О П Т И М А Л Ь Н О Е П Л А Н И Р О В А Н И Е

Сборник трудов

1966г. Института математики СО АН СССР Выпуск 5

А. М. РУБИНОВ

ОБ ОДНОЙ МАТЕМАТИКО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Модель, рассматриваемая в настоящей заметке, описывается в терминах отображений, ставящих в соответствие точке некоторого конечномерного пространства ограниченное замкнутое подмножество, вообще говоря, другого конечномерного пространства.

Для точного описания модели введем предварительно некоторые обозначения. Пусть нам задана последовательность натуральных чисел $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \ldots \leq n_t \leq \ldots$. Рассмотрим систему конечномерных нормированных пространств

$$m_1 \subset m_2 \subset \ldots \subset m_t \subset \ldots$$

Здесь m_t есть n_t - мерное пространство; если $x = (x_1, \ldots, x_{n_t}) \in m_t$, то $\|x\| = \max\limits_{i \leq n_t} |x_i|$.

Будем рассматривать пространство m_t как подпространство $m_{t'}$ $(t' > t)$, натянутое на первые n_t ортов. Через $P_{t,t'}$ обозначим проектор из $m_{t'}$ в m_t. Будем считать, что пространства m_t частично упорядочены естественным образом. Через K_t обозначим конус положительных элементов пространства m_t, через Σ - совокупность всех ограниченных подмножеств K_t. Согласованной последовательностью векторов будем называть последовательность $\chi = (x^1, x^2, \ldots x^t, \ldots)$ такую, что $x^t \in K_t$ $(t = 1, 2, \ldots)$, $\sup\limits_t \|x^t\| < \infty$ и для любых t и $t' > t$ $P_{t,t'} x^{t'} = x^t$.

Рассматриваемая модель задается

а) последовательностью натуральных чисел $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_t \leq \ldots$

б) системой отображений a_t, действующих из K_t в Ξ_{t+1} и обладающих следующим свойством: для любой согласованной последовательности векторов $\chi = (x^1, x^2, \ldots, x^t, \ldots)$

$$\sup_t \sup_{y \in a_t(x^t)} \| y \| = M_\chi < \infty \quad . \tag{I}$$

В дальнейшем мы будем предполагать также, что отображения a_t удовлетворяют одному из следующих двух условий:

I) Если $t' > t$, то для $x \in K_{t'}$

$$a_{t'}(x) \supset a_t(P_{t,t'}\, x). \tag{2}$$

2) Если $x', x'' \in K_t$ и $x' \geqslant x''$, то

$$a_t(x') > a_t(x''). \tag{3}$$

Экономически t можно интерпретировать как номер временного периода, числа I, 2, ..., n_t - как номера продуктов, имеющихся к началу периода t.

Применение отображения a_t к вектору $x = (x_1, x_2, \ldots x_{n_t}) \in K_t$ означает, что затраченные в начале периода t продукты с номерами I, 2, ... , n_t в количествах $x_1, x_2, \ldots x_{n_t}$ соответственно могут быть переработаны к концу периода в продукты с номерами I, 2, ... , n_{t+1} ($n_{t+1} \geqslant n_t$), причем переработка может производиться разными способами, в результате чего могут получаться разные количества этих продуктов; все возможные результаты переработки описываются множеством $a_t(x)$. То, что $y = (y_1, \ldots, y_{n_{t+1}}) \in a_t(x)$, означает, что из вектора x можно произвести, в частности, y_1 единиц первого продукта, y_2 - второго и т.д. Обратно, если из x можно произвести y_i единиц i-ого продукта ($i = 1, 2, \ldots, n_{t+1}$), то вектор $y = (y_1, y_2, \ldots y_{n_{t+1}}) \in a_t(x)$.

Рассматриваемая модель, таким образом, учитывает, что из совокупности имеющихся продуктов можно производить новые. При этом на модель не наложены ограничения типа линейности и выпуклости, а также ограничения топологического типа. Однако даже в таких общих предположениях удается получить результаты, представляющие, как нам кажется, некоторый интерес.

Пусть $k \leq n_t$ и $\varepsilon > 0$. Положим

$$V_{k,t,\varepsilon} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_{n_t}) \in m_t \mid \sup_{i \leq k} |x_i| \leq \varepsilon\}.$$

Т е о р е м а I. Пусть отображения a_t удовлетворяют условиям (I) и (2). Тогда для любой согласованной последовательности векторов $\chi = (x^1, x^2, \dots, x^t, \dots)$, номера k и числа $\varepsilon > 0$ найдется временной интервал τ $(n_\tau \geq k)$, такой, что для $t > \tau$

$$a_t(x^t) \subset a_\tau(x^\tau) + V_{k,t,\varepsilon}.$$

Экономический смысл теоремы I заключается в следующем: во все временные периоды $t > \tau$ количество i-ого продукта (i = I, 2, ..., k), полученное каким-либо способом из вектора x^t, будет отличаться от количества этого продукта, которое может быть получено из вектора x^τ_1 в период τ, не больше чем на ε единиц.

Через l^1_t обозначим n_t - мерное нормированное пространство, в котором норма введена следующим образом: если $f = (f_1, f_2, \dots, f_{n_t}) \in l^1_t$, то $\|f\| = \sum_{i=1}^{n_t} |f_i|$. Векторы $f \in l^1_t$ с неотрицательными компонентами назовем ценами в период t. Пусть $t' > t$. Для $f = (f_1, f_2, \dots, f_{n_{t'}}) \in l^1_{t'}$ положим $P_{t,t'} f = (f_1, f_2, \dots, f_{n_t}) \in l^1_t$.

Согласованными ценами будем называть последовательность $\varphi = (f^1, f^2, \dots, f^t, \dots)$ такую, что f^t есть цены в период t, $\sup_t \|f^t\| < \infty$ и для любых t и $t' \geq t$ $P_{t,t'} f^{t'} = f^t$. (Из того, что $\sup_t \|f^t\| < \infty$ следует, в частности, что согласованные цены на продукты с достаточно большими номерами малы. Такая ситуация может иметь место в случае, если цены на достаточно далекие продукты будут учитываться с весами).

Т е о р е м а 2. Пусть отображения a_t удовлетворяют условиям (I) и (2). Тогда для любой согласованной последовательности векторов $\chi=(x^1, x^2, \dots, x^t, \dots)$, любых согласованных цен $\varphi=(f^1, f^2, \dots, f^t, \dots)$ и числа $\varepsilon > 0$ найдется временной интервал τ, обладающий следующим свойством: при всех $t > \tau$ для любого $y_t \in a_t(x^t)$ найдется $y_\tau \in a_\tau(x^\tau)$ такой, что

$$|f^t(y_t) - f^\tau(y_\tau)| < \varepsilon.$$

Экономический смысл теоремы 2 заключается в следующем: во все временные периоды $t > \tau$ суммарная цена набора $y_t=(y_1, y_2, \dots, y_{n_t})$ полученного каким-либо способом из x_t, будет мало отличаться от соответствующей цены некоторого набора $y_\tau=(y_1', y_2', \dots, y_{n_\tau}')$, полученного из x_τ в период τ.

Для доказательства теорем I и 2 нам будет удобно рассмотреть пространство m всех ограниченных последовательностей (если $x=(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) \in m$, то $\|x\| = \max\limits_n |x_n|$) и пространство ℓ^1 всех абсолютно сходящихся рядов (если $f=(f_1, f_2, \dots, f_n, \dots) \in \ell^1$, то $\|f\| = \sum\limits_{i=1}^{\infty} |f_i|$).

Пространства m_t будем рассматривать как подпространства m, натянутые на первые n_t ортов. Через P_t обозначим проектор из m в m_t.

Ясно, что каждой согласованной последовательности $\chi=(x^1, x^2, \dots, x^t, \dots)$ отвечает элемент $x \in m$ такой, что $P_t x = x^t$, и, наоборот, каждому $x \in m$ соответствует согласованная последовательность $\chi=(P_1 x, P_2 x, \dots, P_t x \dots)$, поэтому в дальнейшем вместо согласованных последовательностей будем говорить об элементах m. Таким же образом согласованные цены можно отождествлять с элементами ℓ^1.

Рассмотрим в m w^* - топологию. Фундаментальная система окрестностей нуля в этой топологии состоит из множеств $V_{f_1, f_2, \dots f_k; \varepsilon}$, где

$$V_{f_1, f_2, \dots f_k; \varepsilon} = \{x \in m \mid |f_i(x)| < \varepsilon,\ f_i \in \ell^1,\ i=1,2,\dots,k\}.$$

Через K обозначим конус последовательностей из m с неотрицательными компонентами, через Ξ - совокупность всех ограниченных по норме и w^* - замкнутых подмножеств K.

Каждому $x \in K$ поставим в соответствие множество

$$a(x) = \overline{\bigcup_t a_t(P_t x)}$$

(здесь черта означает замыкание в w^*).

Из (I) следует, что $a(x)$ ограничено по норме и, следовательно, $a(x) \in \Xi$.

Легко видеть, что теоремы I и 2 являются частными случаями следующей теоремы.

Т е о р е м а 3. Пусть отображения a_t удовлетворяют условиям (I) и (2). Тогда для любой окрестности $V_{f_1, f_2, \dots, f_K; \varepsilon}$ и $x \in m$ найдется временной интервал τ такой, что

$$a(x) \subset a_\tau(P_\tau x) + V_{f_1, f_2, \dots, f_K; \varepsilon}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отметим прежде всего, что из сепарабельности l' следует (см., например, [I] гл. 2 § 5), что если $\xi \in \Xi$, то ξ в топологии w^* есть компактное метризуемое пространство.

Допустим теперь, что теорема неверна. Тогда существуют $x \in m$ и окрестность $V_{f_1', f_2', \dots, f_K'; \varepsilon}$, обладающие следующим свойством: для любого t найдется элемент y_t такой, что $y_t \in a(x)$, но

$$y_t \notin a_t(P_t x) + V_{f_1', f_2', \dots, f_K'; \varepsilon}. \tag{4}$$

Так как $a(x) \in \Xi$, то $a(x)$ компактно, поэтому, учитывая метризуемость w^*, из последовательности y_t можно выделить сходящуюся подпоследовательность y_{t_i}. Пусть $y = w^* - \lim y_{t_i}$. Ясно, что $y \in a(x)$. Для сокращения записи обозначим $V_{f_1', f_2', \dots f_K'; \frac{\varepsilon}{2}}$ через V. По определению предела по окрестности V найдется i_0 такое, что для $i > i_0$ $y_{t_i} - y \in V$ или, что то же самое,

$$y \in y_{t_i} - V. \tag{5}$$

Из (4) следует, что при всех i

$$(y_{t_i} - V) \cap (a_{t_i}(P_{t_i} x) + V) = \emptyset,$$

откуда

$$\Big(\bigcap_{i \geq i_0} (y_{t_i} - V)\Big) \cap \Big(\bigcup_{i \geq i_0} (a_{t_i}(P_{t_i} x) + V\Big) = \emptyset.$$

Из (5) следует, что $y \in \bigcap_{i \geq i_0} (y_{t_i} - V)$ следовательно, $y \notin \bigcup_{i \geq i_0} (a_{t_i}(P_{t_i} x) + V)$ или, что то же самое,

$$y \notin \bigcup_{i \geq i_0} a_{t_i}(P_{t_i} x) + V.$$

Из (2) следует, что при $t' > t$

$$a_{t'}(P_{t'} x) > a_t(P_t x),$$

откуда $\bigcup_t a_t(P_t x) = \bigcup_{i \geq i_0} a_{t_i}(P_{t_i} x)$.

Таким образом, $y \notin \bigcup_t a_t(P_t x) + V$, а это означает, что $y \notin \overline{\bigcup_t a_t(P_t x)} = a(x)$.

Полученное противоречие и доказывает теорему.

Легко видеть, что условие (I) эквивалентно следующему условию: для любого $x \in m$ найдется число M_x, зависящее от x, такое, что

$$\sup_{y \in a(x)} \|y\| \leq M_x. \tag{I}$$

Можно показать, что если выполняется (3), то константа M_x может быть выбрана зависящей лишь от $\|x\|$. Точнее говоря, справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 4. Пусть отображения a_t удовлетворяют условиям (I) и (3). Тогда для всех $x \in K$ таких, что $\|x\| \leq C$, найдется число $M(c)$, обладающее тем свойством, что

$$\sup_{y \in a(x)} \|y\| \leq M(c).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Допустим, что теорема неверна. Тогда для любого κ найдется элемент $x^\kappa \in K$, $\|x^\kappa\| \leq C$, такой, что $\sup\limits_{y \in a(x)} \|y\| > K$. Пусть $x = \sup\limits_K x^K$ (Если $x^K = (x_1^K, \dots, x_{K_1}^K, \dots)$, то $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, где $x_n = \sup\limits_K x_n^K$). Так как при всех K $x^K \leq x$, то при всех t и K $P_t x^K \leq P_t x$, но тогда, в силу (3), $a_t(P_t x^K) \subset a_t(P_t x)$, а потому и

$$a(x^K) = \overline{\bigcup_t a_t(P_t x^K)} \subset \overline{\bigcup_t a_t(P_t x)} = a(x) .$$

Из последнего включения следует, что $\bigcup\limits_K a(x^K) \subset a(x)$, что противоречит ограниченности $a(x)$.

Полученное противоречие и доказывает теорему.

Из теоремы 4 следует, в частности, что каков бы ни был набор продуктов $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n_t})$, удовлетворяющий условию $\|x\| = \sup\limits_{i \leq n_t} x_i \leq C$, из него можно получить лишь наборы продуктов $y = (y_1, y_2, \dots, y_{n_{t+1}})$ такие, что $\|y\| = \sup\limits_{i \leq n_{t+1}} y^i \leq M(c)$.

Литература

I. М. М. Д е й. Нормированные линейные пространства. ИЛ, 1961.

Рукопись поступила в редакцию 30 декабря 1965 г.