta(t)$ и $\delta(t)$ при $t\in[1-\ln\frac{5}{2},1-\ln\frac{8}{5}]$, $\beta(t)$ и $\gamma(t)$ при $t\in(1-\ln\frac{8}{5},1]$.

Этому базису соответствует вектор, допустимый в прямой задаче, следовательно, он оптимальный.

Управление задачи I получается следующим образом:

для $0\le t\le 1-\ln\frac{5}{2}$ $\quad \begin{cases} u+v=1 \\ u+4v=2 \end{cases}$ или $\quad \begin{matrix} u=\frac{2}{3} \\ v=\frac{1}{3}, \end{matrix}$

для $1-\ln\frac{5}{2}\le t\le 1-\ln\frac{8}{5}$ $\quad \begin{cases} -2u+v=-2 \\ u+4v=2 \end{cases}$ или $\quad \begin{matrix} u=\frac{10}{9} \\ v=\frac{2}{9}, \end{matrix}$

для $1-\ln\frac{8}{5}\le t\le 1$ $\quad \begin{cases} 2u+v=-2 \\ u-2v=-2 \end{cases}$ или $\quad \begin{matrix} u=\frac{2}{3} \\ v=\frac{2}{3}. \end{matrix}$

Эти значения u и v и определяют оптимальную траекторию задачи I.

ЛИТЕРАТУРА

1. Э. О. Рапопорт. Двойственные теоремы теории оптимальных процессов. Сборник "Математические модели и методы оптимального планирования". Новосибирск, 1966.
2. Л. В. Канторович. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М. Изд-во АН СССР, 1959.