О П Т И М А Л Ь Н О Е П Л А Н И Р О В А Н И Е

Сборник трудов

1966 г. Института математики СО АН СССР Выпуск 5

В. Л. МАКАРОВ

ЛИНЕЙНЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОИЗВОДСТВА

В работе рассматриваются методы построения, основные свойства и моделирующие возможности некоторых производственных моделей таких макроэкономических систем, как отрасль, группа отраслей, экономический район, народное хозяйство в целом.

Производство, в котором выпуск продукции представляет собой линейную функцию от затрат, адекватно описывается линейными моделями, наиболее общей из которых (при конечном интервале планирования) является основная модель производственного планирования Л.В.Канторовича [I].

В таких моделях процесс производства разлагается на некоторые элементарные акты, называемые технологическими или производственными способами. Нахождение наилучшего функционирования модели представляет собой экстремальную задачу, как правило, одну или ряд задач линейного программирования. (В моделях типа фон Неймана и некоторых других возникают экстремальные задачи, отличные от задачи линейного программирования). Значение линейных моделей далеко не исчерпывается тем, что они адекватно описывают процесс производства с линейными зависимостями. В случае, когда эти зависимости выпуклы, их всегда можно аппроксимировать линейными со сколько угодно большой степенью точности. Этот факт обсуждается в гл.П. Как показано в работе, вопросы линейной аппроксимации тесно связаны со свойствами функционирования частей модели в оптимальном режиме. Кроме того, линейные модели аппроксимируют некоторые невыпуклые зависимости.

В настоящее время одним из наиболее реальных путей построения развернутой модели народного хозяйства является путь последовательного объединения моделей отраслей. Поэтому исследование типов взаимосвязи различных частных моделей представляется актуальной задачей. Важная часть этой задачи - классификация моделей как по их экономическому содержанию, так и по сложности разрешающих алгоритмов. Ценно выявить именно наиболее типичные структуры задач, чтобы было оправдано создание специальных алгоритмов для их решения.

Глава I посвящена описанию некоторых наиболее часто встречающихся структур задач линейного программирования. Показывается, что именно такие структуры с необходимостью возникают при построении линейных макромоделей. Из содержания главы I можно извлечь некоторый более или менее стандарный способ построения макромоделей, основанный на расчленении процесса производства потребления и транспортировки на элементарные акты и на последовательном расширении и соединении частных моделей.

В главе II исследуются основные свойства рассматриваемых моделей, взаимодействие различных частей моделей в оптимальном плане. Приводятся также специальные приемы решения некоторых линейно-программных задач с технологической матрицей специального вида. Обсуждается один общий подход к нахождению оптимального функционирования макромоделей, который может оказаться весьма полезным при практической реализации математических методов оптимального планирования в народнохозяйственных задачах.

В работе рассматриваются два направления для создания алгоритмов решения задач линейного программирования большого объема со специальной структурой технологических матриц.

Первое направление состоит в применении обычных универсальных методов решения задач линейного программирования. Причем, благодаря специфическому виду матрицы, основные трудоемкие операции (такие как обращение матрицы, разложение вектора по базису) значительно упрощаются. Например, метод потенциалов для транспортной задачи есть применение общего метода разрешающих множителей к матрице, у которой строки имеют вид:

$$(c_i, 0, \ldots, 0, -1, 0, \ldots, 0, +1, 0, \ldots, 0, 0) .$$

Второе направление состоит в расчленении первоначальной задачи на части и организации процесса решения по определенной схеме.

Сначала производится решение каждой частной задачи независимо. На основании полученных решений составляется и решается некоторая координирующая задача. Решение последней позволяет внести изменения в исходные данные частных задач, после чего процесс повторяется. Таким образом, речь идет об итеративном процессе, где при каждой итерации либо решаются задачи линейного программирования среднего объема полностью, либо проделывается лишь несколько шагов по улучшению планов, полученных на предыдущем шаге итерации.

Отметим преимущества рассматриваемого подхода по сравнению с предыдущим.

1) Вычисления можно проводить, используя обычные программы для решения задач линейного программирования среднего объема (например, сочетание машинного счета с ручным управлением). Имеется возможность с помощью одних и тех же приемов решать задачи с матрицей, образованной различными комбинациями известных структур.

2) Нахождение оптимального плана большой экономической системы практически проще организовать, т.к. не требуется концентрации всей исходной информации в одном месте, в одном расчете.

3) Используемый принцип расчета моделирует реальный экономический процесс борьбы старой и новой технологий и поэтому представляет теоретический интерес. При таком расчете выявляется система показателей для оценки деятельности отдельных участков процесса производства с точки зрения общей задачи. Использование таких показателей при оценке деятельности предприятий, а также в системе материального стимулирования должно позволить гармонически сочетать частные интересы участников производства с общими народнохозяйственными интересами.

Для реализации этого второго направления, имеющего, таким образом, теоретическое и практическое значение, необходимо изучение взаимодействия частей модели, в частности, их взаимодействие в оптимальном плане. Изучение взаимного влияния частей плана полезно по многим другим причинам. Со свойствами такого взаимного влияния связаны возможности моделирования нелинейных зависимостей, а также вопросы установления критерия оптимальности для частных задач.

Важный вопрос, тесно связанный с предыдущим, - выяснение, насколько полно и какие стороны функционирования реальной экономической системы можно так моделировать.

В работе показывается, что задачи, основанные на применении экстремальных методов и, в первую очередь, методов линейного программирования, моделируют важные стороны экономического процесса, которые, по-видимому, и невозможно моделировать без применения этих экстремальных методов.

В экстремальных моделях, естественно, определяются основные экономические понятия, которые получают, таким образом, новое освещение.

Последний параграф главы II посвящен применению рассматриваемых моделей и их свойств к решению различных вопросов экономической науки и практики. Предлагается общий подход к использованию результатов и методов оптимального планирования в конкретных экономических вопросах. Этот подход иллюстрируется на весьма широком круге экономических проблем (цены, исчисление элементов себестоимости, показатель приведенных затрат).

Во введении не говорится об истории излагаемых вопросов. Частично это сделано в основном тексте.

Г л а в а I

Основные типы моделей

§ I. Понятие линейной динамической модели

Элементарные неразложимые части модели будем называть ингредиентами. Степень детальности модели, степень учета различных факторов определяются в основном номенклатурой ингредиентов. Каждый ингредиент характеризуется тремя индексами (k, i, t), где $k, (k=1,\dots K)$ пробегает номера выделенных видов благ, $i, (i=1,\dots n)$ пробегает номера районов, $t, (t=1,\dots T)$ пробегает номера интервалов времени.

Видами благ, участвующих в модели, могут быть различные виды сырья, продукции, услуг, различные виды ресурсов труда, а также природных ресурсов. Кроме того, видами благ являются производственные мощности. Мы под производственными мощностями будем здесь иметь в виду несколько более широкое понятие, и поэтому слово "мощность" будем брать в кавычки.

Поясним понятие "мощности" на примерах:

I) Отдельным видом "мощности" будет, например, некоторый тип электростанции, скажем, ТЭЦ мощностью 500-1000 квт, с себестоимостью I квт-ч электроэнергии 0,2-0,3 коп. и удельным расходом каменного угля 300-400 г. Количество этого вида "мощности" определяется суммарной мощностью ТЭЦ с описанными характеристиками.

2) Другой вид "мощности"- цементный завод с годовой производительностью 1000.000 т. цемента и себестоимостью 10 руб. (могут быть, кроме того, наложены ограничения на технологию и проч.). Количество этого вида "мощности" определяется сум-

марной годовой производительностью таких видов.

Сразу отметим, что выделение видов "мощности" зависит от степени точности, принятой в модели. В более упрощенной модели видом "мощности" может быть целый угольный бассейн, тогда как в более детальной модели отдельными видами "мощности" будут шахты или группы однотипных шахт.

Таким образом, виды "мощностей", т.е. элементарные неразложимые производственные единицы, характеризуют степень детальности модели.

Индекс j пробегает номера всех ингредиентов модели, т.е. тройки чисел (k, i, t), соответствующим образом упорядоченные. Общее число ингредиентов будем обозначать через m

$$j = 1, \dots m$$

Введем понятие технологического способа.

Технологическим способом с номером s называется элементарный экономический процесс, который характеризуется m-мерным вектором $a^{(s)} = (a_1^s, a_2^s, \dots a_m^s)$, где a_j^s $(j = 1, 2, \dots, m)$ показывает количество ингредиента, получаемого, если $a_i^s > 0$, или затрачиваемого, если $a_i^s < 0$, при применении способа $[s]$ с единичной интенсивностью. Для ингредиентов, не участвующих в данном способе, $a_i^s = 0$. Технологические способы предполагаются независимыми. Если бы между какими-нибудь двумя способами была некоторая зависимость, то они были бы объединены в один.

Все технологические способы разделяются на четыре типа:

I) Текущие технологические способы. Сюда относятся способы, в которых "мощности" только затрачиваются, но не получаются. Ингредиенты, отличные от нуля в этих способах, относятся к одному периоду времени.

2) Технологические способы капитального строительства. Сюда относятся способы, при использовании которых количество некоторых видов "мощности" увеличивается. Эти способы затрагивают, как правило, ингредиенты, относящиеся к различным периодам времени.

3) Вариантные технологические способы. К этому типу относятся способы, которые переводят один вид "мощности" в другой.

4) Способы транспортировки.

Способы первых трех типов затрагивают ингредиенты,относящиеся к одному району. Способы транспортировки из района R_{i_1} в R_{i_2} имеют отличными от нуля три компоненты: компоненту, относящуюся к затратам, компоненту, относящуюся к продукту, который вывозится из района R_{i_1}, и компоненту, которая относится к тому же продукту в районе R_{i_2}. Общее число технологических способов равно S $(s = 1,\ldots,S)$. Технологические способы являются, таким образом, операторами, которые преобразуют один набор ингредиентов в другой. Везде в дальнейшем они предполагаются линейными. Т.е. если интенсивность применения некоторого способа изменяется в λ $(\lambda > 0)$ раз, то затраты и выпуск ингредиентов изменяются в λ раз (однородность); при совместном применении нескольких способов общие затраты и выпуск продукции определяются сложением затрат и суммарным выпуском продукции по всем способам (аддитивность).

Модель связана с "внешним миром" с помощью так называемого вектора ограничений b, $b = (b_1,\ldots,b_m)$. Неравенство $b_j > 0$ показывает, что модель должна выдать вовне (например, для конечного потребления) ингредиент $[j]$ в количестве b_j. Соответственно, $b_j < 0$ показывает, что модель получает извне ингредиент $[j]$ в количестве b_j. Таким образом, указываются различные виды природных ресурсов и ресурсов труда, которыми модель может располагать в том или ином районе в тот или иной момент времени. Равенство $b_j = 0$ отражает тот факт, что по ингредиенту $[j]$ модель не связана с "внешним миром". Кроме того, для одного (и только для одного) из ингредиентов $b_{j_0} \equiv max$. Это означает, что модель (точнее, моделируемая система) должна так распорядиться своими ресурсами и технологическими способами, чтобы было выдано вовне нужное количество выходных ингредиентов и максимально возможное количество ингредиента $[j]$, по которому в векторе ограничений стоит знак max.

Итак, решением модели является неотрицательный вектор интенсивностей технологических способов $H = (h_1,\ldots,h_s)$, при котором все ограничения и балансы соблюдены и количество выделенного ингредиента принимает максимальное значение.

Определение решения модели представляет собой задачу линейного программирования вида:

$$a) \sum_s a_j^{(s)} h^{(s)} \geqslant b_j \quad (j = 2,\ldots,M),$$

$$b) \sum_s a_1^s h^s - max .$$

Матрицу $\|a_j^i\|$ будем называть матрицей технологических способов или технологической матрицей. Вектор H, удовлетворяющий условиям а), будем называть допустимым планом, или просто планом модели; вектор H, удовлетворяющий, кроме того, условию $б$), – оптимальным планом модели. Заметим, что любую задачу линейного программирования можно записать в виде условий а) и $б$).

§ 2. Структура технологических матриц динамических моделей

В этом параграфе мы опишем основные виды структур матриц технологических способов динамических задач, иллюстрируя часть из них на примере простой двухпродуктовой модели. Одновременно мы установим некоторые полезные преобразования, переводящие один вид технологической матрицы в другой, при которых соответствующие задачи линейного программирования оказываются эквивалентными.

1. Пример двухпродуктовой динамической модели производства.

В модели участвуют два продукта А и Б. Их можно рассматривать как некоторые аналоги продукции средств производства (А) и предметов потребления (Б). Продукты А и Б могут производиться предприятиями, отличающимися друг от друга фондоемкостью и производительностью труда. Продукт А частично идет на потребление, другая часть идет на строительство новых предприятий. Продукт Б полностью потребляется.

Информация о текущих производственных способах приведена в таблице I.(Набор способов не меняется при переходе от одного периода времени к другому).

Таблица I

№№ способов	Тип предприятия	Кол-во "мощн."	Труд	Пр-во прод.А	Пр-во прод.Б	Затраты прод.А на ремонт
I	2	3	4	5	6	7
I	I	I	I5	80	-	-
2	I	I	20	85	-	-
3	П	I	7	70	-	-
4	П	I	I5	II0	-	-

Продолжение таблицы I

I	2	3	4	5	6	7
5	Ш	I	20	900	-	-
6	IУ	I	3	210	-	-
7	IУ	I	5	300	-	-
8	IУ	I	I0	480	-	-
9	У	I	150	-	900	25
I0	У	I	200	-	I000	30
II	УI	I	50	-	500	40
I2	УI	I	75	-	550	50
I3	УП	-	50	-	I00	-

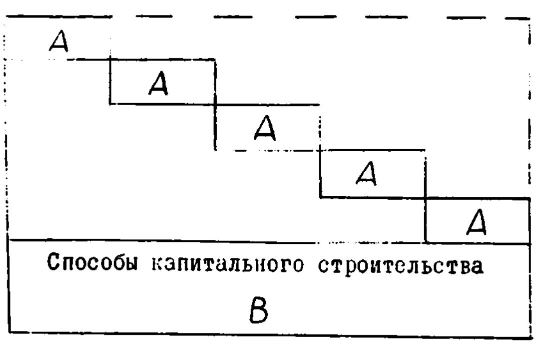
Данные о способах капитального строительства приведены в таблице 2.

Таблица 2

№№ способов	Тип предприятия	Затраты прод.А	К-во получ. "мощности"
I	I	80	I
2	П	I20	I
3	Ш	I500	I
4	IУ	600	I
5	У	80	I
6	УI	200	I

Срок службы всех типов предприятий предполагается значительно большим, чем $T = 5$, поэтому "мощность" предприятия, построенного в каком-нибудь периоде, переходит на все последующие.

Общая матрица способов будет иметь такой вид:



(I.2.I)

Здесь $A =$

Труд	"Мощн." I	II	III	IV	V	VI	Продукт А	Продукт Б
-15	-1	-	-	-	-	-	80	-
-20	-1	-	-	-	-	-	85	-
-7	-	-1	-	-	-	-	70	-
-15	-	-1	-	-	-	-	110	-
-20	-	-	-1	-	-	-	900	-
-3	-	-	-	-1	-	-	210	-
-5	-	-	-	-1	-	-	300	-
-10	-	-	-	-1	-	-	480	-
-150	-	-	-	-	-1	-	-25	900
-200	-	-	-	-	-1	-	-30	1000
-50	-	-	-	-	-	-1	-40	500
-75	-	-	-	-	-	-1	-50	550
-50	-	-	-	-	-	-	-	100

Ограничения извлекаются из следующих данных: имеется к началу первого периода 40 предприятий I типа, 30 предприятий II-типа и одно предприятие V типа

	1-й год	2-й год	3-й год	4-й год	5-й год
Ресурсы труда	1000	1020	1040,4	1061,21	1082,45
Потребление прод. А	1100	1202,58	1314,93	1438	1572,82
Потребление прод. Б	2100	2224,62	2357,0	2497,77	2647,35

Итак, технологическая матрица этой модели имеет вид (1.2.1.) Очевидно, что любая задача линейного программирования будет иметь матрицу такого вида, поскольку формирующие ее способы всегда распадаются на два множества: текущие способы, действующие внутри одного периода, и способы, действующие на протяжении ряда периодов.

2. Теперь заметим следующее. С помощью изменения поряд-

Матрица B =

I - й год									2 - й год									3 - й год									4 - й год									5 - й год								
I	2	3	4	5	6	7	8	9	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I	2	3	4	5	6	7	8	9	I	2	3	4	5	6	7	8	9
							- 80			I								I								I								I						
																	- 80			I								I								I						
																										- 80			I								I						
																																			- 80			I						
							-I20				I								I								I								I					
																	-I20				I								I								I					
																										-I20				I								I					
																																			-I20				I					
							-I500					I								I								I								I				
																	-I500					I								I								I				
																										-I500					I								I				
																																			-I500					I				
							-600						I								I								I								I			
																	-600						I								I								I			
																										-600						I								I			
																																			-600						I			
							- 80							I								I								I								I		
																	- 80							I								I								I		
																										- 80							I								I		
																																			- 80							I		
							-200								I								I								I								I	
																	-200								I								I								I	
																										-200								I								I	
																																			-200								I	

ка выписывания способов, добавления вспомогательных видов "мощностей" и некоторых других преобразований можно изменить вид матрицы весьма существенно, оставляя задачу линейного программирования той же самой. Причем такие преобразования технологической матрицы часто имеют простой экономический смысл. Мы рассмотрим два вида преобразований, полезных при исследовании динамических задач, на примере матрицы (I.2.I).

Первое преобразование основано на том, что способы капитального строительства записываются вместе с текущими способами того периода, в котором они осуществляются. А получающаяся в результате их применения "мощность" записывается не в столбцах, относящихся к следующим периодам, а в некоторых вспомогательных вновь вводимых столбцах. Кроме того, вводятся новые вспомогательные способы, которые переводят "мощности" из этих дополнительных столбцов в "мощности", относящиеся к соответствующим периодам.

Преобразуем в соответствии с этими соображениями матрицу (I.2.I.). Получим новую матрицу вида:

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}
\hline
0 & A & & & & \\
B_1 & A_1 & & & & \\
\hline
0 & & A & & & \\
B_2 & & A_2 & & & \\
\hline
0 & & & A & & \\
B_3 & & & A_3 & & \\
\hline
0 & & & & A & \\
B_4 & & 0 & & A_4 & \\
\hline
0 & & & & & A \\
\hline
\end{array}
\qquad (I.2.2)
$$

где

$A_I=$

Т	I	II	III	IV	V	VI	А	Б
							- 60	
							- 120	
							-1500	
							- 600	
							- 80	
							- 200	

$$B_1 = \begin{array}{|cccccccccccccccccccccccc|}
\multicolumn{4}{c}{\mathrm{I}} & \multicolumn{4}{c}{\mathrm{II}} & \multicolumn{4}{c}{\mathrm{III}} & \multicolumn{4}{c}{\mathrm{IV}} & \multicolumn{4}{c}{\mathrm{V}} & \multicolumn{4}{c}{\mathrm{VI}} \\
\hline
I&I&I&I & &&& & &&& & &&& & &&& & &&& \\
&&& & I&I&I&I & &&& & &&& & &&& & &&& \\
&&& & &&& & I&I&I&I & &&& & &&& & &&& \\
&&& & &&& & &&& & I&I&I&I & &&& & &&& \\
&&& & &&& & &&& & &&& & I&I&I&I & &&& \\
&&& & &&& & &&& & &&& & &&& & I&I&I&I \\
\hline
\end{array}$$

$$B_2 = \begin{array}{|cccccccccccccccccccccccc|}
\hline
&I&I&I & &&& & &&& & &&& & &&& & &&& \\
&&& & &I&I&I & &&& & &&& & &&& & &&& \\
&&& & &&& & &I&I&I & &&& & &&& & &&& \\
&&& & &&& & &&& & &I&I&I & &&& & &&& \\
&&& & &&& & &&& & &&& & &I&I&I & &&& \\
&&& & &&& & &&& & &&& & &&& & &I&I&I \\
-I&&& & &&& & &&& & &&& & &&& & &&& \\
&&& & -I&&& & &&& & &&& & &&& & &&& \\
&&& & &&& & -I&&& & &&& & &&& & &&& \\
&&& & &&& & &&& & -I&&& & &&& & &&& \\
&&& & &&& & &&& & &&& & -I&&& & &&& \\
&&& & &&& & &&& & &&& & &&& & -I&&& \\
\hline
\end{array}$$

$$B_3 = \begin{array}{|cccccccccccccccccccccccc|}
\hline
&&I&I & &&I&I & &&& & &&& & &&& & &&& \\
&&& & &&I&I & &&& & &&& & &&& & &&& \\
&&& & &&& & &&I&I & &&& & &&& & &&& \\
&&& & &&& & &&& & &&I&I & &&& & &&& \\
&&& & &&& & &&& & &&& & &&I&I & &&& \\
&&& & &&& & &&& & &&& & &&& & &&I&I \\
&-I&& & &&& & &&& & &&& & &&& & &&& \\
&&& & &-I&& & &&& & &&& & &&& & &&& \\
&&& & &&& & &-I&& & &&& & &&& & &&& \\
&&& & &&& & &&& & &-I&& & &&& & &&& \\
&&& & &&& & &&& & &&& & &-I&& & &&& \\
&&& & &&& & &&& & &&& & &&& & &-I&& \\
\hline
\end{array}$$

$$B_4 = \begin{array}{|cccccccccccccccccccccccc|}
\hline
&&&I & &&& & &&& & &&& & &&& & &&& \\
&&& & &&&I & &&& & &&& & &&& & &&& \\
&&& & &&& & &&&I & &&& & &&& & &&& \\
&&& & &&& & &&& & &&&I & &&& & &&& \\
&&& & &&& & &&& & &&& & &&&I & &&& \\
&&& & &&& & &&& & &&& & &&& & &&&I \\
&&-I& & &&& & &&& & &&& & &&& & &&& \\
&&& & &&-I& & &&& & &&& & &&& & &&& \\
&&& & &&& & &&-I& & &&& & &&& & &&& \\
&&& & &&& & &&& & &&-I& & &&& & &&& \\
&&& & &&& & &&& & &&& & &&-I& & &&& \\
&&& & &&& & &&& & &&& & &&& & &&-I& \\
\hline
\end{array}$$

$$A_2=A_3=A_4=\left[\begin{array}{cccccc} & & A_1 & & & \\ \hline 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & \end{array}\right]$$

Вектор ограничений для матрицы (I.2.2) будет иметь вид $(\underbrace{0,0,\dots,0}_{24}, b)$, где b – вектор ограничений для матрицы (I.2.I). Таким образом, мы получили эквивалентную запись задачи линейного программирования с технологической матрицей другой структуры ценой увеличения числа ингредиентов на 24.

Второе преобразование важно для теоретического исследования динамических задач. Оно заключается в представлении технологических способов в несколько иной форме. Именно, технологическим способом считается пара векторов одинаковой размерности: $a=(a_1,\dots,a_n)$ и $b=(b_1,\dots,b_n)$. У вектора b все компоненты неотрицательны, среди компонент вектора a могут быть и отрицательные. Если a неотрицателен, то он называется вектором затрат; вектор b называется вектором выпуска[x]. Кроме того, векторы a и b относятся к смежным периодам времени. В главе Ш § 5 будет указан способ сведения произвольной динамической задачи линейного программирования к такой форме, когда векторы a не содержат отрицательных компонент.

Основной операцией во втором преобразовании является замена способов капитального строительства, действующих в течение нескольких периодов, способами, захватывающими только два смежных периода. Такая замена достигается с помощью новых дополнительных способов и ингредиентов. После осуществления преобразования матрица модели приобретает вид:

---

x) Обычный вид матрицы технологических коэффициентов межотраслевого баланса основан на такой записи способов.

$$\begin{array}{|cccccc|} -A & B & & & & \\ & -A & B & & & \\ & & & & & \\ & & & & -A & B \end{array} \qquad (I.2.3)$$

Здесь A и B – матрицы, состоящие соответственно из векторов a и b. Если $A \geqslant 0$, то A называется матрицей затрат. Матрица B называется матрицей выпуска.

Рассмотрим второе преобразование на нашем примере, т.е. преобразуем матрицу (I.2.I). Текущие способы, составляющие пару матриц A, B, примут вид:

Т	I	П	Ш	IУ	У	УI	А	Б
I5	I						-80	
20	I						-85	
7		I					-70	
I5		I					-II0	
20			I				-900	
3				I			-2I0	
5				I			-300	
I0				I			-480	
I50					I		25	-900
200					I		30	-I000
50						I	40	-500
75						I	50	-550
50								-I00

Т	I	П	Ш	IУ	У	УI	А	Б
	I							
	I							
		I						
		I						
			I					
				I				
				I				
				I				
					I			
					I			
						I		
						I		

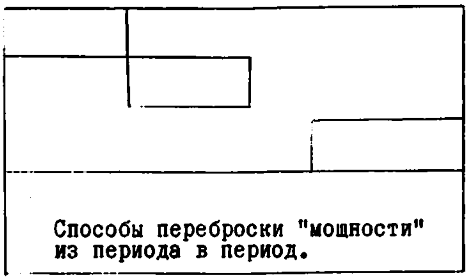
Соответственно, способы капитального строительства

Т	I	П	Ш	IУ	У	УI	А	Б
							80	
							I00	
							200	
							300	
							I00	
							300	

Т	I	П	Ш	IУ	У	УI	А	Б
	I							
		I						
			I					
				I				
					I			
						I		

Кроме того, добавляются способы переброски всех видов "мощности" из каждого периода в смежный.

Заметим еще, не приводя подробных обоснований, что матрицу динамической задачи легко привести к виду:



(I.2.4)

Способы, составляющие нижнюю часть матрицы (I.2.4), имеют вид $(0 \ldots 0, -1, 0 \ldots +1, 0 \ldots 0)$.

К вопросу об эквивалентных преобразованиях матриц задач линейного программирования необходимо добавить следующее.

Изучение эквивалентных преобразований технологических матриц может оказаться полезным по крайней мере в двух отношениях.

Во- первых, выясняется, к каким классам задач линейного программирования может принадлежать изучаемая задача. Это важно, т.к. иногда целесообразно пойти на некоторое увеличение размерности задачи, но зато решать ее более простым методом.

Во- вторых, формальным преобразованием технологических матриц часто соответствует некоторое экономическое содержание. Т.е. получается так, что после преобразования задача оказывается не тождественной первоначальной по экономической постановке. Вводимые преобразованием дополнительные (вспомогательные) ингредиенты иногда характеризуют новую сторону моделируемого экономического процесса. Подробнее об этом обстоятельстве см. § 7 главы П.

3. Продолжим исследование структуры технологических матриц линейных динамических моделей.

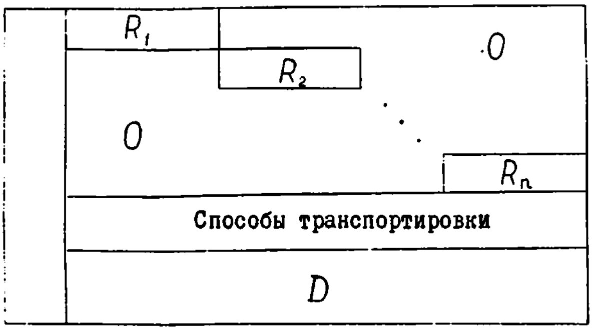
В § I мы уже разбили все способы на 4 большие группы по их экономическому содержанию. Кроме того, способы первых трех типов естественно разбиваются по территориальному признаку, т.е. в одну группу входят те способы, у которых отличные от нуля компоненты относятся только к одному району.

Технологические способы I,4 разбиваются на группы по принадлежности одному интервалу времени. Способы типов 2, 3 могут затрагивать ингредиенты, относящиеся к различным интервалам времени. Наконец, способы каждого из типов разбиваются на группы таким образом, что в одну группу входят технологические способы использования или создания одного вида "мощности".

Указанные разбиения множества способов, участвующих в макроэкономической модели, позволяют установить общую структуру ее технологической матрицы.

Выделим еще две (кроме рассмотренных на примере двухпродуктовой динамической модели) наиболее типичные структуры технологической матрицы. Первая связана с разбиением множества технологических способов по территориальному признаку, вторая – по отраслевому или производственному признаку.

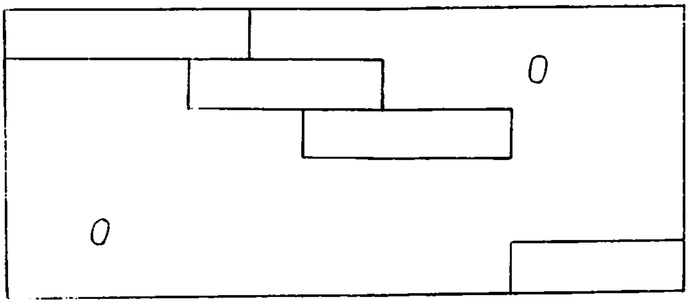
Обозначим матрицу способов, принадлежащих к одному району, через R_i. Тогда общая матрица будет иметь вид:



(I.2.5)

Здесь матрица D состоит из способов, не являющихся транспортными, но связывающими районы. Такими способами описывается строительство различных транспортных магистралей. Однако, как правило, эти способы можно формально считать принадлежащими одному району, и тогда матрица D отсутствует.

Различные отрасли связываются между собой по части ингредиентов. При этом общие для двух отраслей ингредиенты уже не встречаются ни в какой третьей отрасли. Поэтому у матриц R_i некоторая часть может иметь такую структуру:



(I.2.6)

Например, таким образом соединяются отрасли, упорядоченные по глубине переработки сырья. Самый верхний блок относится к добывающей отрасли. Следующий блок относится к отрасли первичной обработки сырья, добываемого первой отраслью и т.д.

Кроме того, естественным образом группируются способы, использующие один и тот же вид продукта. Это обстоятельство также приводит к тому, что технологическая матрица имеет некоторую специфическую структуру. Можно привести еще ряд признаков, по которым группируются способы.

Итак, общая матрица технологических способов имеет вид (I.2.5), ее блоки вид (I.2.I), блоки матрицы (I.2.I) могут иметь вид (I.2.6) и т.д. Упорядочив способы по-другому, можно добиться, чтобы общая матрица имела вид (I.2.I), ее блоки вид (I.2.5) и т.д. Ясно одно, что матрица любой линейной макромодели состоит из вложенных друг в друга матриц сравнительно небольшого числа типов структур. Строение технологической матрицы соответствует естественному разделению моделируемой экономической системы на части. Такими частями являются отдельная отрасль, группа отраслей, район, рассматриваемые в течение одного или нескольких интервалов времени. Каждая часть общей модели связана с другими частями, как правило, по значительно меньшему числу ингредиентов, по сравнению с общим числом, которые в ней участвуют. Кроме того, связи между различными частями описываются, как правило, небольшим числом стандартных способов. Поэтому, если выделить все части общей модели, и проследить все типы связей, то можно также прийти к выводу, что общая технологическая матрица имеет описанную специфическую структуру.

Дальнейший анализ динамической модели проведен в § 6 главы II. Здесь же мы рассмотрим более подробно задачу с матрицей (I,2.5) (без матрицы D).

§ 3. Производственно-транспортная задача

I) Назовем задачу линейного программирования с технологической матрицей (I.2.5) (матрица D отсутствует) производственно-транспортной задачей.

2) В каждой матрице R_i, $(i=1,2,\ldots,n)$ имеются ингредиенты, которые затрагиваются способами транспортировки, и ингредиенты, не затрагиваемые способами транспортировки. Первые будем называть транспортабельными, вторые - нетранспортабельными. Продукты, как правило, транспортабельны, "мощности" же - наоборот.

3) Линейно-программной функцией будем называть функцию $\Phi(X)$, определенную так:

$$\Phi_{+}(X) = \begin{cases} \max\limits_{h\in Q} \sum\limits_{s} c^s h^s, \quad Q=\{h: h>0, Ah\geqslant X, Bh\geqslant b\}, \\ \text{если } Q \text{ непусто}, \\ \text{не определена-в противном случае.} \end{cases}$$

Понятием линейно-программной функции мы будем часто пользоваться в дальнейшем.

Можно считать производственно-транспортную задачу обобщением обычной транспортной задачи. Действительно, первый шаг в сторону обобщения транспортной (или многопродуктовой транспортной) задачи был сделан тогда, когда вместе с затратами на перевозку стали учитывать затраты на производство продукта. Причем, если функция, выражающая зависимость затрат от объема производства, линейная или выпуклая, то модель не выходит за рамки транспортной задачи. Благодаря этому стало возможным использование модели транспортной задачи для выбора оптимального размещения предприятий (см., например, [2]). Кроме того, имеются модели на основе транспортной задачи, в которых, помимо затрат на производство, учитываются затраты у потребителя, связанные с использованием продукта. Такие модели используются, например, для расчета оптимального топливного баланса.

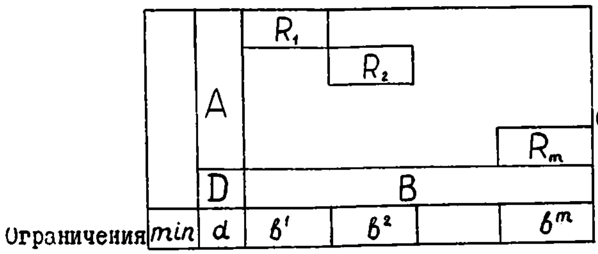
В производственно-транспортной задаче при оптимальном плане производства затраты в каждом районе представляют собой линейно-программную функцию от объема производства и объема потребления различных транспортабельных продуктов. Это утверждение будет более подробно рассмотрено в гл. II, где речь пойдет о свойствах оптимальных планов и методах решения рассматриваемых задач.

Для выяснения экономического смысла производственно-транспортной задачи дадим ее постановку в другой форме, без ссылки на вид матрицы (I.2.5.).

Другая формулировка производственно-транспортной задачи.

Имеется m районов ($i=1,\dots,m$), n транспортабельных продуктов ($j=1,\dots,n$) и $K=\sum_i \kappa_i$ нетранспортабельных продуктов (видов производственных мощностей и проч.). Производство и потребление в каждом районе $[i]$ описывается множеством технологических способов $\{a^{s_i}\}$ $(s_i=1,\dots,S_i)$. Начальное состояние производства и потребления каждого района задается вектором ограничений $b^i=(b_1^i,\dots b_n^i, b_{n+1}^i,\dots b_{n+\kappa^i}^i)$. Неравенство $b_j^i>0$ или $b_\kappa^i>0$ показывает, что в районе $[i]$ необходимо выдать для непроизводственного потребления продукты $[j]$ и $[\kappa]$ в количествах $|b_j^i|$ и $|b_\kappa^i|$. Соответственно, $b_j^i<0$, $b_\kappa^i<0$ означает, что в районе $[i]$ в начальный момент имеются ресурсы продуктов $[j]$ и $[\kappa]$ в количествах $|b_j^i|$ и $|b_\kappa^i|$. Способы транспортировки задаются с помощью матрицы $\|c_{i,i'}^j\|$, элементы которой показывают затраты на перевозку продукта $[j]$ из $[i]$ в район $[i']$. На транспортные магистрали могут быть наложены ограничения по пропускной способности. Кроме того, в задаче могут присутствовать ограничения, относящиеся ко всем районам (например, ограничения на общую сумму капиталовложений). Требуется найти допустимые планы $\bar{H}^i$ производства и потребления внутри районов $[i]$ и допустимый план транспортировки $\bar{H}_{mp}$ такие, что суммарные затраты на производство и транспортировку получают минимальное значение. Допустимость планов понимается в обычном смысле, т.е. $\bar{H}^i$ и $\bar{H}_{mp}$ должны удовлетворять ограничениям $\{b^i\}$ и всем дополнительным ограничениям. Легко видеть, что сформулированная задача является наиболее общей производственно-транспортной задачей (в рамках линейного программирования). В ее формулировке нет никаких специфических ограничений. Правда, на первый взгляд может показаться, что неясно, как учитываются различные виды взаимозаменяемости продуктов, потому что при фиксированных планах производства и потребления районов в получающейся многопродуктовой транспортной задаче нет никакой взаимозаменяемости. Однако все дело в том, что потребность районов тоже величина переменная и с ее помощью учитывается любой вид взаимозаменяемости продуктов. Например, если в некотором районе для производства одного и того же продукта могут использоваться два различных вида сырья, то это производство описывается различными технологическими способами, в зависимости от того, какое сырье потребляется. В соответствии с этим потребность в том и другом сырье варьируется в зависимости от плана производства района.

Общая матрица технологических способов сформулированной задачи линейного программирования имеет вид:



(I.3.I)

Здесь способы - строки матрицы (I.3.I). Последняя строка есть вектор ограничений. Матрицы A и D необходимы для записи дополнительных ограничений. $A=|d_p^s|$. B — матрица транспортных способов, имеющих вид $(0,\dots,0,-1,\dots,+1,0,\dots,0)$, $d=(d_1,\dots,d_p)$.

Покажем в заключение, что производственные затраты района представляет собой линейно-программную функцию от величин входных и выходных потоков ингредиентов. Входными потоками мы называем внешнюю потребность района в тех или иных продуктах, а выходными - производство продуктов для других районов.

Введем множества Q_i

$$Q_i=\{X^i : X^i=\sum_{s_i} a^{s_i} h^{s_i}, \quad \sum a_{n+k}^{s_i} h^{s_i} \geqslant b_{n+k}^i \},$$

$$X^i=(x_1^i,\dots,x_n^i).$$

Тогда в каждом районе $[i]$ при оптимальном плане производства затраты представляют собой линейно-программную функцию от переменной $X^i \in Q_i$.

§ 4. Один частный случай производственно-транспортной задачи. (Динамическая транспортная задача)

Если мы имеем производственно-транспортную задачу, в которой производственные затраты представляют собой выпуклую функцию от объема производства, то, заменив эту выпуклую функцию кусочно-линейной и продублировав пункты производства столько раз, сколько интервалов линейности у этой функции, получим обычную транспортную задачу. Однако, если требуется определить оптимальный план производства и транспортировки на ряд периодов, то мы не можем решать задачу для каждого периода отдельно, т.к. функция производственных задач от объема в каждом пункте в следующем периоде зависит от объема производства в этом пункте в предыдущий период.

Поясним на примере, какая зависимость имеется в виду. Предположим, что имеется угольный бассейн, существующий объем которого 100 тыс. тонн угля, средние затраты по добыче одной тонны - 1 рубль. Объем добычи можно расширить до 150 тыс.тонн, если затратить 100.000 рублей капиталовложений. Если предположить, что новое производство ведется с такими же затратами, то тогда на каждую тонну, добытую сверх 100 тыс., надо затратить 1 руб. + удельные капиталовложения. Теперь, если в первом периоде произведено в бассейне 120 тыс. тонн, то в следующем периоде первые 120 тыс. (а не первые 100 тыс.) оцениваются по 1 руб. за тонну, а все последующие по 1 руб. + удельные капиталовложения. Точная постановка возникающей здесь математической задачи приведена в [3]. Метод решения динамической транспортной задачи является некоторым усложнением метода потенциалов для решения обычной транспортной задачи. Динамическую транспортную задачу изучал также С.С.Сурин. [4].

В заключение главы I заметим следующее. Рассмотренные модели изучались здесь с целью выяснения структуры их технологических матриц. Вопрос о построении моделей был затронут чисто формально без увязки с конкретными производственными процессами и реальной экономической информацией. Проблема построения модели отрасли (на примере топливно-энергетической промышленности) на основе рассмотренных моделей была изучена в работах [3],[5],[6]. В этих работах даются различные варианты моделей оптимального развития топливно-энергетических отраслей, а также указываются способы расширения топливно-энергетической модели с помощью присоединения энергоемких производств.

Глава П

Возможности и свойства линейных динамических макромоделей. Некоторые методы их решения

§ I. Понятие части модели

В главе I подчеркивалось, что в любой из рассматриваемых макромоделей выделяются некоторые ее части. Такое разбиение модели на части совершенно естественно с экономической точки зрения, т.к. в реальном процессе производства, который модель описывает, такое разбиение на части действительно имеет место. Распадение общей модели на части происходит в основном по трем признакам: производственному, территориальному и временному. Практически части могут выделяться и в соответствии с административным делением (подчинением), которое не обязательно соответствует производственному или территориальному признаку. Возможны также комбинации всех трех признаков.

Любая часть линейной динамической модели представляет собой также линейную модель. Вектор ограничений $b=(b_1,\dots,b_m)$ в задаче линейного программирования, соответствующей линейной модели, будет называться иногда вектором значений входных и выходных игредиентов, или просто вектором входов и выходов модели. Это сделано на следующем основании. Если некоторое $b_j>0$, то, следовательно, модель при любом допустимом плане должна выдать вовне ингредиент j в количестве не меньшем чем b_j. Ингредиент j в этом случае называется выходным. Если $b_j<0$, то это означает, что в моделируемую систему "поступает" ингредиент j (называемый входным) в количестве b_j. При $b_j=0$ моделируемая система не имеет связи с "внешним миром" по ингредиенту j.

Определим теперь более формально понятие части модели. Пусть $\|a_i^s\|$ – матрица технологических способов и b -вектор ограничений некоторой модели. Произвольная подматрица $\|a_{j'}^{s'}\|$ матрицы $\|a_i^s\|$ и произвольный вектор ограничений b', соответствующий этой подматрице, образуют подмодель модели с технологической матрицей $\|a_j^s\|$ и вектором ограничений b. В соответствии с этим определением подмодель связана с моделью только по технологическим способам (как подматрица связана с матрицей) и никак не связана по вектору ограничений. В частности, выделенный для максимизации ингредиент в подмодели может быть иным. Таким образом, подмодель является таковой только по отношению к производственным возможностям (подмножество ингредиентов и подмножество операторов, действующих на эти ингредиенты), но не по отношению к связям с "внешним миром". Действительно, соответствие модели и подмодели по связям с "внешним миром" вряд ли естественно, т.к. "внешний мир" для подмодели не является частью "внешнего мира" модели. В следующем параграфе устанавливается несколько теорем относительно соотношений, в которых находятся различные части модели в оптимальном плане.

Обоснуем естественность, правомерность и удобство введения понятия линейно-программной функции, сформулированного в главе I § 3. Это понятие естественно возникает при отдельном рассмотрении оптимального функционирования частей модели. Линейно-программная функция $\Phi(X)$ в терминах линейной модели и "внешнего мира" описывает зависимость между значением целевой функции и значениями входных и выходных потоков модели, т.е., фигурально выражаясь, зависимость критерия качества работы моделируемой системы от влияния "внешнего мира".

Как известно, в оптимальном плане каждая его часть также оптимальна Это положение легко доказывается от противного, точно так же, как известный принцип оптимальности Беллмана. Поэтому любая часть модели в оптимальном плане задает линейно-программную функцию. Т.е. значение целевой функции частной модели (при оптимальном плане) есть линейно-программная функция от значений входных и выходных потоков ингредиентов этой модели. То же самое относится и к полной модели.

При моделировании вместе с процессами производства и потребления возникает задача определения максимального значения линейно-программной функции от "внешнего мира", описываемого некоторым множеством векторов ограничений для производственной части модели. При любом фиксированном векторе ограничений мы имеем обычную линейную модель производства (задачу линейного программирования). Часть модели, относящаяся к конечному потреблению, описывается множеством векторов ограничений для этой модели производства. Здесь мы не будем уточнять, каким конкретным способом описывается это множество ограничений для производственной модели. Это особый и чрезвычайно сложный вопрос. Заметим только, что решение полной модели (производства и потребления) состоит в отыскании максимального значения линейно-программной функции на множестве векторов, описывающем часть этой полной модели, относящуюся к потреблению. Задача нахождения максимума $\Phi_+(X)$ на многогранном множестве (или $min\ \Phi_-(X)$) представляет собой задачу линейного программирования некоторого специального вида, для которой существуют более простые методы решения. Эта задача возникает при последовательном осуществлении второго пути решения линейных макромоделей (задач линейного программирования большого объема). В параграфе 3 этой главы она подробно рассматривается.

§ 2. Признаки оптимальности планов линейных моделей и планов их частей

I. В § I главы I мы определили понятие оптимального плана линейной модели как решение соответствующей задачи линейного программирования. Приведем здесь основную теорему о характеристике оптимального плана, на которую будем часто ссылаться в дальнейшем изложении.

Теорема П.I.(см. [I] стр.272).

Оптимальный план модели, задаваемой неравенствами $\sum\limits_s a_j^s h^s \geqslant b_j$, характеризуется системой объективно обусловленных оценок, соответствующих всем ингредиентам, $\{\pi\}$ (решений двойственной задачи) такой, что выполнены следующие условия:

I. Все использованные в плане способы оправданы (рентабельны) по этим оценкам:

$$a^s\pi = 0 \qquad , \text{ если } \qquad h^s > 0 .$$

2. Все допустимые технологические способы не более чем оправданы
$$a^s \pi \leqslant 0 .$$

3. $\pi \geqslant 0 , \quad \pi_{j_0} > 0 , \quad b_{j_0} \equiv max .$

4. Если для некоторого ингредиента j в ограничениях $\sum_s a_j^s h^s \geqslant b_j$ имеет место строгое неравенство, то $\pi_j = 0$.

Наличие для плана системы о.о.оценок, удовлетворяющих перечисленным условиям I – 4, является необходимым и достаточным для того, чтобы план был оптимальным.

II. Линейно-программную функцию $\Phi(X)$ векторного аргумента X определим так:
$$\Phi_+(X) = \begin{cases} max\, ch \text{ при } Ah = X,\ Bh \leqslant b,\ h \geqslant 0 , \\ \text{если существует такое } h ; \\ \text{не определено–в противном случае.} \end{cases}$$
$\Phi_-(x)$ определяется аналогично, только вместо max берется min . Будем писать $\hat{\Phi}(X)$, если вектор b имеет нулевую размерность.

$\Phi_+(X)$ является вогнутой функцией, т.е.
$$\Phi_+(\lambda X' + (1-\lambda) X'') \geqslant \lambda \Phi_+(X') + (1-\lambda)\Phi_+(X''),\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 ,$$
для любых X' и X'' из области определения $\Phi_+(X)$ таких, что правая и левая части неравенства определены.

Действительно,
$$\lambda \hat{\Phi}(X', b) + (1-\lambda)\hat{\Phi}(X'', b) = \hat{\Phi}(\lambda X', \lambda b) + \hat{\Phi}((1-\lambda) X'', (1-\lambda)b) \leqslant$$
$$\leqslant \hat{\Phi}(\lambda X' + (1-\lambda) X'', b) = \Phi(\lambda X' + (1-\lambda) X'') .$$

По тем же соображениям $\Phi_-(X)$–выпуклая функция.

Заметим, что область определения $\Phi(X)$ – выпуклое множество.

Теорема П.2. Произвольная вогнутая (выпуклая) на ограниченном множестве Ω функция $f(X)$ может быть сколь угодно точно приближена $\Phi_+(X)$ (соответственно $\Phi_-(X)$).

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что для любой вогнутой функции $f(X)$, заданной на ограниченном множестве Ω , график которого представляет собой многогранную гиперповерхность, можно построить функцию $\Phi_+(X)$, совпадающую с $f(X)$ на Ω . Не ограничивая общности, можно считать Ω многогранником. Пусть $X^1 \ldots X^{k_1} \ldots X^{k_2}$ – точки, принадлежащие Ω , такие, что

$[f(x^1), x^1] \ldots [f(x^K), x^K]$ - все вершины гиперплоскости $y=f(x)$, а $x^{K_1+1}, \ldots, x^{K_2}$ - все вершины многогранника Ω.

Искомая линейно-программная функция $\Phi_+(X)$ задается соотношениями:

(I). $\sum_s X^s h^s = X$;

(2). $\sum_s h^s = 1$;

(3). $\sum_s f(X^s) h^s - max \qquad (s=1,2,\ldots,K_2)$.

Нам понадобится еще такой факт, известный из общей теории линейного программирования. Пусть π - вектор о.о.оценок компонент вектора X для задачи линейного программирования, определяющей $\Phi(X)$. Тогда $\pi = \nabla \Phi(X)$ (здесь ∇ - обозначение градиента).

Если для некоторого X оценки определены не однозначно, то с помощью специальных приемов (которые мы здесь излагать не будем) можно получить для каждой компоненты x_i вектора X правую и левую производные (которые всегда существуют и однозначно определены) функции $\Phi(X)$ по x_i. Поэтому мы будем считать, что $\nabla\Phi(X)$ определен для любого X, в котором определена сама $\Phi(X)$, и будем писать $\nabla \Phi(X) = \pi$, если π определен однозначно, и $\nabla\Phi(X+0_i) = \pi' + 0_i$, $\nabla\Phi(X-0_i) = \pi'' - 0_i$ - в противном случае.

Ш. Приведем две теоремы, характеризующие соотношение частей в оптимальном плане. Эти теоремы, вообще говоря, вытекают из основной теоремы П.I. о характеристике оптимального плана. Однако они полезны тем, что характеризуют оптимальный план с точки зрения взаимодействия между различными частями, и поэтому используются для обоснования алгоритмов решения задач линейного программирования, основанных на разбиении на части.

Пусть мы имеем задачу линейного программирования:

$$ch - max, \quad Q = \{h : Ah \geq b,\ h \geq 0\},$$

$$A = \| a_i^s \|, \ s = 1, \ldots, S, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Разобьем первоначальную задачу на две части так, что в одну часть попадут способы с индексом s', в другую - с индексом s''.

$$\sum_{s'} a_i^{s'} h^{s'} \geqslant x_i \quad , \quad c' h' - max \quad , \qquad (\text{П.2.I})$$

$$\sum_{s''} a_i^{s''} h^{s''} \geqslant b_i - x_i \quad , \quad c'' h'' - max \quad , \qquad (\text{П.2.2})$$

где $x_i = \sum_{s'} a_i^{s'} h^{s'}$, когда $\{h^s\}$ пробегает все допустимые планы. Множество всех таких X обозначим через Ω , т.е. $\Omega = \{X : x_i = \sum_{s'} a_i^{s'} h^{s'}, \ h^s \in Q\}$.

Теорема П.3. Пусть $\tilde{X} \in \Omega$ и о.о.оценки ограничений $\tilde{X}$ в задаче (П.2.I) не совпадают с оценками ограничений $b - \tilde{X}$ в задаче (П.2.2). Тогда план общей задачи, полученный из решения задач (П.2.I) и (П.2.2), можно улучшить, изменяя $\tilde{X}$ в сторону сближения о.о.оценок задач частей.

Сформулируем теорему в терминах линейно-программных функций.

Задачи (П.2.I) и (П.2.2) задают функции :

$$\Phi_+^1(X) \text{ и } \Phi_+^2(b-X). \ \tilde{\Phi}_+(X) = \Phi_+^1(X) + \Phi_+^2(b-X)$$

Тогда первоначальная задача эквивалента следующей:

Найти $\max_X \tilde{\Phi}_+(X)$ при $X \in \Omega$.

Теорема П.3 звучит так:

Пусть $\nabla \tilde{\Phi}_+(\tilde{X}) \neq 0$. Тогда существует $\tilde{\tilde{X}}$ такой, что $\tilde{\tilde{X}} \in \Omega$ $\tilde{\Phi}_+(\tilde{\tilde{X}}) > \tilde{\Phi}_+(\tilde{X})$.

Доказательство теоремы. Пусть H – оптимальный план первоначальной задачи. H^1 и H^2 – оптимальные планы задач (П.2.I.) и (П.2.2) при ограничениях $\tilde{X}$ и $b - \tilde{X}$. Оценки всех трех задач соответственно $\pi, \pi^{(1)}$ и $\pi^{(2)}$. Если взять в качестве $\pi^{(1)}$ и $\pi^{(2)}$ вектор π , то условия оптимальности планов $\bar{H}^1$ и $\bar{H}^2$ останутся ненарушенными, т.к. в противном случае сумма максимальных значений линейных форм задач (П.2.I) и (П.2.2) превосходила бы максимальное значение линейной формы общей задачи. В силу однозначности определения $\pi^{(1)}$ и $\pi^{(2)}$, $\pi = \pi^{(1)} = \pi^{(2)}$.

Итак, в настоящем пункте рассмотрен случай разбиения матрицы способов горизонтальной чертой.

В следующем пункте мы установим соотношение (в котором находятся части оптимального плана), полученное после разбиения технологической матрицы вертикальной чертой (т.е. разбиения по ограничениям).

IУ. Произвольную задачу линейного программирования

$$Ah \geqslant b, \quad (c,h)-max$$

можно понимать несколько по-иному.

Обычно мы считаем, что решение задачи линейного программирования заключается в назначении значений интенсивностей конечному числу способов. Чтобы рассмотреть иную интерпретацию задачи линейного программирования, введем ряд обозначений.

Разобьем матрицу способов A^* вертикальной чертой так, что каждый способ разделяется на две части.

Пусть i' - индекс, пробегающий ингредиенты I-й части .

i'' - индекс, пробегающий ограничений П-й части.

$a^{s'}$ - кусок способа a^s, относящийся к I-й части.

$a^{s''}$ - кусок способа, a^s относящийся ко П-й части.

Введем множество S .

$$S=\{X/X_{i'}=\sum_{s'} a^{s'}_{i'} h^{s'}, \ \sum_{s''} a^{s''}_{i''} h^{s''} \geqslant b_{i''}\} .$$

Теперь исходную задачу линейного программирования можно интерпретировать так. Надо назначить положительные интенсивности конечному множеству способов из S таким образом, чтобы удовлетворялись ограничения $b_{i'}$ и сумма по первой компоненте принимала максимальное значение.

Преимущество второго понимания решения задачи линейного программирования заключается в том, что все способы имеют меньшую размерность. Такое понимание задачи линейного программирования лежит в основе алгоритма, предложенного Данцигом и Вульфом [7], для решения больших задач линейного программирования. Особенно эффективен этот алгоритм для решения задач с технологической матрицей, имеющей вид (I.2.2), т.к. эту матрицу можно разбить так, что множество S будет объединением совершенно независимых множеств S_i , элементы которых имеют размерность, равную числу строк в блоках исходной матрицы.

Приведем теорему, характеризующую соотношение частей модели при оптимальном плане.

Теорема П.4. Пусть $\bar{h}$ есть решение задачи

$$(c,h)-max, \ \sum_{k} x^{k}_{i'} h^{k} \geqslant b_{i'}, \ \sum_{k} h^{k} \leqslant 1 ,$$

где $X^k \in S$, π - вектор оценок ингредиентов с индексом i' и π_0 – оценка ограничения $\sum_k h^k < 1$, соответствующие плану $\bar{h}$.

Пусть, кроме того, выполнено условие: $(\pi, \bar{\bar{X}}) \leq \pi_0$, где $\bar{X} = \sum_s a_{i'}^s \bar{\bar{h}}^s$, $\{\bar{\bar{h}}^s\}$ – есть решение следующей задачи линейного программирования: найти $\max((a^s, \pi), h)$ при $\sum_s a_{i''}^{s''} h^s \geq b_{i''}$. Тогда $\hat{h}$ есть решение первоначальной задачи линейного программирования, где $\hat{h}$ вычисляется по $\bar{h}$ и $\tilde{h}$, $(X_{i'}^{\kappa} = \sum_s a_{i'}^s \tilde{h}^s)$. Теорема легко доказывается от противного. Т.е. если условие $(\pi, \bar{X}) \leq \pi_0$ нарушено, то план $\bar{h}$ можно улучшить с помощью привлечения $\bar{\bar{X}}$.

§ 3. О методах расчета моделей с помощью разбиения на части

Сначала мы дадим общее описание метода решения линейных моделей с помощью разбиения на части, останавливаясь на его преимуществах, а далее отметим его конкретные реализации.

Общая идея метода состоит в следующем: первоначальная задача расчленяется на части. Каждая частная задача сначала решается независимо. Полученные частично-оптимальные планы частей подсказывают способ изменения исходных данных для этих локальных задач, после чего находятся следующие частично-оптимальные планы частей и т.д. Это определяет некоторый конечный или бесконечный итеративный процесс последовательных приближений.

Более определенно, но менее общо, можно сказать так. У каждой части исходной задачи любой допустимый для нее план характеризуется вектором входных и выходных потоков ингредиентов (т.е. некоторым способом). Из этих способов составляется новая задача, называемая обычно координирующей. По найденным в результате решения этой задачи о.о.оценкам далее определяется, найдется ли среди частных планов такой, который даст способ, улучшающий план координирующей задачи. Другими словами, определяется, можно ли для какой-либо из частей найти такое видоизменение плана, что эта часть приносит прибыль, если оценивать входные и выходные потоки продуктов по о.о. оценкам координирующей задачи.

Прежде чем приводить примеры, укажем некоторые достоинства этого метода, касающиеся не столько чисто вычислительной стороны, сколько практической организации вычислений для построения оптимального плана некоторой части народного хозяйства или народнохозяйственного плана в целом.

I. При сочетании машинного счета с ручным управлением расчетами и их координацией возможно решать задачи большого объема, используя имеющиеся программы и машинные средства для решения задач линейного программирования среднего объема. Действительно, на каждом шаге приходится решать только сравнительно небольшие линейно-программные задачи.

2. Нахождение оптимального плана не требует концентрации всей исходной информации в одном месте, в одном расчете. Более того, эта информация может пополняться на местах при возникновении надобности в ней (оперативность и непрерывность планирования).

3. Практически уже в процессе составления плана осуществляются хозрасчетные принципы. Процесс организации расчетов таков, что отдельные производственные единицы и объединения, исходя из своих собственных интересов, будут способствовать построению и реализации оптимального народнохозяйственного плана.

Последний пункт развит в работе [3] более подробно. Там описана принципиальная схема взаимоотношений различных плановых, административных, производственных органов при реализации итеративного процесса составления оптимального народнохозяйственного плана.

II. Перейдем теперь к конкретной реализации идеи разбиения задачи на части.

Рассмотрим сначала известный метод разложения, предложенный Данцигом и Вульфом [7]. Наше изложение существенно отличается от [7] , поэтому оно может представлять самостоятельный интерес.

План каждой частной модели характеризуется значениями входных и выходных потоков ингредиентов, т.е., вообще говоря, некоторым технологическим способом. Как правило, число ингредиентов, по которым частная модель связана с остальными частями, меньше, чем общее число ингредиентов этой частной модели. Рассмотрим один удобный способ разбиения общей модели на части, при котором каждая часть полностью характеризуется вектором входных и выходных ингредиентов, причем размерность этого вектора на единицу меньше размерности способов, составляющих общую задачу.

Пусть по ингредиенту $[j]$ общая модель не связана с "внешним миром", т.е. ограничение по нему равно нулю. Возьмем в качестве части модели пару способов $[s_1]$ и $[s_2]$, причем $[s_1]$ затрачивает ингредиент $[j]$, а $[s_2]$ его выпускает. Вектор ограничений для такой части состоит из одного ограничения, равного нулю по ингредиенту $[j]$. По остальным ингредиентам ограничений нет. План для рассматриваемой части примем такой, чтобы единственное ограничение строго выполнялось. Т.е. по этому плану ингредиент $[j]$ является внутренним. Тогда рассматриваемая часть, состоящая из двух способов $[s_1]$ и $[s_2]$, при этом плане будет характеризоваться вектором входных и выходных ингредиентов, имеющих размерность по крайней мере на единицу меньшую, чем $[s_1]$ и $[s_2]$. Обозначим этот результирующий вектор через $[s_{1,2}]$. Образуем таким образом все возможные части модели, составленные из пар векторов, в которых $[j]$ является внутренним. В число таких частей попадут и векторы $\bar{a}^s$, получающиеся из a^s вычеркиванием компоненты a_j^s, если $a_j^s > 0$. Фактически $\bar{a}^s$ есть часть, образованная способом a^s и $e^j = (0,\dots,\underset{j}{-1},\dots,0)$.

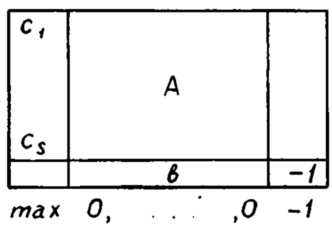
Покажем, что задача линейного программирования, составленная из всех возможных полученных описанным способом частей и тем же вектором ограничений, что и в первоначальной задаче (с вычеркнутой j - той компонентой), эквивалентна первоначальной задаче. **Таким образом, решение преобразованной задачи совпадает с решением первоначальной**

Допустимый план H преобразованной задачи является допустимым планом для первоначальной задачи. Действительно, ограничение по ингредиенту $[j]$ выполняется по построению способов преобразованной задачи, остальные ограничения выполняются вследствие того, что H допустимый план преобразованной задачи. С другой стороны, очевидно, что допустимый план первоначальной задачи является допустимым планом и для преобразованной.

Заметим, что если в первоначальной задаче число технологических способов S, то в преобразованной $\leqslant \left(\frac{S}{2}\right)^2$. Однако во многих практических случаях для некоторых видов ингредиентов (чаще всего производственных мощностей) число способов преобразованной задачи увеличивается незначительно. В связи с описанным методом разбиения задачи на части возникает вопрос об использовании его для решений задач линейного программирования с большим числом ограничений. Действительно, во многих случаях этот (метод) позволяет понизить размерность задачи за счет увеличения числа способов. Кроме того, такое разбиение на части дает способ сведения задачи линейного программирования к простому перебору элементов конечного множества, правда, в большинстве случаев число элементов этого множества очень велико. Способ состоит в следующем. Пусть имеется задача линейного программирования:

$$A^* H \geqslant b, \quad (c, H) - max.$$

Введем дополнительно в задачу технологический способ $(-1, b)$, (где - I относится к новому, вновь вводимому ингредиенту). Матрица технологических способов задачи и вектор ограничений примут вид:



Эта задача, как легко видеть, эквивалентна первоначальной. Вектор ограничений для нее имеет только одну отличную от нуля компоненту. Следовательно, к этой задаче можно применить описанную процедуру образования частей с помощью пар способов. После исключения одного ингредиента остается задача линейного программирования со способами на единицу меньшей размерности, чем у предыдущей. Процесс последовательного исключения ингредиентов продолжается до тех пор, пока технологические способы не будут иметь вид $(c_s, -1)$. Определение оптимального плана состоит в нахождении способа с максимальными c_s. Это максимальное c_s есть значение линейной формы в оптимальном плане. Прослеживая процесс получения способа $(\max\limits_s c_s, -1)$, можно восстановить план, ему соответствующий. Однако практически число способов вида $(c_s, -1)$ настолько велико, что решать таким образом задачи линейного программирования совершенно бессмысленно. Вместе с тем нетрудно заметить, что если этот процесс последовательного исключения ингредиентов доводить не до конца, т.е. иметь в качестве исходной некоторую задачу линейного программирования с таким числом ограничений m', чтобы с матрицей порядка $m' \times m'$ можно легко проводить необходимые вычисления. Но поскольку в базисном плане участвуют всего m' способов, то фактически процесс последовательного исключения ингредиентов нет необходимости проводить в полном объеме, чтобы получить все возможные способы размерности m'. Если текущий базисный план (состоящий, таким образом, из m' способов) не является оптимальным, то, следовательно, среди оставшихся способов, которые мы не имеем в явном виде, есть рентабельный по о.о.оценкам, соответствующим данному базису. Значит, если бы мы умели обнаруживать этот рентабельный способ среди всех возможных каким-нибудь простым путем, не обращаясь к перебору с помощью процесса исключения ингредиентов, то был бы получен метод решения задач линейного программирования с числом ограничений m.

Отыскание рентабельного способа может осуществляться решением некоторой вспомогательной задачи линейного программирования. Именно, эту задачу можно сформулировать так. Пусть $m = m' + m''$, т.е. m'' – число исключенных ингредиентов. Технологическими способами (без максимизируемого ингредиента) задачи будут способы первоначальной задачи с вычеркнутыми m' компонентами. Т.е. размерность способов равна m''. Ограничения по этим m'' ингредиентам совпадает с ограничениями первоначальной задачи. Максимизируемая компонента способа $[s]$ есть скалярное произведение вектора о.о.оценок текущего базиса на вектор вычеркнутых m' компонент способа $[s]$. Результат решения этой задачи указывает способ размерности m', который наиболее рентабелен по о.о.оценкам текущего базиса.

Метод разложения Данцига и Вульфа как раз и состоит в том, что способ, который следует привлечь для улучшения текущего плана, находится с помощью решения вспомогательной задачи линейного программирования. Признак оптимальности плана, по которому определяется окончание процесса, дается теоремой П.4.

Ш. В этом пункте рассматривается задача максимизации $\Phi_+(X)$ в выпуклом многогранном множестве. Эта задача как составная часть участвует в некоторых методах расчета моделей с помощью разбиения на части. Кроме того, она представляет самостоятельный интерес, поскольку любую вогнутую (выпуклую) функцию можно сколь угодно точно приблизить линейно-программной.

Рассматриваемая задача, есть задача линейного программирования со специальной структурой технологической матрицы. Действительно, пусть, например, $\Phi_+(X) = max\,(c,h)$

при $B_1 h \geq X$, $B_2 h \geq d$.

Тогда искомая задача линейного программирования выглядит так:

Найти $\max\limits_{h} (c,h)$ при

$$B_1 h - X \geq 0,$$
$$B_2 h \geq d,$$
$$AX \geq b,\ X \geq 0.$$

Матрица технологических способов для нее:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline A^* & E & 0 \\ \hline 0 & B_1^* & \bar{B}_2^* \\ \hline \end{array} \qquad (\text{П.3.I})$$

Здесь A^*- матрица, транспонированная к A, E-единичная матрица, $\bar{B}_2^*$-матрица, транспонированная к B_2, дополненная максимизируемым столбцом справа. Вектор ограничений: $(b, \underbrace{0,\ldots,0}_{n}, d, max)$. Задачу линейного программирования с матрицей вида (П.3.I) удобно решать методом разложения Данцига и Вульфа. В качестве координирующей части берется матрица $\begin{array}{|c|} \hline E \\ \hline B_1^* \\ \hline \end{array}$.

Поскольку задача максимизации $\Phi_+(X)$ есть частный случай задачи выпуклого программирования, то интересно посмотреть, как преобразуются алгоритмы решения задач выпуклого программирования в этом случае. Возьмем в качестве примера известный метод, предложенный Вульфом [8]. Сначала опишем кратко сам метод.

Исходная задача: Найти $min\, f(X)$

при $AX \geq b$, $X \geq 0$,

где $f(X)$ - выпуклая функция, дифференцируемая в области

$$\Omega = \{X;\ AX \geq b,\ X \geq 0\}.$$

Процесс начинается с точки X_0, являющейся вершиной многогранника Ω

I. Вычисляется $\nabla f(X^0)$.

2. Находится точка X^1, в которой достигается $\min$ линейной формы $(\nabla f(X^0), X)$ при $X \in \Omega$.

3. Находится точка Z^1, в которой достигается $\min f(X)$ на отрезке $\lambda X^0 + (1-\lambda)X^1$, $1 \geqslant \lambda \geqslant 0$.

Таким образом, настоящий процесс вычисления порождает две последовательности точек: $X^0, X^1, X^2, \dots, X^k, \dots$ и $Z^0 = X^0, Z^1, Z^2, \dots, Z^k, \dots$

Доказывается, что $f(Z^k) \to f(\bar{X})$ при $k \to \infty$, где $f(\bar{X}) = \min f(X)$ при $X \in \Omega$. Если $f(X) \equiv \Phi_-(X)$, то $\nabla f(X^k)^X$ есть вектор о.о.оценок ограничений X^k в задаче линейного программирования с матрицей

B_1^*	B_2^*	
X^k	d	$\min$

Определение $\min(\nabla f(X^k), X)$ при $X \in \Omega$ есть обычная задача линейного программирования. Поскольку $\Phi_-(X)$ не является гладкой функцией, то описанный процесс может не сходиться. Однако, если смешивать не две точки, а $n+1$ точек (n -размерность вектора X), т.е. искать $\min \Phi_+(X)$ не на отрезке, а на грани размерности n, то указанный процесс превращается в алгоритм разложения Данцига и Вульфа. Действительно, тогда определение точки Z^{k+1} есть процедура включения вектора $(-1, X^{k+1})$ в базисный план с матрицей

0	B_1^*	B_2^*	
-1	X^k		
-1	0	d	$\max$

Заметим, что процесс отыскания $\nabla \Phi_+(X^0)$ можно модифицировать следующим образом. Нахождение $\nabla \Phi_+(X^0)$ определяет собой решение задачи линейного программирования с матрицей

B_1^*	B_2^*	
X^0	d	max

При решении этой задачи начальный допустимый план H^0 определяется как обычно.

Теперь надо отыскать обычным способом столбец матрицы $\boxed{\frac{B_1}{B_2}}$, который улучшает план H^0. Модификация и заключается в том, что этот способ включается в план H^0 с максимально возможной интенсивностью, определяемой не ограничением X^0, а ограничениями d и Ω. Для этого надо разложить по H^0 не конкретное ограничение X^0, а все $X \in \Omega$. Другими словами, надо найти матрицу T преобразования единичного базиса в базис H^0. Далее, процедура включения нового способа h^{s_0} в H^0 такова: находим разложение h^{s_0} по H^0,

$$h^{s_0} = \bar\lambda_1 h_0^{s_1} + \ldots + \bar\lambda_n h^{s_n} \,..$$

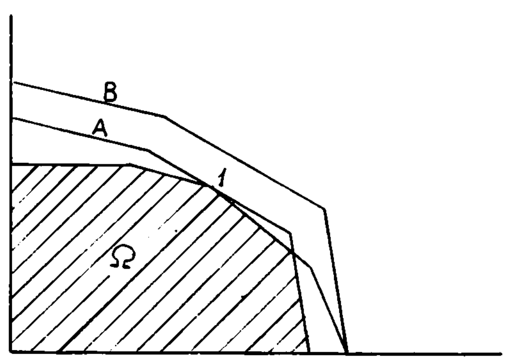
Решаем следующую задачу линейного программирования:
Найти $max\,\varepsilon$ при условиях:

$$AT\lambda \leqslant b; \quad \lambda - \varepsilon\bar\lambda \geqslant 0 .$$

Максимальное ε и будет интенсивностью, с которой h^{s_0} включается H^0.

IУ. В заключение параграфа рассмотрим задачу максимизации $\Phi_-(X)$ (задача ($*$) (соответственно минимизации $\Phi_+(X)$) в многограннике $\Omega = \{X : AX \geqslant b, X \geqslant 0\}$.

Задача ($*$) несравнимо более трудная, чем предыдущая, т.к. здесь локальный экстремум может не совпадать с глобальным. Поясним это обстоятельство на рисунке:



Здесь ломанные A и B -линии уровня для разных значений $\Phi_-(X)$. Ломанная A достигает в вершине I локального максимума, B достигает в вершине 2 глобального максимума. Из рисунка, в частности, видно что максимум выпуклой функции на многогранном множестве достигается всегда в вершине. Поэтому тривиальное решение задачи состоит в переборе всех вершин Ω. Более рациональным способом решения был бы перебор всех локальных максимумов, которых, как правило, меньше, чем всех вершин. Отыскание же локального максимума - задача, сравнимая по сложности с задачей линейного программирования. Чтобы облегчить оценку числа локальных экстремумов задачи, мы несколько преобразуем ее.

Эквивалентное преобразование задачи минимизации $\Phi_+(X)$.

Исходная задача: минимизировать $\Phi_+(X)$ в области

$$\Omega = \{X : AX \leqslant b,\ X \geqslant 0\}, \text{ где } \Phi_+(X) = \max_{h \in \Omega_X} (c, h)$$
$$\Omega_X = \{h : Bh \leqslant X,\ h \geqslant 0\} \qquad (\text{П.3.2})$$

и $\Phi_+(X)$ определена для любого $X \in \Omega$.

При каждом фиксированном X (П.3.2) представляет собой задачу линейного программирования. Запишем двойственную задачу к (П.3.2):

$$XY - \min$$

при $Y \in \Omega^*$, $\Omega^* = \{Y : B^* Y \geqslant c,\ Y \geqslant 0\}$,
где B^* - транспонированная матрица к B.

Будем предполагать, что множество Ω^* непусто. Тогда по теореме двойственности [9] для любого $X \in \Omega$:

$$\max_{h \in \Omega_X} (c, h) = \min_{Y \in \Omega^*} (X, Y). \qquad (\text{П.3.3})$$

Рассмотрим задачу (**): Найти $\bar{X} \in \Omega$ и $\bar{Y} \in \Omega^*$ такие, что $(\bar{X}, \bar{Y}) = \min_{X \in \Omega,\ Y \in \Omega^*} (X, Y)$.

Из (П.3.3) следует, что $\bar{X}$ доставляет минимум функции $\Phi_+(X)$ в области Ω, т.е. задача (**) решает исходную задачу. Поэтому можно считать, несколько грубо, обе задачи эквивалентными.

Из переформулировки задачи видно, что перебирать надо min из числа вершин Ω и Ω^*.

Замечание. В главе I были описаны способы построения моделей для процесса производства, которые можно разложить на элементарные акты с линейными зависимостями величин входных и выходных потоков. Однако многие экономические процессы обладают явно нелинейными зависимостями. Тем не менее, как показывает содержание настоящего параграфа, эти процессы могут имитироваться с помощью рассматриваемых в работе линейных макромоделей. Грубо говоря, возможность моделирования нелинейных зависимостей с помощью линейных возникает благодаря тому, что взятый как единое целое некоторый процесс, состоящий из линейных элементарных актов (технологических способов), имеет уже нелинейную зависимость величины выходных потоков от входных. (Линейно-программная функция).

Для экономических систем, стремящихся достигнуть некоего максимума, у которых все зависимости представляют собой выпуклые вверх функции, достаточно хорошими моделями будут линейные макромодели, определенные в I-й главе. Системы с другими производственными и экономическими зависимостями могут быть описаны с помощью моделей, являющихся соединением линейных макромоделей I-й главы. Отличие этих моделей от первых состоит в том, что в них одна часть стремится достигнуть максимума, а другая - минимума.

Чтобы закончить с вопросом о решении задач с помощью разбиения на части, отметим, что в работе [IO] рассматривается способ решения производственно-транспортной задачи, сформулированной в главе I § 3, основанный на комбинации идеи Данцига и Вульфа с идеей агрегирования продуктов разных районов. В следующем параграфе (§ 4) изложен способ решения динамической задачи линейного программирования частного вида, в котором исходная задача также разбивается на части (по периодам времени), причем этот способ опирается на известный итеративный алгоритм решения матричных игр Брауна-Робинсон,(см. [II]).

§ 4. Свойства оптимального плана и моделирующие возможности динамической задачи линейного программирования

Постановка динамической задачи линейного программирования приведена в главе I § 2. Канонической формой задачи будем считать ее формулировку с помощью матрицы (I.2.3), с дополнительным требованием неотрицательности элементов матрицы A .

Введем новые понятия.

I. Состоянием модели в период t будем называть вектор $X(t)$ – количество всех "продуктов" модели, имеющихся к началу периода t . ("Продукты" есть ингредиенты без различения по времени).

П. Пусть $Y = \big(Y(1), Y(2), \ldots, Y(T), Y(T+1)\big)$ – вектор ограничений для матрицы (I.2.3) модели. Т.е. $Y(t)$ – вектор количеств "продуктов", поступающих или изымаемых из системы в начале периода t: $Y(1) = X(1)$.
Будем называть $Y(t)$ внешним вектором или "нагрузкой" в период t .

Ш. $H(t) = \big(h^1(t), \ldots, h^s(t)\big)$ - вектор интенсивностей технологических способов в период t , называемый планом модели в период t .

IУ. Связь между $H(t)$ и $X(t+1)$ дается соотношением

$$X(t+1) = B*H(t) + Y(t+1).$$

У. $H(t)$ называется допустимым планом, если

$$A*H(t) \leq X(t).$$

УI. $\bar{H} = \big(\bar{H}(1), \ldots, \bar{H}(T)\big)$ называется оптимальным планом модели, если он является решением задачи линейного программирования с матрицей (I.2.3) и ограничениями Y .

УП. О.о.оценки ингредиентов в момент t будем обозначать через $\pi(t)$

УШ. Технологический (натуральный) темп роста модели $\alpha(t)$ при оптимальном плане в период времени t определяется так:

$$\alpha(t) = \frac{\big(X(t+1), \pi(t)\big)}{\big(X(t), \pi(t)\big)}, \qquad (\text{П.4.I})$$

где (X,Y) - обозначение скалярного произведения векторов X и Y.

IX. Экономический темп роста модели $\beta(t)$ при оптимальном плане в момент t:

$$\beta(t) = \frac{(X(t+1), \pi(t))}{(X(t+1), \pi(t+1))} . \qquad (П.4.2)$$

Другими словами, $\alpha(t)$ есть средневзвешенный по о.о. оценкам темп роста ингредиентов, $\beta(t)$ - средневзвешенный по количествам ингредиентов темп снижения оценок.

X. Будем называть модель замкнутой в I-м смысле, если $Y(t)=0$ для всех $t = 2, \ldots, T$. Другими словами,все что модель потребляет, она и производит. Условие замкнутости в I-м смысле, вообще говоря, нереально экономически применительно к модели большой экономической системы (народного хозяйства), т.к. воспроизводство некоторых факторов (труда, природных ресурсов) не может быть с достаточной степенью точности описано линейными технологическими способами. Такими способами можно описать создание рабочей силы определенной квалификации из рабочей силы низшей квалификации, но нельзя описать создание трудовых ресурсов вообще.

Однако условие замкнутости в I-м смысле присутствует в некоторых моделях экономических систем, в частности в модели Неймана (см.глава Ш § I), поэтому в целях сравнения нашей модели с Неймановской мы рассматриваем его, тем более, что в некоторых частных экономических ситуациях это условие имеет место.

Замкнутость модели во П-м смысле понимается обычным принятым в экономической науке образом. Т.е. модель замкнута во П-м смысле тогда, когда она не имеет сношений с остальным "внешним миром". Величина импорта и экспорта во все периоды времени равна нулю.

Можно называть еще, несколько условно, замкнутость в I-м смысле математической замкнутостью, поскольку она формулируется как чисто математическое требование (равенство нулю вектора ограничений), а замкнутостью во П-м смысле - экономической замкнутостью, поскольку она формулируется содержательно экономически. С математической точки зрения безразлично, откуда поступает некоторый продукт в систему, либо извне,как импорт, либо изнутри, как невоспроизводимый технологическими способами. С экономической же точки зрения здесь существенная разница.

Обладая понятиями замкнутости в двух смыслах, легко видеть, что $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ недостаточно полно характеризуют возможности развития динамической модели. $\alpha(t)$ показывает фактический темп роста модели, однако из него не видно, какими внутренними возможностями развития обладает сама модель, т.к. $\alpha(t)$ сильно зависит от "нагрузки" $Y(t)$. Поэтому мы введем еще дополнительные показатели темпа роста.

Пусть $Y(t) = Y'(t) + Y''(t)$,

где $Y'(t)$ - вектор внутренних ресурсов системы и ее конечного потребления; $Y''(t)$ - вектор величины экспорта и импорта.

$$\alpha'(t) = \frac{(X(t+1) - Y(t+1), \mathcal{P}(t))}{X(t), \mathcal{P}(t)} \qquad (\text{П.4.3})$$

$\alpha'(t)$ - собственно технологический темп роста, ибо $X(t+1) - Y(t+1)$ - количества продуктов, созданные в течение периода t технологическими способами.

$$\alpha''(t) = \frac{(X(t+1) - Y''(t+1), \mathcal{P}(t))}{(X(t), \mathcal{P}(t))} \qquad (\text{П.4.4})$$

$\alpha''(t)$ - внутренний технологический темп роста модели, не учитывающий влияния импорта и экспорта.

Легко установить соотношение между различными темпами роста при одном и том же плане в зависимости от величины вектора "нагрузки" $Y(t)$.

1. Неравенство $(Y(t+1), \mathcal{P}(t)) > 0 \quad (= 0, < 0)$ влечет:

$$\alpha(t) > \alpha'(t) \qquad (=\ ;\ <).$$

Аналогично устанавливаются соотношения между $\alpha'(t)$ и $\alpha''(t)$ и между всеми тремя видами темпов роста модели.

Рассмотрим более тонкий вопрос о соотношении между $\alpha(t)$ и $\beta(t)$. Для этого предварительно установим такой факт:

$$(X(t), \mathcal{P}(t)) = (X(t+1), \mathcal{P}(t+1)) - (Y(t+1), \mathcal{P}(t+1)),$$

$$t = 1, \dots, T-1\,. \tag{П.4.5}$$

Действительно, по теореме о характеристике оптимального плана имеем

$$(\pi(t), a^s) = (\pi(t+1), b^s)$$

для всех $[s]$, участвующих в оптимальном плане в период времени t. Отсюда

$$\Big(\sum_s a^s \bar{h}^s(t), \pi(t)\Big) = \Big(\sum_s b^s \bar{h}^s(t), \pi(t+1)\Big),$$

где

$$\sum_s a^s \bar{h}^s(t) = X(t), \quad \sum_s b^s \bar{h}^s(t) = X(t+1) - Y(t+1).$$

Вспомним теперь определения (П.4.I) и (П.4.2). Последнее можно, используя (П.4.5), переписать в таком виде:

$$\beta(t) = \frac{(X(t+1), \pi(t))}{(X(t), \pi(t)) + (Y(t+1), \pi(t+1))}\,.$$

Отсюда ясно, что если

$$(Y(t+1), \pi(t+1)) > 0 \qquad (=, <),$$

то

$$\alpha(t) > \beta(t) \qquad (=, <).$$

Далее мы выясним экономическую природу показателя $\beta(t)$. Определим в терминах нашей модели понятие нормы эффективности капитальных вложений. При этом мы будем исходить из следующего определения: норма эффективности капиталовложений ρ_t в период t показывает, насколько может быть увеличена достаточно малая сумма средств Z_t, добавленная в период t, при наиболее рациональном использовании ее к началу следующего $t+1$ -го периода. Другими словами, норма эффективности отражает эквивалентность суммы Z_t в период t с суммой $Z_t(1+\rho_t)$ в период $t+1$.

Посмотрим, что это означает в терминах нашей модели. Z_t – есть некоторый набор материальных благ в о.о.оценках $\pi(t)$. Т.е. $Z_t = (\pi(t), x)$. Рациональное использование средств Z_t понимается в том смысле, что их надо затрачивать в технологических способах, участвующих в период t в оптимальном плане. Определим теперь увеличение средств X в натуральном выражении за период. Пусть для простоты $X = \lambda a^{s_0}$ для некоторого способа $[S_0]$, участвующего в оптимальном плане в период t. Тогда способ $[S_0]$ переработает набор X в течение одного временного интервала в набор Y, $Y = \lambda b^{s_0}$.

Следовательно, темп прироста при исчислении в ценах $\pi(t)$ будет равен $\dfrac{(\pi(t),Y) - (\pi(t),X)}{(\pi(t),X)}$ или

$$\frac{(b^{s_0}, \pi(t))}{(a^{s_0}, \pi(t))} - 1 .$$

По теореме о характеристике оптимального плана

$$(a^{s_0}, \pi(t)) = (b^{s_0}, \pi(t+1)) ,$$

что как раз и отражает эквивалентность наборов a^{s_0} и b^{s_0} в смысле их влияния на оптимальный план.

Поэтому

$$\frac{(b^{s_0}, \pi(t))}{(a^{s_0}, \pi(t))} = \frac{(b^{s_0}, \pi(t))}{(b^{s_0}, \pi(t+1))} = \frac{(Y, \pi(t))}{(Y, \pi(t+1))} .$$

Итак, мы определили норму эффективности капиталовложений в период t, используя набор средств X или набор средств Y. Легко заметить, что если взять другой набор, то значение нормы эффективности может оказаться другим. Поэтому окончательно будем писать так:

$$\rho_t(X) = \frac{(X, \pi(t))}{(X, \pi(t+1))} - 1 . \qquad (П.4.6)$$

Это определение нормы эффективности совпадает с определением, данным в [I].

То обстоятельство, что значение нормы эффективности капитальных вложений зависит от набора ингредиентов, взятых в качестве единицы измерения, имеет глубокий смысл. Чисто формально этот факт вытекает из того, что в оптимальном плане, как правило, для любых двух наборов ингредиентов X и Y из

$$(\pi(t), X) = (\pi(t), Y)$$

не следует $(\pi(t+1), X) = (\pi(t+1), Y)$. Такое следование для любых X и Y имеет место только в том случае, когда $\pi(t) = \pi(t+1)\lambda$, т.е. соотношение между о.о.оценками в различные периоды времени остается постоянным. Условие, при котором такая ситуация имеет место, рассматривается в главе Ш. При настоящей же общей постановке динамической задачи невозможно определить норму эффективности, не задаваясь некоторым набором средств.

Выясним причины такого положения. Посмотрим на процесс задания матрицы о.о.оценок $\|\pi_i(t)\|$ чисто формально. Можно задать числа $\pi_i(t)$ не в виде матрицы, а несколько по-иному. Именно, вектор $\{\pi_i(t)\}$ задается как обычно, а векторы $\pi(t)$ $(t = 2, \ldots, T)$ известны только с точностью до постоянного положительного множителя, т.е. задано направление этих векторов, но не их длина. Будем обозначать через $\tilde{\pi}(t)$ некоторые векторы, совпадающие с $\pi(t)$ по направлению. Для определения длины имеются числа $\rho_t(X(t))$ и векторы $X(t)$. Вычисление, скажем, $\{\pi_i(2)\}$ происходит так: составляем уравнение

$$(\pi(1), X^1) = (1+\rho_1)(X(1), \lambda\,\tilde{\pi}(2)), \qquad (\text{П}.4.7)$$

в котором неизвестное есть λ.

$$\pi(2) = \bar{\lambda}\,\tilde{\pi}(2),$$

где $\bar{\lambda}$ – решение уравнения (П.4.7).

Этот второй способ задания матрицы о.о.оценок как раз основан на только что введенном понятии нормы эффективности капиталовложений.

Значение $\bar{\lambda}$ определяется тем набором ингредиентов, который берется в качестве единицы измерения. Таким образом, вопрос о норме эффективности тесно связан с вопросом о выборе для нее единицы измерения. Отметим несколько замечательных наборов ингредиентов, которые могут претендовать на роль единицы нормы эффективности капитальных вложений.

I. $\bar{X}^t$ – набор, о.о.оценка которого падает быстрее всего, т.е. $\rho_t(\bar{X}^t) = \max\limits_{X} \rho_t(X)$.
В случае, когда $\bar{X}^t$ единственный, в нем только одна компонента отлична от нуля, т.е. набор состоит из одного ингредиента.

П. $\bar{X}(t)$ – состояние модели в момент t (количества

"продуктов" в начале периода t). Из определения $\rho_t(X)$ следует, что $\rho_t(\bar{X}(t+1)) = \beta(t)$.
Отсюда яснее становится экономический смысл показателя $\beta(t)$.

Ш. $\hat{X}(t)$ - вектор количеств "продуктов", которые содержательно рассматриваются как капиталовложения.

$\hat{X}(t) \leqslant X(t)$, т.е. не все "продукты" и не полностью являются капиталовложениями. Часть количеств "продуктов" из вектора $\bar{X}(t)$ участвует в производстве как текущие затраты.

IУ. $X_з^t$ - набор ингредиентов, который определяется масштабом денег в период t . Масштаб денег зависит от политики ценообразования, и поэтому какие-либо заключения относительно его природы не могут иметь смысла. Масштаб денежных знаков может быть определен с помощью положительного вектора $Z = (Z_1, \ldots, Z_T)$. Мы сейчас определим значение нормы эффективности капиталовложений в зависимости не от набора "продуктов", а от этого масштабного вектора Z . Абсолютный уровень о.о.оценок определяется из уравнения

$$(\pi(1), \bar{X}(1)) = Z_1 \cdot$$

Из уравнения

$$(\pi(t), \bar{X}(t)) = Z_t$$

определяются "действующие цены" $\hat{\pi}(t)$. $\hat{\pi}(1) = \pi(1)$,

где

$$\pi(t) = \lambda_t \hat{\pi}(t),$$

$$\lambda_t = \frac{(\hat{\pi}(t), \bar{X}(t))}{Z_t}.$$

Таким образом, для того, чтобы можно было пользоваться для расчетов эффективности технологических способов действующими ценами $\hat{\pi}(t)$, их надо привести к о.о.оценкам с помощью коэффициентов λ_t . Отсюда легко вычислить значение нормы эффективности, зависящей теперь уже не от набора благ X , а от масштабного вектора Z . $\lambda_t = (1+\rho_1^z)(1+\rho_2^z)\ldots(1+\rho_{t-1}^z)$.

Отсюда

$$\rho_t^z = \frac{\lambda_{t+1} - \lambda_t}{\lambda_t}.$$

Вывод из определения и предварительного анализа модельного понятия нормы эффективности капитальных вложений состоит в том, что приведение разновременных затрат к одному моменту времени для правильного проведения всевозможных экономических расчетов должно производиться по единому показателю нормы для всей экономической системы (народного хозяйства в целом). Значение этой нормы определяется динамикой масштаба денег в системе, т.е., вообще говоря, политикой ценообразования, зависящей во многом от внеэкономических моментов. Вопрос о расчетах эффективности капитальных вложений с помощью показателя нормы эффективности в настоящем анализе не рассматривается. Его рассмотрение произведено в следующем пятом параграфе.

II. Вторая часть настоящего параграфа посвящена более конкретной стороне динамической модели линейного программирования. Основной вопрос, который нас здесь интересует, это вопрос о том, насколько содержательно имитирует модель, основанная на динамической задаче линейного программирования, поведение целой экономической системы, главным образом, производственной ее стороны, и что именно можно изучить с помощью такого ряда моделей.

Различные модели экономических систем изучались с давних времен. По развитию теории моделей можно проследить развитие экономической науки в целом, особенно теории воспроизводства. Бесспорно, что наиболее значительные достижения последней связаны с построением моделей. (Таблицы Ф.Кене, схемы воспроизводства К.Маркса, развитие их Лениным, межотраслевой баланс). Много моделей для экономической системы в целом и для отдельных ее сторон было построено и исследовано западными экономистами. (Модели Кейнса, Вальраса, Harrod'a, Domar'a, различные физические модели, [12]).

Уже на многих из этих моделей можно определить понятие цены, производительности труда, нормы эффективности капитальных вложений и др., которые, таким образом, в рамках математической модели приобретают совершенно точный смысл, и выводы относительно этих понятий приобретают силу математических теорем.

Однако во всех этих моделях существен в следующем смысле их статический характер: технологическая структура производства либо предполагается неизменной, либо заранее задается функция ее изменения. Другими словами, такие модели не отражают весьма существенную сторону реального развития экономических систем, именно того обстоятельства, что в процессе развития идет естественная конкуренция, борьба старого и нового в производстве, и все это тесным образом связано с формированием экономических характеристик системы, в частности, с формированием цен. Поскольку реальное развитие, реальная траектория состояний, которую выбирает экономическая система, по-видимому, доставляет экстремум некоторому функционалу[x], т.е. в каком-то смысле оптимальна, то использование в макромоделях экстремальных методов и, в первую очередь, аппарата линейного программирования, явилось новым, принципиальным шагом в моделировании экономических систем.

Динамическая задача линейного программирования, моделирующая экономическую систему, как раз учитывает экстремальный характер реального функционирования систем.

Можно предложить, например, такую интерпретацию некоторых сторон решения динамической задачи линейного программирования. Технологические способы без разделения по периодам (в рассматриваемом ниже примере типы предприятий) есть отдельные экономические ячейки, цель каждой из которых - добиться для себя максимальной выгоды. Эти ячейки знают все возможности технического прогресса на T лет вперед.

Пусть мы имеем некоторый план, т.е. наши ячейки развернули свое производство с какой-то интенсивностью. Тогда внутренним образом образуются цены на продукцию так, что все участники процесса получают равную прибыль. Если найдется ячейка, которая не участвовала в процессе производства и для которой по сложившимся ценам производство выгодно, т.е. она получает большую, чем другие, прибыль, то эта ячейка развертывает свое производство, вытесняя какое-нибудь старое предприятие и т.д. Несколько иная картина получается в том случае, когда участники процесса производства не имеют информации о будущем. Тогда в преимущественном положении окажется тот, кто наилучшим образом предвидел будущую ситуацию. Например, участник может пойти на то, чтобы получить меньшую прибыль в I-й год, чем он мог бы получить, но зато получить большую во П-й год и т.д.

Это нестрогое, туманное рассуждение приведено для того, чтобы как-то показать, что моделирование экономики с помощью динамических задач линейного программирования имеет отношение к реальному процессу технического обновления производства, который тесно связан с экономическими показателями, в частности, с ценами. И именно моделирование с привлечением

х) Сравните, например, эту гипотезу с вариационными принципами механики.

экстремальных методов позволяет изучать взаимодействие экономической и технической сторон в процессе производства.

В качестве простого иллюстративного примера рассмотрим задачу, сформулированную в главе § 2. На этой двухпродуктовой модели (продукт А - некоторый аналог средств производства, В- соответственно аналог предметов потребления)мы исчислим различные экономические показатели и проследим их изменение от периода к периоду и взаимоотношение между собой.

Решение задачи (оптимальный план при критерии оптимальности " *max* продукта А в последний период").

Таблица I

Тип предприятия	Способ использования	Кол-во предприятий на начало года	I-й год	П-й год	Ш-й год	IУ-й год	У-й год
I	-	наличие	40	40	40	40	40
	I	использов.	2,667	38,838	34,857	27,28	I5,42
П	-	наличие	30	30	30	30	30
	I	использов.	30	30	30	30	30
Ш	-	наличие	-	-	-	-	-
		использов.	-	-	-	-	-
IУ	-	наличие	-	0,497	7,I85	I8,48	37,64
	2	использов.	-	0,497	7,I85	I8,48	37,64
Ручн. труд.		наличие	600000				
		использов.		-	-	-	-
У		наличие	I	I	I	I	I
	I	использов.	I	-	-	-	-
IУ		наличие	-	4,45	4,7I4	4,996	5,29
		использов.	-	4,45	4,7I4	4,996	5,29

Объективно-обусловленные оценки, соответствующие этому плану

Таблица 2

	I-й год	2-й год	3-й год	4-й год	5-й год
Оценка продукта А	3,563	2,082	I,2I7	0,7II	I,0
Оценка продукта Б	9,500	I,869	I,092	0,638	0,898
Оценка труда	0,0I9	0,0III	0,0065	0,0038	0,0053
Оценка использования "мощн." предприятия I	0	0	0	0	0
Оценка использования "мощн."предприятия П	II6,38	86,0I4	39,748	23,23	32,67
Оценка использования "мощн."предприятия Ш	2826,4	2747,8	965,32	564,I5	I066,67
Оценка использования "мощн."предприятия IУ	I520,06	888,35	5I9,I64	303,40	426,67
Оценка использования "мощн."предприятия У	56II,I6	0	0	0	0
Оценка использования "мощн."предприятия УI	3657,65	296,II6	I73,05	I0I,I36	I42,2

Теперь мы будем считать, что расчетные цены, которые действуют в модели, совпадают с о.о.оценками.

Подсчитаем затраты на предприятиях в текущих ценах по годам на производство единицы выпускаемого ими продукта.

Таблица Ш

	Способы использования предприятий	I-й г.	2-й г.	3-й г.	4-й г.	5-й г.
Затраты на I-м предпр.	I	3,563	2,082	I,2I7	0,7II	I,0
	2	4,47	2,6I	I,527	0,892	
Затраты на 2-м предпр.	I	3,563	2,082	I,2I7	0,7I	I,0
	2	3,649	2,I33	I,246	0,728	
Затраты на 3-м предпр.		3,563	3,3	I,2I6	0,7I	
Затраты на 4-м предпр.	I	7,5I	4,39	2,54		
	2	5,38	3,I46	I,83		
	3	3,563	2,082	I,2I7	0,7II	I,0

	Способы использования предприятий	I-й г.	2-й г.	3-й г.	4-й г.	5-й г.
Затраты на ручн. труде		9,500	5,55	3,245		
Затраты на 5-м предпр.	I	9,500	I,90	I,45I		
	2	9,5I8	2,283	I,33		
Затраты на 6-м предпр.	I	9,5	I,87	I,092	0,64	0,9
	2	9,57	2,055	I,3I		

Подсчитаем также эффективность постройки всех предприятий в каждый год.

Таблица IУ

		I-й г.	2-й г.	3-й г.	4-й г.	5-й г.
Предприятие I	Затраты	285,0II	I66,565	97,343	56,888	80,0
	Отдача	-	0	0	0	0
Предприятие П	Затраты	427,5I6	249,847	I46,0I4	85,333	I20
	Отдача	-	I63,658	95,644	55,896	32,666
Предприятие Ш	Затраты	5343,96	3I23,09	I825,I85	I066,66	I520
	Отдача	-	5343,96	2596,I34	I630,8I	I066,66
Предприятие IУ	Затраты	2I37,58	I249,24	730,074	426,666	600
	Отдача	-	2I37,58	I249,24	730,074	426,666
Предприятие У	Затраты	285,II	I66,565	97,343	56,888	86
	Отдача	-	0	0	0	0
Предприятие УI	Затраты	7I2,528	4I6,4I2	243,358	I42,222	200
	Отдача	-	7I2,528	4I6,4I2	243,358	I42,222

Из таблиц Ш и IУ видим, что коль скоро в модели приняты цены, соответствующие о.о.оценкам, то "владельцы" предприятий, сообразуясь с собственной выгодой, вынуждены развертывать производство так, что оказывается реализованным именно оптимальный план, указанный в таблице I.

Этот факт, конечно, вытекает из общих теорем линейного программирования. Мы же здесь просто проиллюстрируем его на цифрах, стараясь показать, что он может иметь отношение к реальным процессам, происходящим в экономических системах. Описание экономики с помощью динамической задачи линейного программирования, конечно, во многом не полно. В частности, понятно, почему, скажем, в стихийной экономике не будут реализоваться цены, соответствующие о.о.оценкам оптимального плана. Вообще в моделях, основанных на динамической задаче линейного программирования, отсутствует такая важная сторона экономического процесса, как механизм функционирования экономики. Поэтому такие модели в советской литературе называются часто моделями оптимального перспективного планирования. В западной литературе их называют моделями оптимального роста, т.е. такими моделями, которые исследуют возможности наилучшего развития экономики, отвлекаясь от проблем практической реализации планов.

Таблица Ш и IУ являются результатом вычислений, которым в реальном экономическом процессе соответствуют индивидуальные расчеты каждого участника производства. Техника этих вычислений сводится к определению скалярного произведения двух векторов.

Чтобы определить эффективность нового технологического способа (нового участника процесса производства), надо вычислить скалярное произведение этого способа на вектор принятых в модели цен.

Вычислим теперь для рассматриваемой модели показатели, характеризующие развитие экономической системы в целом. Вообще говоря, для вычисления $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ требуется иметь исходную матрицу задачи в каноническом виде (I.2.3), причем A не должна содержать отрицательных элементов. Способ получения матрицы (I.2.3) с неотрицательной матрицей A описан в главе Ш § 5.

Однако здесь мы дадим способ вычисления $\alpha(t)$ без приведения исходной матрицы задачи к канонической форме. Для вычисления α достаточно записать исходную матрицу технологических способов в таком виде (матрица для одного интервала времени).

Это означает, что каждый интервал времени разбивается на две части и делается дополнительное предположение, что продукты А и Б получаются только во второй части интервала. Соответственно, труд поступает в модель в первой части интервала, а продукты А и Б потребляются во второй части интервала. Обозначим состояние модели перед началом первой части интервала t через $\overline{X}(t)$, а состояние перед второй частью этого же интервала через $\hat{X}(t)$.

T	$\overline{\mathrm{I}}$	$\overline{\mathrm{II}}$	$\overline{\mathrm{III}}$	$\overline{\mathrm{IV}}$	$\overline{\mathrm{V}}$	$\overline{\mathrm{VI}}$	A	$\overline{\mathrm{I}}$	$\overline{\mathrm{II}}$	$\overline{\mathrm{III}}$	$\overline{\mathrm{IV}}$	$\overline{\mathrm{V}}$	$\overline{\mathrm{VI}}$	A	Б	T	$\overline{\mathrm{I}}$	$\overline{\mathrm{II}}$	$\overline{\mathrm{III}}$	$\overline{\mathrm{IV}}$	$\overline{\mathrm{V}}$	$\overline{\mathrm{VI}}$	A
-15	-1							1						80									
-20	-1							1						85									
-7		-1							1					70									
-15		-1							1					110									
-20			-1							1				900									
-3				-1							1			210									
-5				-1							1			300					0				
-10				-1							1			480									
-150					-1		-25					1			900								
-200					-1		-30					1			1000								
-50						-1	-40						1		500								
-75						-1	-50						1		550								
-50															100								
														-80			1						
														-100				1					
														-200					1				
														-300						1			
														-100							1		
														-300								1	
			0					-1									1						
									-1									1					
										-1									1				
											-1									1			
												-1									1		
													-1									1	

Тогда можно вычислить $\alpha(t)$ по следующим формулам:

$$\alpha^{(1)}(t) = \frac{(\hat{X}(t), \mathcal{T}(t))}{(\bar{X}(t), \mathcal{T}(t))}, \qquad \alpha^{(2)}(t) = \frac{(\bar{X}(t+1), \mathcal{T}(t))}{(\hat{X}(t), \mathcal{T}(t))},$$

$$\alpha(t) = \alpha^{(1)}(t) \ \alpha^{(2)}(t).$$

Аналогичным образом определяется $\alpha'(t)$

$$\beta^{(1)}(t) = \frac{(\hat{X}(t), \mathcal{T}(t))}{(\hat{X}(t), \mathcal{T}(t+1))}, \quad \beta^{(2)}(t) = \frac{(\bar{X}(t+1), \mathcal{T}(t))}{(\bar{X}(t+1), \mathcal{T}(t+1))}$$

Таблица У

X(t)	T	I	II	Ш	IУ	У	УI	A	Б
$\bar{X}$(I)	I000	-	30	-	-	I	-	-	-
$\hat{X}$(I)	-	-	30	-	-	I	-	23I3,33	2I00
$\bar{X}$(2)	I020	-	30	-	0,4974	-	4,449	-	-
$\hat{X}$(2)	-	-	30	-	0,4974	-	4,449	-	-
$\bar{X}$(3)	I040,4	-	30	-	7,I846	-	4,7I4	-	-
$\hat{X}$(3)	-	-	30	-	7,I846	-	4,7I4	8337,I4	2357
$\bar{X}$(4)	I06I,2	-	30	-	I8,48	-	4,996	-	-
$\hat{X}$(4)	-	-	30	-	I8,48	-	4,996	I3I92,52	2497,7
$\bar{X}$(5)	I082,4	-	30	-	37,638	-	5,2947	-	-
$\hat{X}$(5)	-	-	30	-	37,638	-	5,2947	2I400,06	2647,3

Таблица 6.

		1-й г.	2-й г.	3-й г.	4-й г.	5-й г.
Производство продукта А	1	2313,330	5445,785	8337,136	13192,52	21400,06
	2	8241,59	11338,47	10144,549	9381,333	21400,06
Личное потребление продукта А	3	300	321,3	344,11	368,54	394,71
	4	1068,8	669	418,8	262,08	394,71
Общественное потребление продукта А	5	800	881,28	970,81	1069,45	1178,11
	6	2850,113	1834,88	1181,28	760,5	1178,11
Производство продукта Б	7	2100	2224,62	2357,0	2497,77	2647,4
	8	19950,8	4158,3	2574,8	1594,6	2376,7
Личное потребление продукта Б	9	1500	1584	1672,7	1766,38	1865,3
	10	14250,56	2960,86	1827,3	1127,7	1674,62
Общественное потребление продукта Б	11	600	648,72	701,39	758,34	819,92
	12	5700,23	1212,61	766,20	484,13	736,11
Заработная плата	13	19000,76	11326,42	6751,67	4024,63	5772,97
Совокупный общественный продукт	14	4203,33	7447,95	10458,44	15440,5	23783,18
	15	28192,37	15496,8	12719,35	10975,95	23776,78
Национальный доход	16	2528,33	5530,36	8435,6	13306,65	21531,6
	17	12784,3	11512,15	6806,91	9559,6	
Объем капиталовложений	18		1188,33	4065,23	6833,57	115554,69
	19		4234,0	8464,1	8315,02	8216,67
Трудовые ресурсы	20	1000000	1020000	1040400	1061208	1082432,16
Распределение капвложений А по отраслям	21		298,482	4012,278	6777,36	11494,96
			1063,38	8353,81	8246,62	8174,12
Б			889,8	52,95	56,21	59,83
	22		8453,89	98,98	61,4	38,2
% накопления в нац.доход	23	47	73,51	81,008	86,833	91,21
Затраты продукта А на ремонт предпр. отрасли Б	24	25	117,97	188,56	199,82	211,79
	25	89,066	370,54	229.41	142,1	211,79
Производство труда %% А		0,00925	0,0068	0,01036	0,016	0,026
Б		0,0028	0,01	0,01	0,01	0,01

t	I	II	III	IV
$\alpha^{(1)}$	3,007	2,691	1,92	1,332
$\alpha^{(2)}$	0,703	0,959	1,057	1,113
α	2,114	2,581	2,029	1,482
$\beta^{(1)}$	3,091	1,711	1,711	1,75
$\beta^{(2)}$	3,242	1,711	0,849	1,71

Чтобы закончить с примером, приведем без особых комментариев несколько упрощенный материальный и денежный баланс, а также некоторые другие показатели.

(Первая строка позиции баланса - количество в натуре, вторая - количество в о.о.оценках). См. таблицу VI. Вообще решение задачи показывает, что постепенно происходит процесс вытеснения способов более трудоемких способами более капиталоемкими, что отражает рост производительности труда. (См. строку 26 таблицы 6). Однако, в силу конечности числа способов в задаче, этот процесс не может продолжаться беспредельно, в конце концов в производство вступят самые передовые способы и технический прогресс прекратится. (В реальных задачах число способов не может быть конечным. Этот вопрос подробнее рассматривается в главе III). В нашем примере стабилизация успела произойти только на предприятиях группы Б, что можно заключить, например, по неизменности показателя производительности труда в этой группе.

Поскольку темп роста, заложенный в технологии, оказался существенно выше заданного темпа роста потребления, то процент накоплений в национальном доходе резко возрастает из года в год (строка 16 таблицы 6).

Т.к. цены на один и тот же продукт уменьшаются из года в год, то рост всех позиций баланса в натуральном выражении превосходит их рост в текущих ценах (о.о.оценках). (Например, объем капиталовложений, исчисленный в текущих ценах, даже уменьшается из года в год).

Нашим примером мы хотели проиллюстрировать следующие положения:

I. Не видно принципиальных трудностей, препятствующих получению на этом пути моделей, достаточно хорошо имитирующих реальные экономические процессы.

2. В рамках динамической модели линейного программирования такие экономические понятия, как цены, норма эффективности капиталовложений, точно определены, и известно, какими они должны быть, чтобы оптимальный план мог быть реализован. Отсюда следует, что любые другие значения величин цен и нормы эффективности капиталовложений дадут в рамках модели худший результат в смысле реализации оптимального плана.

Ш. В этом пункте мы укажем модификацию (упрощение) алгоритма последовательного улучшения плана [I] применительно к динамической задаче линейного программирования.

Упрощению подвергаются операции нахождения о.о.оценок и разложения нового способа по текущему базису. Поэтому мы ограничимся описанием этих операций, а также отметим один способ построения начального допустимого базисного плана. Изложение проводится для матрицы задачи линейного программирования, имеющей вид:

$$\begin{array}{cccccccccc} m & n & m & n & m & n & m & \cdots & m & n \\ \hline -\Phi_1^1 & A_1 & \Phi_1^2 & & & & & & & \\ & & -\Phi_2^1 & A_2 & \Phi_2^2 & & & & & \\ & & & & -\Phi_3^1 & A_3 & \Phi_3^2 & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & -\Phi_T^1 & A_T \end{array}$$

Здесь столбцы матриц $A_1, A_2, \ldots, A_T$ относятся к продуктам, трудовым ресурсам и др., которые могут участвовать в способах в качестве текущих затрат. В матрицах Φ_t^1 и Φ_t^2 столбцы относятся к различным видам производственных фондов и природных ресурсов.

Таким образом, большинство технологических способов в задаче имеет вид:

$$\left(-f_{1,t}^s \ldots -f_{m,t}^s ;\ a_1^s \ldots a_n^s ;\ +f_{1,t+1}^s , \ldots +f_{m,t+1}^s \right).$$

Заметим, что это представление способов существенно используется далее (в § 5 настоящей главы).

Построение допустимого базисного плана

Возьмем произвольный неотрицательный вектор:

$$\gamma = (\gamma_1^1, \ldots, \gamma_m^1 \ \gamma_1^2, \ldots, \gamma_m^2, \ldots, \gamma_1^{T-1}, \ldots, \gamma_m^{T-1}).$$

Например, в качестве γ можно взять вектор $(1, \ldots, 1)$. Содержательно $\gamma^t = (\gamma_1^t, \ldots, \gamma_m^t)$ будет характеризовать веса видов фондов $[1] \ldots [m]$, с которыми надо максимизировать их сумму. Таким образом, искомый начальный план получается из решения T задач линейного программирования. Именно, $H^1(0)$ получается из решения задачи линейного программирования с матрицей $\boxed{-\Phi_1^1 \mid A_1}$ и коэффициентами линейной формы $\Phi_1^2 \gamma^1$. Ограничения для этой задачи берутся из исходной задачи. Следующая задача (для периода 2) составляется совершенно аналогично, только часть ограничений, относящаяся к фондам, определяется из решения задачи для периода I.

Итак, описанный процесс есть не что иное, как последовательное решение задач линейного программирования для одного периода, начиная с первого. Если решение каждой задачи существует и не вырождено, то план $H(0)$ является допустимым базисным планом для исходной задачи. (Базис задачи имеет размерность $(m+n)\cdot T$). Если на каком-нибудь шаге получается вырожденное решение или решения не существует, то надо взять другой вектор γ^1. Однако в практических задачах это мало вероятно.

Вычисление о.о.оценок для $H(0)$

Обозначим искомый вектор оценок через $\pi(0)$. Компонентами $\pi(0)$ являются $\pi_i^t(0)$ и $\pi_{m+j}^t(0)$, где $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$.

В результате решения T задач линейного программирования для получения $H(0)$ получаются матрицы $B_1^{-1}(0), \ldots, B_T^{-1}(0)$, где $B_t(0)$ матрица способов, вошедших в план $H^t(0)$.

I. $\pi^T(0) = B_T^{-1}(0)\, C$, где C – вектор коэффициентов линейной формы исходной задачи.

2. $\pi^{T-1}(0) = B_{T-1}^{-1}(0) \left[\Phi_T^2(0)\left(\pi_1^T(0), \ldots, \pi_m^T(0)\right)\right].$

Далее, таким же образом последовательно определяются векторы

$$\pi^{T-2}(0), \ldots, \pi^{1}(0) .$$

Разложение способа $(-f_t^{s_0};\ a^{s_0};\ f_{t+1}^{s_0})$ по $H(0)$.

Здесь $f_t^{s_0}$ и $f_{t+1}^{s_0}$ m -мерные векторы a^{s_0} n -мерный вектор.

Обозначим искомые коэффициенты разложения через

$$\lambda = (\lambda^1, \ldots, \lambda^T);\qquad \lambda^t = (\lambda_1^t, \ldots, \lambda_{m+n}^t).$$

Если включаемый способ относится к периоду t, то ясно, что $\lambda^1, \ldots, \lambda^{t-1}$ равны нулю в силу необратимости времени.

$$1.\quad \lambda^t = (f_t^{s_0};\ a^{s_0})\, B_t^{-1}(0) .$$

$$2.\quad \lambda^{t+1} = \left[\Phi_t^2(0)\,\lambda^t\right] B_{t+1}^{-1}(0)$$

и так далее до λ^T.

После включения $[S_0]$ в $H(0)$ получившийся новый базисный план $H(1)$ уже может не обладать тем свойством, что все $\{H^t(1)\}$ имеют одинаковую размерность. Размерность одного из $H^t(1)$ может быть равна $m+n+1$. Однако соответствующая $H^t(1)$ матрица $B_t^{-1}(1)$ легко может быть вычислена при знании матрицы $B_t^{-1}(0)$. Для этого надо воспользоваться известным методом окаймления. См., например, [13].

Заметим, что размерность векторов $H^t(K)$ не может превзойти числа $2m+n$, а размерность плана $H^T(K)$ числа $m+n$.

Описание процедуры нахождения о.о.оценок и разложения способа по базису в случае, когда не все $H^t(K)$ имеют одинаковую размерность, проведем для $T = 3$. Соответствующая матрица задачи имеет вид:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\multicolumn{3}{c}{n_1} & \multicolumn{3}{c}{n_2} & \multicolumn{2}{c}{n_3} & \\
\Phi_0 & A_1 & \Phi_1^1 & \Phi_2^1 & & & & & \\
 & & \Phi_1^2 & \Phi_2^2 & A_2 & \Phi_1^3 & \Phi_2^3 & & \\
 & & & & & \Phi_1^4 & \Phi_2^4 & A_3 & C \\
q_1 & p_1 & \pi_1 & q_2 & p_2 & \pi_2 & q_3 & p_3 &
\end{array} \qquad (П.4.8)$$

Здесь B_1^{-1} имеет порядок $n_1 \times n_1$, B_2^{-1} - $n_2 \times n_2$ и B_3^{-1} - $n_3 \times n_3$; причем n_1, n_2 и n_3 таковы, что имеет место ситуация, показанная на рисунке (П.4.8). Для частей матриц Φ_1^t, Φ_2^t, относящихся к способам, вошедших в базис, сохраним те же обозначения, поскольку это не вызовет путаницы.

$\pi = (q_1\, p_1\, \pi_1\, q_2\, p_2\, \pi_2\, q_3\, p_3)$ - вектор о.о.оценок, соответствующий матрицам B_1^{-1}, B_2^{-1}, B_3^{-1}, который требуется определить. Нетрудно видеть, что вектор π удовлетворяет следующим уравнениям:

$$1.\ (q_3\,; p_3) = B_3^{-1}(C + \Phi_1^4 \pi_2).$$

$$2.\ (q_2\,; p_2\,; \pi_2) = B_2^{-1}(\Phi_2^3 q_3 + \Phi_1^2 \pi_1)$$

$$3.\ (q_1\,; p_1\,; \pi_1) = B_1^{-1}(\Phi_2^1 q_2).$$

Заметим, что системой I) - 3) можно воспользоваться для нахождения π итеративным методом. Именно, задаются $\pi_1(0)$ и $\pi_2(0)$. Векторы $\pi_1(1)$ и $\pi_2(1)$ находятся при подстановке $\pi_1(0)$ и $\pi_2(0)$ в I) - 3), и так далее. Ясно также, что, зная π_1 и π_2, с помощью уравнений I) - 3) легко определить оставшиеся компоненты вектора π. Поэтому задача состоит в том, чтобы вычислить π_1 и π_2 наиболее просто.

Мы здесь ограничимся указанием системы линейных уравнений для π_1 и π_2, которая составляется с помощью перемножения имеющихся матриц.

Из I) можно получить уравнения только для q_3, отбросив часть матрицы B_3^{-1}. Поэтому будем писать:

$q_3 = \overset{(q_3)}{B}{}_3^{-1}(C + \Phi_1^4 \pi_2)$, где через $\overset{(q_3)}{B}{}_3^{-1}$ - обозначаем соответствующую часть матрицы B_3^{-1}. Тогда система уравнений для π_1 и π_2 будет иметь вид:

$$4.\ \pi_2 = \overset{(\pi_2)}{B}{}_2^{-1}\left(\Phi_2^3 \overset{(q_3)}{B}{}_3^{-1}(C + \Phi_1^4 \pi_2) + \Phi_1^2 \pi_1\right),$$

$$5.\ \pi_1 = \overset{(\pi_1)}{B}{}_1^{-1}\left(\Phi_2^1 \overset{(q_2)}{B}{}_2^{-1}\left(\Phi_2^3 \overset{(q_3)}{B}{}_3^{-1}(C + \Phi_1^4 \pi_2) + \Phi_1^2 \pi_1\right)\right).$$

Заметим, что число уравнений в 4)-5), как правило, очень мало, хотя максимальное число может быть сравнительно большим.

Как уже отмечалось выше, здесь не исследуется вопрос о наиболее экономном способе вычисления π_1 и π_2, в частности, вопрос о том, как перестраивать систему 4)-5) при переходе к следующему шагу.

Разложение способа по базису матрицы (П.4.8) происходит аналогичным образом.

Действительно, обозначим искомый вектор коэффициентов разложения через $\lambda = (\lambda^1, \ldots, \lambda^T)$, $\lambda^t = (\lambda^t_1, \ldots, \lambda^t_{n_t})$. Пусть разлагаемый способ $[S^\circ]$ принадлежит второму периоду и имеет вид $(f^{S_\circ}_{t,1}, f^{S_\circ}_{t,2}, a^{S_\circ}_1 f^{S_\circ}_{t+1,1}; f^{S_\circ}_{t+1,2})$, где компоненты $f^{S_\circ}_{t,1}$ соответствуют столбцам матрицы Φ^2_1, компоненты $f^{S_\circ}_{t,2}$ столбцам матрицы Φ^2_2. Векторам $f^{S_\circ}_{t+1,1}$ и $f^{S_\circ}_{t+1,2}$ соответствуют матрицы Φ^3_1 и Φ^3_2.

Тогда λ удовлетворяет системе:

6. $\lambda^1 = (f^{S_\circ}_{t,1} - \lambda^2 \Phi^2_1) B^{-1}_1$;

7. $\lambda^2 = (\lambda^1 \Phi^1_2 + f^{S_\circ}_{t,2}, a^{S_\circ}, \lambda^3 \Phi^4_1 + f^{S_\circ}_{t+1,1}) B^{-1}_2$;

8. $\lambda^3 = (f^{S_\circ}_{t+1,2} - \lambda^2 \Phi^3_2) B^{-1}_3$.

В 6) векторы $f^{S_\circ}_{t,1}$ и $\lambda^2 \Phi^2_1$ надо понимать дополненными нулями слева до размерности n_1, соответственно, в 8) векторы $f^{S_\circ}_{t+1,2}$ и $\lambda^2 \Phi^3_2$ имеются в виду дополнеными нулями справа до размерности n_3. Из 6) - 8) легко видеть, что, располагая векторами $\lambda^2 \Phi^2_1$ и $\lambda^2 \Phi^6_2$, можно вычислить λ. Так же, как и при вычислении π, можно использовать итеративный процесс нахождения векторов $\lambda^2 \Phi^2_1$ и $\lambda^2 \Phi^3_2$ (которые, кстати, имеют те же размерности, что и π_1 и π_2). Для неизвестных векторов $\lambda^2 \Phi^2_1$ и $\lambda^2 \Phi^3_2$ составляется и решается система той же размерности, что и для π_1 и π_2. При переходе от шага к шагу размерность вспомогательных систем для π_1, π_2 и $\lambda^2 \Phi^2_1$, $\lambda^2 \Phi^3_2$ может увеличиваться только на единицу, и, как правило, остается достаточно малой.

Замечание.

Поскольку матрицы Φ_1^t, Φ_2^t в реальных задачах часто имеют специфический вид, именно:

$$
\Phi^t = \begin{bmatrix}
+1 & & & & & \\
\vdots & & & & & \\
+1 & & & & & \\
 & +1 & & & & \\
 & \vdots & & & & \\
 & +1 & & & & \\
 & & & & & +1 \\
 & & & & & \vdots \\
 & & & & & +1
\end{bmatrix},
$$

то B_t^{-1} имеет более простую природу. Разработан алгоритм решения задачи линейного программирования (см.[14]), в котором довесок к задаче в виде матрицы такого типа учитывается особым образом. В результате все операции осуществляются с матрицами A_t , имеющими число столбцов n . В частности, хранятся обратные матрицы порядка $n \times n$.

Представляет интерес исследовать условия на исходную задачу линейного программирования, при которых применение описанного алгоритма решения не приводит к изменению размерности матриц $B_t(k)$ от шага к шагу. Т.е. способ, который необходимо включить в базис для улучшения имеющегося плана, всегда вытесняет способ, относящийся к тому же периоду времени, что и включаемый способ.

В заключение этого параграфа рассмотрим способ решения динамической задачи линейного программирования, опирающейся на известный метод решения матричных игр Брауна - Робинсон, [11].

Этот способ излагается применительно к задаче, имеющей матрицу следующего вида:

$$
\begin{array}{|c|c|c|c|c|}
\hline
-\Phi_1^1 & A_1 & \Phi_1^2 & & \\
\hline
\multicolumn{2}{|c|}{} & -\Phi_2^1 & A_2 & C \\
\hline
\end{array}
\qquad (\text{П}.4.9)
$$

Здесь весь плановый период разбит только на два временных интервала.

Итак, задача состоит в том, чтобы, умея находить оптимальный план для одного периода времени, определить оптимальный план для всей исходной задачи.

Обозначим через $H(1)$ вектор интенсивностей способов, порождающих матрицы Φ_1^1, A_1, Φ_1^2; и через $H(2)$ вектор интенсивностей способов, составляющих матрицы Φ_2^1 и A_2.

Описание способа решения

I. Берется произвольный неотрицательный вектор γ размерности m. Содержательно вектор γ будет характеризовать веса видов фондов, с которыми надо максимизировать сумму фондов.

Решается задача для первого временного интервала:

$$H(1)\Phi_1^1 \leq f_0 \,,$$

$$H(1)A_1 \geq b^{(1)} \,,$$

$$H(1)\Phi_1^2\gamma - \max$$

где f_0 и $b^{(1)}$ - векторы ограничений для матриц Φ_1^1 и A_1 соответственно. В результате решения получается вектор количеств фондов, имеющихся к началу второго периода, $X(1)=H(1)\Phi_1^2$.

2. После получения вектора $X(1)$ решается задача для второго временного интервала:

$$H(2)\Phi_2^1 \leq X(1) \,,$$

$$H(2)A_2 \geq b^{(2)} \,,$$

$$H(2)C - \max .$$

В результате решения получаем вектор $\pi(1)$, где $\pi(1)$ есть о.о.оценки для стобцов матрицы Φ^{11}.

3. Повторяются операции пункта I., только вместо γ берется $\pi(1)$. В результате определяется $U(2)$.

$$X(2) = \frac{X(1) + U(2)}{2}$$

4. Повторяются операции пункта 2. с вектором $X(2)$ вместо $X(1)$. Определяется вектор о.о.оценок $V(2)$.

$$\pi(2) = \frac{\pi(1) + V(2)}{2}$$ и т.д., т.е.

$$X(k) = \frac{X(1) + X(2) + \ldots + X(k-1) + U(k)}{k}, \quad \pi(k) = \frac{\pi(1) + \pi(2) + \ldots + \pi(k-1) + V(k)}{k}.$$

Критерий остановки вычислений такой же, как в обычных итеративных процессах.

Доказательство сходимости описанного процесса.

Для доказательства проделаем некоторые эквивалентные преобразования первоначальной задачи.

Первое преобразование.

Исходная задача (I): Найти $\max CH(2)$

при $H(1)\Phi_1^1 \leq f_0$, $H(2)\Phi_2^1 \leq X$,

$H(1)A_1 \geq b^{(1)}$, $H(1), H(2) \geq 0$.

$H(2)A_2 \geq b^{(2)}$,

$H(1)\Phi_1^2 = X$,

Обозначим через Ω множество всех допустимых векторов X, т.е.

$\Omega = \{X \mid X = H(1)\Phi_1^2$, $H(1)$ – допустимый план задачи I$\}$.

Пусть зафиксирован некоторый вектор $X \in \Omega$. Тогда к задаче:

$\{\max\limits_{H} CH(2)$ при $H(2)\Phi_2^1 \leq \bar{X}$, $H(2)A_2 \geq b^{(2)}\}$

двойственной будет задача: $\{\min\limits_{\pi, p} \bar{X}\pi + b^{(2)}p$, $\pi, p \geq 0\}$.

при $A_2 p - \Phi_2^1 \pi \leq C$.

Пусть $\Omega^* = \{(p, \pi) \mid A_2 p - \Phi_2^1 \pi \leq C$, $p, \pi \geq 0\}$.

Поскольку по теореме двойственности линейного программирования при любом допустимом векторе X

$\min\limits_{(\pi,p) \in \Omega^*} (X\pi + b_2 p) = \max CH(2)$, где $H(2)$ принадлежит множеству, задаваемому ограничениями

$\{H(2)\Phi_2^1 \le X,\ H(2)A_2 \ge B^{(2)},\ H(2) \ge 0\}$, то исходная задача (I) эквивалентна следующей:

Задача 2: Найти $\max\limits_{X} \min\limits_{(\pi,\rho)} (X\pi + B^{(2)}\rho)$,
где $X \in \Omega$, $(\pi,\rho) \in \Omega^*$.
Задача 2 есть некоторая игра, в которой стратегии игрока I есть $X \in \Omega$, стратегии игрока П есть $(\pi,\rho) \in \Omega^*$.

П-е преобразование.

Задачу (2) преобразуем в эквивалентную ей матричную игру следующим образом. Предварительно сделаем допущение, что Ω и Ω^* – ограниченные множества. Ω в реальных задачах всегда ограничено. Ω^* можно сделать ограниченным с помощью дополнительных ограничений, которые не отсекают оптимальных статегий. Пусть $q_1, \dots, q_K$ – все вершины многогранника Ω , а $\Gamma_1, \dots, \Gamma$ – все вершины Ω^* . Тогда любой $X \in \Omega$ запишется (параметрически) в виде $X = \sum \lambda_K q_K$, соответственно $(\pi,\rho) = \sum\limits_{t} \gamma_t \Gamma_t$, где $\sum\limits_{K} \lambda_K = 1$, $\lambda_K \ge 0$, $\sum\limits_{t} \gamma_t = 1$, $\gamma_t \ge 0$.
Задача 2 в новых переменных λ и γ будет иметь вид:

$$\max_{\lambda} \min_{\gamma} \sum_{K} \sum_{t} \lambda_K C_{Kt} \gamma_t ,$$

где $C_{Kt} = q_K \Gamma_t$ для всех пар (K, t) .
Действительно, имеем

$$\max_{\lambda} \min_{\gamma} \Big(\sum_{K} \lambda_K q_K \sum_{t} \gamma_t \Gamma_t' + B^{(2)} \sum_{t} \gamma_t \Gamma_t''\Big) ,$$

где Γ_t' имеет размерность вектора π , Γ_t'' -размерность вектора ρ . Т.е. Γ_t распадается на две части.

$$\sum_{K} \lambda_K q_K \sum_{t} \gamma_t \Gamma_t' = \sum_{i} \Big(\sum_{K} \lambda_K q_K^i \sum_{t} \gamma_t (\Gamma_t^i)'\Big) =$$
$$= \sum_{K,t} \lambda_K \Big(\sum_{i} q_K^i (\Gamma_t^i)'\Big)\gamma_t .$$

Для того, чтобы избавиться от разбиения на Γ' и Γ'' , надо взять вместо Ω , состоящего из векторов X, Ω', состоящее из векторов $(X,\ B^{(2)})$. Тогда в выражении $\max\min$ останется одно скалярное произведение.

Таким образом, получена матричная игра (с матрицей $\|C_{Kt}\|$). Для завершения доказательства остается показать, что описанный алгоритм индуцирует на этой матричной игре известный метод Брауна - Робинсон (см. [II]). Для этого достаточно заметить, что отображение $X \to \lambda$, $(\mathfrak{R}, \rho) \to ?$, является линейным. Т.е. $\alpha X_1 + \beta X_2 \to \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2$, если $X_1 \to \lambda_1$, $X_2 \to \lambda_2$. Действительно,

$$\alpha \sum_{\kappa} \lambda_{\kappa}^{(1)} q_{\kappa} + \beta \sum_{\kappa} \lambda_{\kappa}^{(2)} q_{\kappa} = \sum_{\kappa} \alpha \lambda_{\kappa}^{(1)} q_{\kappa} + \sum \beta \lambda_{\kappa}^{(2)} q_{\kappa} =$$
$$= \sum_{\kappa} q_{\kappa} \left(\alpha \lambda^{(1)} + \beta \lambda^{(2)} \right) .$$

Замечание для практического использования алгоритма. Целесообразно сначала проводить вычислительную процедуру без смешивания (т.е. применять на каждом шаге наилучшую стратегию против стратегии, выбранной противником) до тех пор, пока значение линейной формы не перестанет увеличиваться.

§ 5. Об использовании изучаемых моделей экономических систем в конкретных вопросах экономической науки и практики

Линейные динамические модели, описанные в настоящей работе, исследуются не только для того, чтобы опираясь на них, можно было построить конкретные модели, наполненные реальным экономическим содержанием, и получить решение, дающее оптимальный в том или ином смысле план для моделируемой части народного хозяйства. Существенную помощь рассматриваемые модели могут оказать также в решении важных теоретических и практических проблем. Причем это решение может быть получено именно в теоретическом плане без каких-либо предварительных расчетов конкретных моделей. Благодаря взгляду на различные экономические проблемы с точки зрения строгих моделей, получаемые на этом пути решения вопросов имеют силу математических теорем в пределах принятых предположений.

Мы считаем, что многие проблемы, которые сейчас стоят перед экономической наукой, могут быть решены, по крайней мере в теоретическом плане, с помощью метода, который будет проиллюстрирован на нескольких примерах в настоящем параграфе. Существо метода состоит в рассмотрении конкретной экономической проблемы в терминах описываемых моделей и применении основных положений теории оптимального планирования, в частности, теоремы П.I о характеристике оптимального плана.

Заметим еще раз, что настоящий параграф посвящен изложению самого способа применения изучаемых в работе оптимальных моделей к экономическим проблемам, и дальнейшие примеры не претендуют на сколько-нибудь полное исследование излагаемых вопросов, а служат лишь иллюстрацией общего метода.

I. Проблема выбора критерия оптимальности для частных экономико-математических задач.

Эта проблема, вообще говоря, возникла в связи с самим направлением "применение математики в экономике". Часто считается, что ее решением должны заниматься в каждом конкретном случае экономисты, специалисты именно той области экономики, для которой ставится задача. Мы сейчас покажем, что решение этой проблемы, при некотором дополнительном предположении, может быть получено для всех частных задач сразу, независимо от специфических особенностей этих частных задач. Дополнительное предположение состоит в том, что рассматриваемая задача должна быть частью, в определенном в § I главы II смысле, полной народнохозяйственной модели. Критерий оптимальности для частной задачи, который надо выбрать, должен быть таким, чтобы оптимальный план как можно меньше отличался от оптимального плана для той же модели, но полученного из оптимального плана полной народнохозяйственной модели.

Более точная постановка вопроса.

Предположим, что мы имеем модель всего народного хозяйства, настолько детальную в смысле номенклатуры продуктов, что нет необходимости рассматривать априори стоимостные показатели. Т.е. не надо задаваться заранее какими-то оценками для соизмерения различных продуктов. Другими словами, все ингредиенты измеряются в натуральных показателях, нет таких суммарных показателей, как, например, себестоимость или капиталовложения.

Критерием оптимальности для такой модели может быть, например, минимальный размер затрат физического труда для производства заданного количества продуктов в течение некоторого временного интервала. Однако обсуждается не это, а критерий оптимальности для некоторой части такой модели народного хозяйства. Точная, поддающаяся математическому исследованию постановка вопроса такова: каким должен быть критерий оптимальности в модели народного хозяйства (отрасли, района и т.д.), чтобы оптимальный план этой модели меньше всего отличался от оптимального плана полной народнохозяйственной модели.

Возьмем какую-нибудь модель производства и выясним, каким образом она связана с остальными моделями, если рассматривать ее как часть этой полной модели народного хозяйства. Любая модель связана с остальными через входные и выходные потоки продуктов. Номенклатура этих потоков модели как части народнохозяйственной модели очень велика. Поэтому, как правило, принимаются некоторые оценки, по которым можно соизмерить различные продукты, и, таким образом, номенклатура выходных и входных потоков значительно сокращается. Возьмем, к примеру, модель топливно-энергетического баланса, описанную в работе [3] . Если бы мы рассматривали ее как часть полной народнохозяйственной модели, то номенклатура межотраслевых потоков была бы грандиозна, т.к. пришлось бы отдельно учитывать, что дает каждая отрасль в натуральных единицах энергетическим отраслям. Вместо этого вводятся два синтетических потока: текущие затраты и капитальные затраты. Текущие затраты включают в себя всю гамму продуктов, которые требуются энергетическим отраслям для повседневного функционирования производства. Капитальные затраты содержат затраты продуктов, необходимые для создания новых фондов и вообще для расширения производства

Задачу линейного программирования, соответствующую полной модели всего народного хозяйства, будем называть <u>задачей I</u>.
Пусть $\left\{ \sum_s a_j^s h^s > b_j \qquad (c\,.\,h) - \min \right\}$ – задача I. Индекс j' пробегает ингредиенты, участвующие в частной модели, и j'' пробегает остальные ингредиенты. Пусть $\bar{H}$ – оптимальный план задачи I, и $\bar{\bar{\pi}}$ – оценки ингредиентов, соответствующие этому плану. Составим, имея задачу I и ее решение, <u>задачу П</u>.

Технологические способы задачи П формируются так: берутся все способы задачи I и отбрасываются ингредиенты с индексом j''. Вместо них вводятся новые ингредиенты – текущие и капитальные затраты в разных районах и в разные периоды времени. Для простоты мы рассмотрим случай, когда вводится только один ингредиент. Именно, величина новой компоненты в каждом способе $[S]$ есть $a^s_{m+1} = \sum_{j''} \bar{\pi}_{j''} a^s_{j''}$, т.е. коэффициентами соизмерения различных продуктов здесь служат о.о.оценки задачи I.

Ограничения задачи П сформируем так: по ингредиентам с индексом j' ограничения остаются такими же, как в задаче I. Ограничения по новому ингредиенту равно $\sum_s a^s_{m+1} \bar{h}^s$. Целевая функция остается прежней.

Сформулируем еще задачу П'. Способы ее отличаются от способов задачи П только тем, что здесь компонента, которая минимизируется, получается в результате сложения минимизируемой компоненты задачи П со всеми стоимостными (вновь введенными) компонентами.

Имеет место

Теорема П.5. Оптимальный план задачи I (точнее, та часть его, которая имеет соотношение к задачам П и П') совпадает с оптимальными планами задач П и П'.

Доказательство непосредственно следует из того факта, что для любой задачи на условный максимум можно ставить эквивалентную ей задачу максимизации функции Лагранжа, образованную с помощью только части ограничений. Т.е., если $\bar{X}$ есть решение задачи $\max f(X)$ при $q(X) \leq 0$, то $\bar{X}$ является решением и для задачи

$$\max_{X,U} \varphi(X,U) = f(X) + U q'(X),$$

$$\text{при} \quad q''(X) \leq 0, \quad U \geq 0$$

где

$$q(X) = (q_1(X), q_2(X), \ldots, q_k(X), \ldots, q_m(X));$$

$$q'(X) = (q_1(X), \ldots, q_k(X));$$

$$q''(X) = (q_{k+1}(X), \ldots, q_m(X))$$

Итак, ответ, даваемый этой теоремой на поставленный вопрос, совершенно однозначен: оптимальный план частной задачи тем ближе к оптимальному плану общей, чем ближе цены, по которым исчисляются текущие и капитальные затраты, к о.о.оценкам полной задачи.

Что касается конструирования самого критерия оптимальности, особенно для динамических задач, то в рамках нашего рассмотрения им может служить $\min$ совокупных затрат, причем из теоремы следует, что все затраты надо приводить к одному месту и одному моменту времени (задача П').

Если пользоваться существующими ценами, то территориальные различия в них уже более или менее учтены и приведение к одному месту не составляет проблемы. Приведение же затрат к одному моменту времени возможно при знании значения нормы народнохозяйственной эффективности капитальных вложений во все периоды времени. Проводиться должны, естественно, все затраты, как капитальные, так и текущие. Подчеркиваем, что здесь нужно единое значение нормы для всего народного хозяйства в целом. Роль и использование показателя так называемых приведенных затрат (текущие затраты плюс капиталовложения,умноженные на коэффициент народнохозяйственной эффективности) рассматриваются в пункте УI настоящего параграфа. Из приведенного анализа видно, что показатель приведенных затрат не пригоден в качестве критерия оптимальности для частных моделей,являющихся частями полной народнохозяйственной модели, поскольку, как бы близко к о.о.оценкам полной модели ни были взяты норма эффективности и цены продуктов, по которым рассчитываются затраты, план по этому критерию будет далеко от истинно оптимального плана (оптимального плана полной народнохозяйственной модели).

Отметим в заключение этого пункта, что критерии оптимальности для динамических моделей, основанные на отыскании экстремума на какой-то определенный фиксированный момент, имеют принципиальные недостатки, независимо от того, как бы хорошо не была выбрана сама целевая функция. Эти недостатки лишь частично элиминируются благодаря решению задачи на длительный промежуток времени и принятию плана для начального куска периода. Поэтому вопрос об асимптотическом поведении решения динамических задач при $T \to \infty$ тесно связан с проблемой выбора критерия оптимальности. Этот вопрос обсуждается в следующей главе.

П. О.о.оценки оптимального плана полной народнохозяйственной модели и теоретические основы ценообразования

В соответствии с марксистской трудовой теорией стоимости цены должны отражать общественно необходимые затраты труда. Однако точное определение понятия общественно необходимых затрат труда,по-видимому, невозможно без точного определения понятия оптимального народнохозяйственного плана. В настоящей работе,по существу,исследуется как раз уточнение интуитивного понятия оптимального плана. Поэтому, если принимается общее положение о том, что общественно необходимые затраты реализуются в некотором оптимальном народнохозяйственном плане, то точное определение понятия оптимального плана индуцирует тем самым и уточнение понятия общественно необходимых затрат труда.

В настоящем пункте мы будем считать общественно необходимыми затратами труда на производство некоторого продукта полные затраты труда на этот продукт в оптимальном плане полной народнохозяйственной модели. Поэтому наша цель состоит, в частности, в том, чтобы показать, какое отношение имеют о.о. оценки к полным затратам труда в оптимальном плане. Весь анализ проводится при упрощающем предположении, что каждый текущий технологический способ выпускает только один продукт. Это предположение сделано для простоты изложения и для возможности сравнения с другими концепциями ценообразования. Сходный анализ, отличающийся от нижеследующего лишь в деталях, приведен в работе [3]. Проблема установления цен на комплексную продукцию рассматривается в пункте III настоящего параграфа.

Все технологические способы нашей упрощенной модели записаны в канонической форме (I.2.5). Пусть мы имеем оптимальный план $\bar{H}$ модели на период времени T. Рассмотрим часть этого плана $H(t)$, относящуюся к одному интервалу планового периода t. Любой текущий технологический способ $[S]$, выпускающий продукт с номером I имеет вид:

$$a^{(s)} = (1 - a^s_{1,t};\ -a^s_{2,t}, \dots, -a^s_{n_1,t};\ -W^s_{n_1+1,t}, \dots, -W^s_{n_2,t}, \dots, -b^s_{n_2+1,t}, \dots$$

$$\dots b^s_{n_3,t} \dots -d^s_{n_3+1,t} \dots -d^s_{n_4,t} \dots b^s_{n_2+1,t+1} \dots b^s_{n_3,t+1} \dots d^s_{n_3+1,t+1} \dots d^s_{n_4,t+1} \dots),$$

где $a^s_{i,t}$ $(i = 1, \dots, n_1)$ – текущие затраты продукта $[i]$ для производства единицы продукта I способом $[S]$, n_1 – число продуктов. $W^s_{j,t}$ $(j = n_1+1, \dots, n_2)$ – удельные затраты рабочей силы вида $[j]$ в способе $[S]$; $n_2 - n_1$ – число видов рабочей силы; $b^s_{k,t}$ $(k = n_2+1, \dots, n_3)$ – удельные затраты фондов вида $[k]$ в способе $[S]$; $n_3 - n_2$ – число видов фондов (основных и оборотных) с указанием степени их изношенности; $d^s_{l,t}$ $(l = n_3+1, \dots, n_4)$ – удельные затраты земельных и других угодий вида $[l]$ в способе $[S]$; $n_4 - n_3$ – число видов угодий, (разделение по качеству и местоположению).

$b^s_{k,t+1}$ – количество фондов вида $[k]$ на единицу продукта I, остающееся к началу следующего $t+1$ – го временного интервала после использования в способе $[S]$.

$d^s_{\ell,t+1}$ – количество угодий вида $[\ell]$ на единицу продукта I, остающееся к началу $t+1$ – го временного интервала после использования в способе $[s]$.

Содержательно технологический способ $[s]$ характеризует следующее:

Для того, чтобы была произведена единица продукта I, необходимо затратить материалы в количествах $a^s_{i,t}$, рабочую силу в количествах $w^s_{j,t}$, располагать основными и оборотными фондами в количествах $b^s_{\kappa,t}$ и природными угодьями в количествах $d^s_{\ell,t}$.

Фонды и земельные и другие угодья не затрачиваются полностью в технологическом процессе, они как бы присутствуют в нем. Их роль в этом отношении сходна с ролью катализатора в химической реакции. Однако $b^s_{\kappa,t}$ и $b^s_{\kappa,t+1}$, а также $d^s_{\ell,t}$ и $d^s_{\ell,t+1}$ могут не совпадать между собой. Это происходит тогда, когда фонды изнашиваются, а природные ресурсы изменяют свои качества в результате применения способа $[s]$.

Таким образом, в результате применения текущего способа виды фондов могут переходить из одной степени изношенности в другую и виды природных ресурсов из одного качества в другое.

Предположим, что способ $[s]$ используется в оптимальном плане. Тогда по теореме о характеристике оптимального плана $(a^s, \pi) = 0$. Запишем это уравнение в развернутом виде:

$$\pi_1(t) = \sum_{i=1}^{i=n_1} a^s_{i,t}\,\pi_i(t) + \sum_j w^s_{j,t}\,\pi_j(t) + \sum_\kappa (b^s_{\kappa,t} - b^s_{\kappa,t+1})\,\pi_\kappa(t+1) +$$
$$+ \sum_\ell (d^s_{\ell,t} - d^s_{\ell,t+1})\,\pi_\ell(t+1) + \sum_\kappa b^s_{\kappa,t}\,(\pi_\kappa(t) - \pi_\kappa(t+1)) +$$
$$+ \sum_\ell d^s_{\ell,t}\,(\pi_\ell(t) - \pi_\ell(t+1)). \qquad (\text{П.5.I})$$

В правой части уравнения (П.5.I) первая сумма есть о.о.оценка затраченных материалов, вторая сумма – о.о.оценка использованного труда, третья сумма – износ фондов, исчисленный в о.о.оценках следующего периода, четвертая сумма – потери из-за изменения (ухудшения) качества использованных природных ресурсов, исчисленные в о.о.оценках следующего периода. Таким образом, первые четыре слагаемых дают себестоимость единицы продукта I. Причем третье слагаемое представляет собой амортизацию, т.е. цену износа фондов в течение периода t . Этот износ однако исчисляется в о.о.оценках следующего $t+1$ - го периода, поскольку фонды до использования в способе $[S]$ и после использования в этом способе сравниваются в начале $t+1$ - го периода. Ущерб от износа проявляется только с $t+1$ - го периода времени. Последнее четвертое слагаемое в себестоимости почти никогда в обычных расчетах не учитывается, хотя необходимость его учета обоснована так же, как и учета амортизации. Следует заметить. что возможны случаи, когда четвертое слагаемое отрицательно,т.е. качество природных ресурсов от использования в способе $[S]$ улучшается. Например, качество земли улучшается после посева некоторых трав. Поэтому величина себестоимости этих трав в действительности будет ниже себестоимости, рассчитанной обычным способом.

Перейдем к оставшимся о.о.оценкам продукта,т.е. составляющим, отражающим распределение прибавочного продукта. Предпоследняя сумма правой части уравнения (П.5.I) есть прокатная оценка основных и оборотных фондов, последняя сумма - дифференциальная рента за использование природных ресурсов. Выражение $\sum b^s_{k,t}(\pi_k(t)-\pi_k(t+1))$ означает, что прокатная оценка фондов представляет собой некоторую долю этих фондов. Именно эта доля равна удешевлению фондов в течение периода t .

$$b^s_{k,t}(\pi_k(t)-\pi_k(t+1))=\rho_t\ (0,\dots\ b^s_{k,t}\dots 0)\ b^s_{k,t}\,\pi_k(t+1),$$

где ρ_t - норма народнохозяйственной эффективности, для которой в качестве единицы измерения взяты фонды вида $[K]$.

Сопоставим теперь уравнение (П.5.I) определения о.о. оценки продукта I с формулой цены производства. Формула для определения цены производства имеет вид:

$$Z_l=\sum_i a^s_{i,t}Z_i+\sum_j W^s_{j,t}Z_j+\sum_{K'}\frac{b^s_{K',t}Z_{K'}}{T_{K'}}+ \quad (П.5.2)$$

$$+\,\gamma\sum_K b^s_{K,t}Z_K+\sum_l d^s_{l,t}Z_l\ ,$$

где индекс K' пробегает только виды основных фондов, γ - единая норма прибыли, Z_i - цена продукта, Z_j - величина оплаты труда вида $[j]$, Z_K - цена единицы фондов вида $[K]$, $T_{K'}$ - срок службы фондов вида $[K]$, Z_l - дифференциальная рента на природные ресурсы вида $[l]$.

Мы не будем останавливаться здесь на обсуждении возможности расчета цен Z_j, Z_k и Z_t , а также $?$ в рамках концепции цен производства. Выясним лишь различие между о.о.оценками и ценами производства, проистекающие из того факта, что при исчислении цен производства доля цены фондов, входящая в цену производства продукта, неизменна, не зависит от индивидуальности фондов. Из уравнения (П.5.I) видно, что в о.о.оценке продукта доля о.о.оценки фондов варьируется в зависимости от структуры фондов. Именно эта доля определяется тем, насколько быстро обесценивается данный вид фондов. Экономически совершенно бесспорно, что все виды фондов не могут обесцениваться одинаково.

Например, для фондов, на создание которых идет большое количество труда, цена снижается медленнее, чем для фондов с меньшими затратами труда на их создание. Медленнее снижается также цена фондов, в состав которых входят продукты ограниченных природных источников и т.д.

Поэтому в производствах, использующих трудоемкие фонды, цена производства будет выше о.о.оценки при условии, конечно, что остальные элементы цены определены примерно одинаково. В производствах с капиталоемкими способами произойдет обратное.

Это положение о различии цен производства и о.о.оценок в зависимости от структуры фондов особенно наглядно, если перейти от уравнений (П.5.I) и (П.5.2) к эквивалентным им уравнениям, характеризующим полные затраты труда на единицу производимого продукта.

Для простоты, чтобы не рассматривать проблему редукции труда, предположим, что имеется всего один вид труда W, и, чтобы не касаться амортизации, предположим, что фонды не изнашиваются. Кроме того, не умаляя общности, можно считать, что в оптимальном плане для рассматриваемого периода t каждый продукт выпускается одним способом.

Обозначим матрицу прямых затрат продуктов в этих способах $\|a^s_{i,t}\|$ через A .

$\mathcal{R}(t)=(\mathcal{R}_1(t),\dots,\mathcal{R}_{n_1}(t))$ - вектор о.о.оценок;

$W=(W_1,\dots,W_{n_1})$ - вектор затрат труда;

$d=(d_1,\dots,d_{n_1})$ - вектор дифференциальных рент;

$b^s_k=(b^1_k,\dots,b^{n_1}_k)$ - вектор затрат фондов вида $[k]$.

$$\rho_t(0,\ldots,b_{k,t},\ldots,0)=\rho_t^k\ ,$$

$$\mathcal{R}(t)=(E-A)^{-1}W+\sum\rho_t^k b_k^s \mathcal{R}_k(t+1)+d\ . \quad (\text{П.5.3.})$$

Из формулы (П.5.3) видно, что о.о.оценка продукта складывается из полных текущих затрат труда на его изготовление, некоторой доли фондов и дифференциальной ренты. Однако аналогичные рассуждения показывают, что $\mathcal{R}_k(t+1)$ складывается из полных затрат труда на создание фондов вида $[K]$, некоторой доли других фондов и дифференциальной ренты и т.д. Поэтому $\mathcal{R}_i(t)$ есть полные затраты труда плюс дифференциальная рента, если таковая имеется.

$Z=(Z_1,\ldots,Z_{n_1})$ получается из соотношения:

$$Z=(E-A)^{-1}W+\eta\sum_K Z_k b_k^s+d\ .$$

Таким образом, если в о.о.оценках полные затраты труда на создание фондов участвуют в разной доле в зависимости от их структуры, то в цене производства доля полных затрат труда одинакова для всех видов фондов.

Вывод относительно рассмотренной части соотношения между о.о.оценками и ценами производства должен быть таков. В ценах производства прибавочный продукт распределен в соответствии с размерами основных и оборотных фондов, т.е. независимо от размера затрат живого труда. В о.о.оценках прибавочный продукт распределен, в частности, не только в зависимости от размера фондов, создающих продукцию, но и в зависимости от размера фондов, создающих первые фонды и т.д.

Еще раз заметим, что это лишь одно из отличий о.о.оценок от цен производства. Достаточно сказать, что такие проблемы, как установление цен на новую продукцию, исчисление ренты, амортизации, цен на фонды, т.е. на продукты, создаваемые в течение длительного интервала времени, цен на сопряженную продукцию, решается в рамках концепции цен производства неудовлетворительно.

Однако показательно, что о.о.оценки определяются с помощью уравнений, напоминающих по форме уравнения для исчисления цен производства или даже уравнений для определения полных затрат труда в межотраслевом балансе (уравнения Дмитриева). Это обстоятельство не случайно. И уравнения Дмитриева, и уравнения цен производства, и уравнения для расчета цен по другим концепциям ценообразования в какой-то степени приближаются к исчислению народнохозяйственных затрат в оптимальном плане. Всем этим уравнениям можно сопоставить соответствующие линейные модели, на которых они (уравнения), быть может, неявно базируются. Все эти модели весьма примитивны и, естественно, не могут быть основой для уточнения понятия оптимального плана. В частности, уравнения для исчисления цен производства базируются на так называемой замкнутой динамической модели Леонтьева, рассматриваемой в оптимальном, по Нейману, состоянии равновесия. Т.е. цены производства - это такие цены, которые устанавливаются при длительном функционировании замкнутой Леонтьевской модели, не учитывающей технический прогресс. (См. по этому поводу главу Ш.).

Вернемся к вопросу о соотношении о.о.оценок и полных затрат труда в оптимальном плане. Во-первых, надо отметить, что само понятие полных затрат труда нуждается в некотором уточнении или, по крайней мере, пояснении. Дело в том, что встает вопрос о соизмерении различных видов труда и вопрос о соизмерении разновременных затрат труда. Необходимость постановки первого вопроса достаточно ясна. Второй вопрос возникает потому, что в величину полных затрат труда на продукт входят затраты труда, овеществленные в используемых основных фондах, которые создаются, как правило, в течение длительного промежутка времени. Метод соизмерения разнокачественных затрат труда с помощью о.о.оценок исходит из того, что соизмерение зависит от самого оптимального плана, или, более точно, от той роли, которую играют различные (по качеству и времени) затраты труда в оптимальном плане, от степени их влияния на критерий оптимальности плана. Этот метод как раз является реализацией общей идеи о том, что соизмерение должно зависеть от конкретных условий производства и потребления. Методы соизмерения различных затрат труда, основанные на каких-то априорных коэффициентах, полученных только из анализа степени сложности труда, могут дать с точки зрения оптимального плана искаженное представление об истинных величинах затрат труда на тот или иной вид продукции. Таким образом, уже решение этих двух вопросов (особенно последнего) приводит к тому, что определение полных затрат труда в оптимальном плане невозможно без о.о.оценок. В частности, даже если считать, что текущие технологические способы производят только один продукт, то определение полных затрат труда с помощью, например, техники межотраслевого баланса (по уравнениям Дмитриева) дает искаженную картину.

Можно показать, что в любой динамической модели некоторой экономической системы, в которой единственный невоспроизводимый с помощью технологических способов производственный фактор есть труд (т.е. ресурсы состоят только из различных видов рабочей силы), полные затраты труда на все продукты совпадают с о.о.оценками этих продуктов. В моделях, в которых в качестве ресурсов, не производимых технологическими способами, участвует не только рабочая сила, но и различные виды природных ресурсов, в о.о.оценках оптимального плана появляется рентная составляющая. Поэтому в наиболее полных, реальных моделях экономических систем о.о.оценки отражают не только полные затраты соответствующим образом приведенных видов труда, но и влияние различных природных ресурсов.

В пунктах Ш-IУ мы коснемся более конкретных вопросов, связанных с методами исчисления затрат. Общий подход оптимального планирования к проблеме исчисления затрат был сформулирован в работах [I] и [I5] . Мы здесь рассматриваем эту проблему несколько в иной плоскости и более формально.

Ш. К вопросу об установлении цен на сопряженную продукцию

Теперь снимем ограничение на то, что технологические способы выпускают только один продукт, т.е. рассмотрим формирование о.о.оценок на сопряженную продукцию.

Пусть некоторый способ [S] выпускает вместе с единицей продукта [I] продукты [i_1] . . . [i_r] в количествах $p_{i_1},\dots,p_{i_r}$. Тогда правая часть уравнения (П.5.I) не изменится, а в левой части будет стоять выражение

$\mathcal{T}_1(t)+\sum_{i'} p_i\,\mathcal{T}_i(t)$, где $i'=i_1,\dots,i_r$,

т.е. о.о.оценка ассортиментного набора $(1, p_{i_1},\dots,p_{i_r})$. Перенеся $\sum_{i'} p_i\,\mathcal{T}_i(t)$ в правую часть, получим, что о.о. оценка продукта [I] складывается из шести рассмотренных в уравнении (П.5.I) сумм минус о.о.оценка сопряженной продукции. Пусть для простоты $r=1$, т.е. имеется только один вид сопряженной продукции. Тогда все затраты (сумма в правой части уравнения (П.5.I)) надо распределить между двумя продуктами [I] и [i_1] . Вопрос состоит в том, чтобы определить, какая часть затрат падает на продукт [I] и какая на продукт [i_1]. Решение системы линейных уравнений $(a^s, \pi) = 0$ в соответствии с теоремой о характеристике оптимального плана, конечно, отвечает на этот вопрос. Однако такой ответ не является наглядным. Следовательно, надо проследить за самим процессом решения этой системы уравнений.

Предположим, что о.о.оценки всех ингредиентов, кроме [I] и [i_1], известны. Тогда, поскольку все о.о.оценки определяются (в предположении о невырожденности оптимального плана) однозначно, то должен найтись еще один способ [S'] , участвующий в оптимальном плане в период t и выпускающий хотя бы один из продуктов [I] и [i_1] . Таким образом, мы получаем, что в способе [S] вычисляется о.о.оценка (цена) суммы продуктов [I] и [i_1], взятых в некотором соотношении, а в способе [S'] вычисляется о.о.оценка суммы тех же самых продуктов, взятых в другом соотношении. Отсюда легко вычислить, в каком соотношении по отношению друг к другу должны находиться о.о.оценки продукта [I] и продукта [i_1] . Вывод из настоящего рассмотрения состоит в следующем. Невозможно рассчитать о.о.оценки на сопряженную продукцию внутри одного производства (конечно, при известных о.о.оценках для всех составляющих затрат), не привлекая другие производства (предприятия, технологические способы) для сравнения. Внутри одного предприятия можно установить о.о.оценку только всей суммы выпускаемой продукции, т.е. без разделения по ее видам. Отсюда можно сделать соответствующие выводы для практики установления цен на сопряженную (побочную) продукцию.

IУ. О распределении цеховых и общезаводских расходов

Рассмотрим еще один вопрос, который обсуждается в экономической литературе. Речь идет о калькулировании себестоимости, или, более конкретно, о способах учета общезаводских и цеховых расходов по себестоимости различных видов продукции. (Вопрос об исчислении амортизации рассматривается в пункте У настоящего параграфа).

Основная трудность этого вопроса, как известно, состоит в следующем. Продукция выпускается многими технологическими способами, которые используют некоторые основные фонды. А для того, чтобы эти фонды нормально функционировали, необходимы особые затраты. Исходя из общего метода исследования вопросов, касающихся исчисления затрат, мы рассмотрим эту проблему на линейной модели. В такой модели о.о.оценки определяются стандартным образом, и наша цель состоит в том, чтобы расчленить вычисление о.о.оценок нужным образом, т.е. установить, из каких именно элементов складывается о.о.оценка (в частности, себестоимость) продукта. Одним из таких элементов и должны быть общезаводские или цеховые расходы.

Сформулируем понятия и предположения, в которых будет рассмотрена эта проблема. Технологический способ поддержания нормального функционирования фондов вида $[K]$ имеет вид:

$$a^{s_1} = (\ldots + b_K^{s_1}, \ldots - a_1^{s_1}, \ldots - a_m^{s_1}, -W_1^{s_1} \ldots - W_n^{s_1} \ldots).$$

Здесь все компоненты относятся к периоду t : $a_1^{s_1}, \ldots, a_m^{s_1}$ — материальные затраты; $W_1^{s_1}, \ldots, W_n^{s_1}$ — трудовые затраты для обеспечения нормального функционирования фондов $[K]$ в период t . Имеется два текущих технологических способа $[S_2]$ и $[S_3]$, выпускающих различную продукцию с различными материальными и трудовыми затратами и затратами фондов. Но оба этих способа требуют наличия фондов вида $[K]$. Пусть эти способы таковы:

$$a^{s_2} = (1 - a_1^{s_2}, -a_2^{s_2}, \ldots, -a_m^{s_2}, -W_1^{s_2}, \ldots, W_m^{s_2}, \ldots, -b_K^{s_2} + b_K^{s_2}, \ldots, -b^{s_2}_{\ldots} + b^{1,s_2}_{\ldots}),$$

$$a^{s_3} = (-a_1^{s_3}, 1 - a_2^{s_3}, \ldots, -a_m^{s_3}, -W_1^{s_3}, \ldots, W_m^{s_3}, \ldots -b_K^{s_3} + b_K^{s_3} \ldots -b^{s_3}_{\ldots} + b^{1,s_3}_{\ldots}),$$

где $b^{s_2}, b^{s_3}, b^{1,s_2}, b^{1,s_3}$ - фонды других видов (векторы). Без ограничения общности можно считать фонды $[K]$ неизнашивающимися, т.к. весь износ можно учитывать в других видах фондов, относящихся непосредственно к выпускаемой продукции.

Рассмотрим сначала случай, когда удельный вес способов $[S_2]$ и $[S_3]$ не может варьироваться. Другими словами, при любом допустимом плане отношение интенсивностей h^{s_2}/h^{s_3} постоянно. В этом случае способы $[S_1]$, $[S_2]$ и $[S_3]$ можно объединить в один. В результате получится такой технологический способ:

$$((1 - a_1^{s_1} - a_1^{s_2} - a_1^{s_3}); (1 - a_2^{s_1} - a_2^{s_2} - a_2^{s_3}); \ldots (-a_n^{s_1} - a_n^{s_2} - a_n^{s_3}),$$

$$(-W_1^{s_1}-W_1^{s_2}-W_1^{s_3});\ldots(-W_m^{s_1}-W_m^{s_2}-W_m^{s_3}),\ldots(-b^{s_2}-b^{s_3})\ldots$$

$$\ldots(+b^{s_2}+b^{s_3})\ldots) \ . \qquad (\text{П.5.4})$$

Как видно из этой записи, особые фонды вида [K] пропадают, а затраты $a_i^{s_1}$ и $W_j^{s_1}$, обеспечивающие нормальное функционирование их, выступают в качестве обычных текущих затрат для выпуска комплексной продукции, состоящей из продукта [I] и продукта [2]. Таким образом, в рассматриваемом случае учет особых затрат $\{a_i^{s_1}\}$ и $W_j^{s_1}$ в себестоимости продуктов [I] и [2] сводится к распределению затрат на комплексную продукцию. Вопрос об исчислении затрат и установлении цен на комплексную продукцию рассмотрен в пункте Ш настоящего параграфа.

Снимем теперь предположение о неизменности отношения h^{s_2}/h^{s_3}. Это означает, что с помощью одних и тех же фондов вида [K] можно производить продукты [I] и [2] в разных отношениях. Другими словами, затраты $\{a_i^{s_1}\}$ и $\{W_j^{s_1}\}$ в себестоимости продукции видов [I] и [2] могут участвовать по-разному в зависимости от принятого плана производства. Однако и в этом случае фонды вида [K] можно исключить из числа ингредиентов с помощью введения нескольких технологических способов типа (П.5.4). Возможность исключения ингредиентов [K] таким способом вытекает, например, из содержания § 2 главы П. Причем ясно, что в любом из этих составных способов затраты $a_i^{s_1}$ и $W_j^{s_1}$ будут одними и теми же. Наилучшее соотношение в выпусках продуктов [I] и [2] можно установить только с помощью нахождения оптимального плана. Поэтому правильное распределение затрат $a_i^{s_1}$ и $W_j^{s_1}$ на продукты зависит от расчета соответствующей модели. Производство того ассортимента продукции, который получится из оптимального плана, можно, естественно, описывать с помощью одного составного технологического способа. Т.е. мы опять приходим к случаю с фиксированным соотношением h^{s_2}/h^{s_3}. Общий вывод, который можно сделать из настоящего рассмотрения, примерно совпадает с выводом относительно исчисления цен на сопряженную продукцию. Именно, правильное распределение особых затрат $\{a_i^{s_1}\}$ и $\{W_j^{s_1}\}$ (в частности, общезаводских и цеховых расходов) не может быть осуществлено без сопоставления с аналогичными производствами или вариантами производства на том же предприятии. Методика же их конкретного распределения должна основываться на исчислении о.о.оценок на соответствующие виды продукции. Таким образом, из этого метода распределения особых затрат никак не следует, что такие затраты надо распределять в точности пропорционально оплате непосредственно затраченного на продукт труда, или, например, пропорционально себестоимости, пропорционально цене и т.п.

У. Об исчислении амортизации

Мы принимаем в качестве исходного определения такое: сумма амортизации в период t фондов вида $[K]$ равна стоимости их износа в этот период t. Из этого определения может показаться, что общая сумма амортизации за весь период срока службы фондов должна быть равна стоимости фондов. Однако это не так, как видно из дальнейшего.

Как установлено в пункте П настоящего параграфа, о.о.оценка продукта складывается в соответствии с уравнением (П.5.I), т.е. фонды участвуют в цене продукции в виде износа, а также в некотором проценте, который равен норме эффективности, причем в качестве единицы измерения для нее взяты как раз фонды рассматриваемого вида. Для анализа опять воспользуемся моделированием экономического процесса с помощью технологических способов и теоремой о характеристике оптимального плана. Именно, предположим, что некоторый способ $[S]$ задан вектором

$$a^s = (1 - a_1^{s,1}, \ldots, -a_{n_1}^{s,1}, -W_{n_1+1}^{s,1} \ldots -W_{n_2}^{s,1} \ldots - b_{n_2+1}^{s}, \ldots - b_{n_3}^{s}; \ldots$$
$$\ldots 1 - a_1^{s,t}, \ldots, -a_n^{s,t}, -W_{n_1+1}^{s,t} \ldots -W_{n_2}^{s,t})$$

Буквы a_i, b_k, W_j имеют тот же смысл, что и в пункте П. Этот способ описывает процесс нормального функционирования фондов $b_{n_2+1} \ldots b_{n_3}$ на протяжении t периодов времени до их износа. В течение t периодов с этих фондов снимается в каждый период одинаковое количество продукта $[\,I\,]$. Пусть способ $[S]$ участвует в оптимальном плане. Подсчитаем на основании теоремы о характеристике оптимального плана о.о.оценку всей продукции, снятой с фондов $b_{n_2+1} \ldots b_{n_3}$ в течение всего периода их жизни.

$$\sum_{\tau=1}^{t} \pi_1(\tau) = \sum_{i,\tau} a_i^{s,\tau} \pi_i(\tau) + \sum_{j,\tau} W_j^{s,\tau} \pi_j(\tau) + \sum_{K} b_K^{s} \pi_K(1).$$

Из уравнения (П.5.5) легко видеть, что в о.о.оценку всей продукции, полученной в течение периодов $1, \ldots, t$, фонды входят только своей полной о.о.оценкой. Никаких дополнительных начислений на фонды в о.о.оценке суммарной продукции нет.

В пункте II мы установили, что амортизация (плата за износ) равна для первого периода

$$\sum_{k} (b_k^0 - b_k^1)\,\pi_k(2) \quad ,$$

где b_k^1 $(k = n_2+1,\dots,n_3)$ – фонды вида $[k]$ после того, как они проработали в течение одного периода времени. Обозначим через b_k^τ фонды вида $[k]$ после работы в течение τ периодов времени, $b_k^t = 0$ для всех k. Тогда общая сумма амортизации за весь период работы фондов $[n_2+1]\dots[n_3]$ составит

$$\sum_{\tau=2}^{\tau=t} \sum_{k} (b_k^{\tau-2} - b_k^{\tau-1})\,\pi_k(\tau) .$$

Эта сумма меньше о.о.оценки фондов $b^0_{n_2+1},\dots,b^0_{n_3}$. Точнее,

$$\sum_{k} b_k \pi_k(1) = \sum_{\tau=2}^{\tau=t} \sum_{k} (b_k^{\tau-2} - b_k^{\tau-1})\pi_k(\tau) + \sum_{\tau=1}^{\tau=t-1}\sum_{k} b_k^{\tau-1}(\pi_k(\tau) - \pi_k(\tau+1)).$$

Последнее выражение есть сумма начислений на фонды за весь период их функционирования, т.е. прокатная оценка фондов $b_{n_2+1}\dots b_{n_3}$ в течение всего периода их жизни. Таким образом, о.о.оценка фондов складывается из о.о.оценки их полного износа и прокатной оценки за весь период их жизни. Отсюда следует, что общая сумма амортизации (о.о.оценка полного износа) не равна общей стоимости (о.о.оценке фондов). Проанализируем это положение более подробно. Нетрудно заметить, что все зависит от того, как подсчитывать износ и прокатную оценку фондов во времени. Выше мы рассчитывали эти показатели в соответствии с соотношением $(a^s, \pi) = 0$ теоремы о характеристике оптимального плана. Посмотрим, что получается, если не учитывать временной фактор. Если весь расчет производить в фиксированный момент времени, то полный износ фондов, естественно, совпадает с их стоимостью. Действительно, этот износ равен

$$\sum_{k} (b_k - b_k^1)\,\pi_k(1) + \sum_{k} (b_k^1 - b_k^2)\,\pi_k(1) + \dots + \sum_{k} b_k^{t-1}\pi_k(1) = \sum_{k} b_k \pi_k(1)$$

(травиальное равенство). Однако это распределение общей суммы стоимости фондов по степени изношенности не имеет никакого экономического смысла. Ибо все рассматривается вне реального экономического процесса функционирования фондов во времени. Ведь амортизация действительно есть плата за износ, т.е. она призвана восстановить фонды в прежнем виде. Но все дело в том, что восстановленные таким образом фонды не тождественны первоначальным фондам, т.к. они связаны уже со следующим временным интервалом. Естественно, что еще меньше смысла имеет просто деление общей стоимости фондов на одинаковые части по годам для определения размера амортизации.

УI. О показателе приведенных затрат

Для большей наглядности мы исследуем вопрос о показателе приведенных затрат на модели еще более простой, чем ранее. Ингредиентами модели являются текущие и капитальные затраты, некоторый однородный продукт и виды фондов с указанием, к какому периоду времени они (затраты,продукт,фонды) относятся. Фонды для простоты предполагаются неизнашиваемыми. Текущие технологические способы имеют вид:

$$(\ldots 1_t, \ldots, -C_t^s, \ldots, -b_{k,t}^s \ldots + b_{k,t+1}^s \ldots),$$

а капитальные

$$(\ldots -K_{t+1}^{s'}, \ldots, + 1_{k,t}^{s'} \ldots),$$

где C_t^s - текущие затраты в способе $[S]$ в период t;
K_t^s - капитальные затраты в способе $[S]$ в период t;
$b_{k,t}^s$ - удельные затраты фондов вида $[K]$ в период t в способе $[S]$;
1_t - единица продукта в период t.

Критерий оптимальности: минимум суммы текущих и капитальных затрат за весь период.

Вопрос, который подлежит рассмотрению, состоит в следующем. Требуется определить условия, по которым можно установить, какой способ капитального строительства лучше в данных конкретных условиях (в определенный период времени).

Пусть имеется оптимальный план рассматриваемой модели и соответствующие ему о.о.оценки. Пусть способ $[S]$ используется в оптимальном плане в период $t-1$ и в период t. Тогда по теореме о характеристике оптимального плана

$$\pi^k(t) \cdot K_t^s = \pi_{b_k}(t+1),$$

$$\pi^k(t-1) \cdot K_{t-1}^s = \pi_{b_k}(t),$$

а для способа [s]

$$C_t^s \mathcal{R}^c(t) + b_{\kappa,t}^s (\mathcal{R}^{b_\kappa}(t) - \mathcal{R}^{b_\kappa}(t+1) = \mathcal{R}^p(t),$$

где $\mathcal{R}^\kappa(t)$ – о.оценка капиталовложений; $\mathcal{R}^c(t)$ – оценка текущих затрат; $\mathcal{R}^{b_\kappa}(t)$ – оценка фондов; $\mathcal{R}^p(t)$ – о.о.оценка продукта. Объединяя эти три уравнения, получим,

$$C_t^s \mathcal{R}^c(t) + b_{\kappa,t}^s K_t^s (\mathcal{R}^\kappa(t-1) - \mathcal{R}^\kappa(t)) = \mathcal{R}^p(t). \qquad (П.5.6)$$

Последнее уравнение означает, что о.о.оценка продукта складывается из текущих затрат, рассчитанных в о.о.оценках периода t, и капиталовложений в неизменных ценах, умноженных на их удешевление в течение периода $t-1$, или, что то же самое, капиталовложений в текущих ценах (о.о.оценках периода t), умноженных на норму эффективности капитальных вложений $\rho_{t-1}(b_\kappa)$ где $\rho_{t-1}(b_\kappa)$ - норма эффективности, измеренная по фондам вида [κ]. Ясно, что любой вариант капитального строительства можно оценивать по величине, рассчитываемой в соответствии с выражением, стоящим в левой части уравнения (П.5.6). Нетрудно видеть, что левая часть соотношения (П.5.6) есть не что иное, как приведенные затраты. Причем текущие затраты и капитальные затраты взяты по о.о.оценкам, а капитальные затраты умножены на норму эффективности, измеренную в единицах данных фондов. Таким образом, поскольку эта норма эффективности зависит от индивидуальных свойств фондов, от их структуры, то расчет приведенных затрат для различных объектов производится по-разному (по различным коэффициентам).

В случае, когда в оптимальном плане капиталовложения на создание фондов b_κ в период t не вкладываются, уравнение (П.5.6) может не иметь места. Гарантировано только неравенство

$$\mathcal{R}^\kappa(t) K_t^s \geq \mathcal{R}^{b_\kappa}(t+1).$$

Поэтому в последнем случае лучше иметь дело с о.о.оценками самих фондов, а не с о.о.оценками создающих их капиталовложений. Соотношение (П.5.6) примет вид

$$C_t^s \mathcal{R}^c(t) + b_{\kappa,t}^s \mathcal{R}^{b_\kappa}(t) - b_{\kappa,t+1}^s \mathcal{R}^{b_\kappa}(t+1) = \mathcal{R}^p(t).$$

Вывод о том, что коэффициент для расчета приведенных затрат различен для различных видов фондов, конечно, сохраняется и в этом случае.

Резюмируем положение относительно смысла показателя приведенных затрат. Величина приведенных затрат показывает для двух сопоставимых во всех отношениях вариантов (т.е. варианты разнятся только величиной текущих и капитальных затрат), какой вариант лучше в смысле оптимального плана.

Из рассмотренного в настоящем пункте и содержания § 4, касающегося определения и анализа понятия нормы эффективности капитальных вложений, следует, что показатель нормы эффективности рассчитывается по-разному и в различных вопросах применяется по-разному. В частности, приведение разновременных затрат к одному моменту времени производится по единому для всего народного хозяйства коэффициенту, тогда как выбор эффективных направлений капиталовложений производится по различным коэффициентам, зависящим от вещественной структуры этих капиталовложений. Отсюда, в частности, следует, что не может быть некоторого универсального значения нормы эффективности, с помощью которого можно было бы производить все расчеты, связанные с приведением разновременных затрат и определением степени эффективности капитальных вложений. В одних вопросах (приведение разновременных затрат) требуется единая норма для всего народного хозяйства в целом, в других вопросах (оценка эффективности вариантов) нужны дифференцированные по видам фондов значения нормы. Из содержания п.П настоящего параграфа следует также, что определение доли, в которой участвуют фонды в цене продукции, производится по разным значениям нормы эффективности, зависящим от индивидуальной структуры этих фондов.

Расчеты, связанные с определением эффективности капитальных вложений,можно проводить с помощью единого коэффициента эффективности, если материально-вещественная структура вариантов капиталовложений различается мало.

Литература

I. Л.В.Канторович. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. Изд. АН СССР 1959 г.

2. И.Я.Бирман. Транспортная задача линейного программирования. Экономиздат 1962 г.

3. Л.В.Канторович, В.Л.Макаров. "Оптимальные модели перспективного планирования". Сб. Применение математики в экономических исследованиях. том Ш. Изд."Мысль" 1965 г.

4. С.С.Сурин. Динамическая транспортная задача и некоторые ее обобщения. Сб. Экономико-математические методы. Вып. II. Изд. "Наука" 1965 г.

5. Ю.И.Волков, В.Л.Макаров. Динамическая модель оптимального топливно-энергетического баланса СССР. Новосибирск 1962 г.

6. В.Л.Макаров. Об оптимальной модели перспективного развития энергетики и топливной промышленности СССР. Сб. Модели и методы оптимального планирования. Новосибирск 1966 г.

7. G.Dantzig and P.Woife. Econometrica N 4 (1961).

8. P.Wolfe. "In Recent advances in linear and nonlinear programming" (1965).

9. Голдман Таккер. "Теория линейного программирования". Сб. Линейные неравенства и смежные вопросы. М.1959 г.

10. В.Л.Макаров. "Производственно-транспортная задача линейного программирования". Научные труды НГУ вып. 5 1965 г.

11. Робинсон Дж. Итеративный метод решения игр. Сб."Матричные игры". М.1961 г.

12. Сб.ст.Процессы регулирования в моделях экономических систем. М.1961 г.

13. Д.К.Фадеев, В.Н.Фадеева. Вычислительные методы линейной алгебры. Ф.М.1960 г.

14. Р.А.Звягина. Задачи линейного программирования с блочно-диаганальными матрицами. Сб. Оптимальное планирование. Вып.2.

15. Л.В.Канторович. Об исчислении затрат. Вопросы экономики №1 1960 г.

Рукопись поступила в редакцию 30 декабря 1965 г.