Р. А. ЗВЯГИНА

# ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С БЛОЧНО-ДИАГОНАЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ

Как отмечалось в статье [3] настоящего сборника, применение модифицированного симплекс-метода, или метода последовательного улучшения допустимого вектора [I], к решению задач линейного программирования большого размера связано с необходимостью хранить и преобразовывать обратную матрицу. В то же время известно, что обратная матрица нужна только для получения векторов $x$ и $y$, являющихся решениями двух систем с одной и той же матрицей $B$ :

$$\begin{aligned} Bx &= b, \\ yB &= c. \end{aligned} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} x &= B^{-1}b, \\ y &= cB^{-1}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Если же матрица $B$ имеет некоторую специфическую структуру, то, очевидно, можно вместо формул (2) ввести другие схемы получения векторов $x$ и $y$, уже не требующие вычисления и хранения обратной матрицы $B^{-1}$.

Данная статья посвящена рассмотрению таких схем, когда матрица $B$ имеет блочно-диагональный вид.

Не входя в детальное описание общеизвестного алгоритма модифицированного симплекс-метода, или метода последовательного улучшения допустимого вектора, рассмотрим только те его пункты, которые существенно касаются вопроса получения решений систем (I).

## I. Постановка задачи

Задача I. Найти вектор $x$, максимизирующий линейную форму

$$cx \tag{3}$$

при условиях

$$\begin{gathered} Ax \geqslant b, \\ x \geqslant 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Задача II. Найти вектор $y$, минимизирующий линейную форму

$$-yb \tag{3'}$$

при условиях

$$\begin{gathered} yA + c \leqslant 0, \\ y \geqslant 0, \end{gathered} \tag{4'}$$

$$A = \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & \dots & A_{0m} \\ 0 & A_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & A_{mm} \end{pmatrix}$$

- матрица размерности $N \times R$, где $A_{ij}$ - матрица размерности $n_i \times r_j$, $i, j = 0, \dots, m$, причем $A_{ij} = 0$ для $i \geqslant 1$ и $i \neq j$,

$$N = \sum_{i=0}^{m} n_i, \quad R = \sum_{j=0}^{m} r_j;$$

$$C = (c_0, c_1, \dots, c_m),$$

где $c_j$ — вектор-строка размерности $r_j$, $j = 0, \dots, m$;

$$b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix};$$

где $b_i$ - вектор-столбец размерности $n_i$, $i = 0, \ldots, m$;

$$y = (y_0, y_1, \ldots, y_m),$$

где $y_i$ - вектор-строка размерности $n_i$, $i = 0, \ldots, m$,

$$x = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_m \end{pmatrix},$$

где $x_j$ - вектор-столбец размерности $r_j$, $j = 0, \ldots, m$.

В дальнейшем нам понадобятся обозначения:

$D_{\cdot j}$ - матрица размерности $N \times l_j$, составленная из матриц $D_{ij}$ размерности $n_i \times l_j$, $i = 0, \ldots, m$,

$$D_{\cdot j} = \begin{pmatrix} D_{0j} \\ D_{1j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ D_{mj} \end{pmatrix};$$

$$E = \begin{pmatrix} E_{00} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & E_{11} & \ldots & 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & E_{mm} \end{pmatrix},$$

где $E_{jj}$ - единичная матрица размерности $n_j \times n_j$, $j = 0, \ldots, m$;

$D^{\xi}$ - $\xi$-ый столбец матрицы $D$ или $\xi$-ая компонента вектора-строки $D$;

$(D)_{\nu}$ - $\nu$-ая строка матрицы $D$ или $\nu$-ая компонента вектора-столбца $D$.

## 2. Описание алгоритма

Пусть имеется вектор-столбец $\bar{x}$ размерности $N$ такой, что

$$B\bar{x}=b,$$

где $B$ – матрица размерности $N\times N$, составленная из столбцов матриц $-E$, $A_{\cdot j}$, $j=0,\ldots,m$, образующих $N$-мерный базис, а вектор $x$ размерности $R$, полученный из $\bar{x}$ по формулам

$$(x_j)_\xi=\begin{cases}(\bar{x})_l, \text{ если } A_{\cdot j}^{\xi}=B^l \text{ для некоторого } l,\ 1\leq l\leq N,\\ 0, \text{ если для всех } l=1,\ldots,N,\ A_{\cdot j}^{\xi}\neq B^l\end{cases}$$

$j=0,\ldots,m$, $\xi=1,\ldots,n_j$,

удовлетворяет условиям (4) задачи I. При этом если $l$-ое ограничение ($1\leq l\leq N$) в (4) выполняется как строгое неравенство, то $B^l=-E^l$. Предполагается, что в матрице $A$ нет одинаковых столбцов и нет столбцов, равных $E^l$ для некоторого $l$ $(1\leq l\leq N)$.

Не нарушая общности, можно считать, что матрица $B$ имеет следующую структуру:

$$B=(B_{\cdot 0}\ B_{\cdot 1}\ \ldots\ B_{\cdot m}),$$

где $B_{\cdot j}$ – матрица размерности $N\times n_j$, $j=0,\ldots,m$, составленная из матриц $B_{ij}$ размерности $n_i\times n_j$, $i=0,\ldots,m$, причем $B_{ij}=0$ для $i,j\geq 1$ и $i\neq j$.

Заметим, что матрица $B_{\cdot 0}$ в свою очередь имеет блочно-диагональную структуру:

$$B_{\cdot 0}\equiv\dot{B}=(\dot{B}_{\cdot 0}\ \dot{B}_{\cdot 1}\ \ldots\ \dot{B}_{\cdot m}), \tag{5}$$

где $\dot{B}_{\cdot j}$ – матрица размерности $N\times s_j$, $s_j\geq 0$, $j=0,\ldots,m\left(\sum_{j=0}^{m}s_j=n_0\right)$, составленная из матриц $B_{ij}$ размерности $n_i\times s_j$, $i=0,\ldots,m$, причем $B_{ij}=0$ для $i\geq 1$ и $i\neq j$.

Матрице $B$ соответствует вектор $\bar{c}=(\bar{c}_0, \ldots, \bar{c}_m)$, где $\bar{c}_j=(\bar{c}_j^{\,1}, \ldots, \bar{c}_j^{\,n_j})$ – вектор-строка, компоненты которого определяются следующим образом:

$$\bar{c}_j^{\,l}=\begin{cases} 0, \text{ если } B_{\cdot j}^{l}=-E_{\cdot j}^{l}, \\ c_j^{\xi}, \text{ если } B_{\cdot j}^{l}=A_{\cdot j}^{\xi} \text{ для некоторого } \xi (1\le\xi\le r_j), \quad j\ge 1, \\ c_i^{\xi}, \text{ если } B_{\cdot 0}^{l}=A_{\cdot i}^{\xi} \text{ для некоторых } \xi \text{ и } i (1\le\xi\le r_i,\ 0\le i\le m), \end{cases}$$

$j=0,\ldots,m,\ l=1,\ldots,n_j$.

Пусть матрица $B_{\cdot 0}$ и вектор $c_0$ преобразованы по следующим формулам:

$$\mathcal{B}_{\cdot 0}=B_{\cdot 0}-\sum_{j=1}^{m} B_{\cdot j}\Lambda_j, \qquad \gamma_0=\bar{c}_0-\sum_{j=1}^{m}\bar{c}_j\Lambda_j, \tag{6}$$

где $\mathcal{B}_{00}=B_{\cdot 00}-\sum_{j=1}^{m} B_{0j}\Lambda_j$, $\mathcal{B}_{i0}=0$ для $i\ge 1$, если в качестве $\Lambda_j$ взять $\Lambda_j=B_{jj}^{-1}B_{j0}$.

Очевидно, что матрица $\Lambda_j$ имеет такую же структуру, как и матрица $B_{j0}$, т. е. содержит не более чем $s_j$ ненулевых столбцов размерности $n_j$,

$$\Lambda_j^{l}\begin{cases} =0 \quad \text{для} \quad l=1,\ldots,\sum_{i=0}^{j-1}s_i,\ \sum_{i=0}^{j}s_i+1,\ldots,n_0, \\ \ne 0 \quad \text{для} \quad l=\sum_{i=0}^{j-1}s_i+1,\ldots,\sum_{i=0}^{j}s_i. \end{cases}$$

Итак, матрица $\mathcal{B}$ и вектор $\gamma$, полученные из $B$ и $\bar{c}$ заменой $B_{\cdot 0}$ на $\mathcal{B}_{\cdot 0}$ и $\bar{c}_0$ на $\gamma_0$, будут иметь вид

$$\mathcal{B}=\begin{pmatrix} \mathcal{B}_{00} & B_{01} & B_{02} & \ldots & B_{0m} \\ 0 & B_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & B_{mm} \end{pmatrix},$$

$$\gamma=(\gamma_0, \bar{c}_1, \ldots, \bar{c}_m).$$

Если теперь вместо матрицы $B^{-1}$ будем хранить матрицы $\mathcal{B}_{00}^{-1}, B_{11}^{-1}, \ldots, B_{mm}^{-1}, \Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$, то решения систем (I) легко получаются при помощи нижеприведенных схем.

Схема I: решить систему линейных уравнений

$$yB = -\bar{c}, \quad y = (y_0, y_1, \ldots, y_m) \tag{7}$$

или эквивалентную ей систему

$$y\mathcal{B} = -\gamma. \tag{8}$$

Исходя из структуры матрицы $\mathcal{B}$, можно найти $y_i$, $i = 0, \ldots, m$, решая вместо системы (7) порядка $N(m+1)$ систему порядков $n_i$, $i = 0, \ldots, m$, а именно

$$y_0 \mathcal{B}_{00} = -\gamma_0,$$

откуда

$$y_0 = -\gamma_0 \mathcal{B}_{00}^{-1}, \tag{9}$$

$$y_i B_{ii} = -(\bar{c}_i + y_0 B_{0i}), \quad i = 1, \ldots, m,$$

откуда

$$y_i = -(\bar{c}_i + y_0 B_{0i}) B_{ii}^{-1}.$$

Схема II. Как известно, критерием оптимальности вектора $x$ является выполнение условий ($4'$) задачи II для вектора $y$, полученного из условий (7) (см. [I]).

Пусть одно из условий ($4'$) нарушено, например, для некоторых $k$ и $s$, $0 \leq k \leq m$, $1 \leq s \leq r_k$,

$$(y, A_{\cdot k}^{s}) + c_k^s > 0. \tag{10}$$

Тогда $A_{\cdot k}^{s}$ нужно ввести в базис $B$.

Замечание. Если в ($4'$) нарушается условие $y \geq 0$, т. е. для некоторых $s$ и $k (1 \leq s \leq n_k, 0 \leq k \leq m)$, $y_k^s < 0$, то в базис $B$ нужно ввести столбец $-E_{\cdot k}^{s}$ так же, как и $\dot{A}_{\cdot k}^{'s}$.

Чтобы получить разложение $A^s_{\cdot k}$ по базису, необходимо решить систему

$$Bg = A^s_{\cdot k}, \qquad g = \begin{pmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_m \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где $g_j$ - вектор-столбец размерности $n_j$, $j=0,\ldots,m$.

Преобразуем столбец $A^s_{\cdot k}$ так, чтобы все его компоненты, кроме $n_0$ первых, обратились в нуль:

$$\mathcal{A}^s_{\cdot k} = A^s_{\cdot k} - B_{\cdot k}\lambda^s_k, \tag{12}$$

где

$$\lambda^s_k = B^{-1}_{kk} A^s_{kk},$$

т. е. $\mathcal{A}^s_{0k} = A^s_{0k} - B_{0k}\lambda^s_k$, $\quad \mathcal{A}^s_{ik} = 0 \quad$ для $\quad i \geq 1$.

Заметим, что если $k=0$, то $\lambda^s_k = 0$ и $\mathcal{A}^s_{\cdot k} = A^s_{\cdot k}$.

Легко показать, что

$$g_j = \begin{cases} \mathcal{B}^{-1}_{00}\mathcal{A}^s_{0k} & \text{для} \quad j=0, \quad 0 \leq k \leq m, \\ \lambda^s_k - \Lambda_k g_0 & \text{для} \quad j=k, \quad \text{если} \quad k \geq 1, \\ -\Lambda_j g_0 & \text{для} \quad j=1,\ldots,k-1,\ k+1,\ldots,m. \end{cases} \tag{13}$$

Действительно, запишем систему (11) в виде

$$B_{\cdot 0} g_0 + \sum_{j=1}^{m} B_{\cdot j} g_j = A^s_{\cdot k} \tag{14}$$

и подставим в (14) вместо матрицы $B_{\cdot 0}$ и вектора $A^s_{\cdot k}$ их значения из (6) и (12) соответственно:

$$\mathcal{B}_{\cdot 0} g_0 + \sum_{j=1}^{m} B_{\cdot j}(g_j + \Lambda_j g_0) - B_{\cdot k}\lambda^s_k = \mathcal{A}^s_{\cdot k}. \tag{15}$$

Учитывая структуру матриц $\mathcal{B}_{\cdot 0}$, $B_{\cdot j}$, $j=1,\dots,m$ и столбца $\mathcal{A}^{s}_{\cdot k}$, систему (I5) можно переписать в следующем виде:

$$\mathcal{B}_{00}\, g_0 + \sum_{j=1}^{m} B_{0j}(g_j + \Lambda_j g_0) - B_{0k}\lambda^s_k = \mathcal{A}^s_{0k} \quad (0 \le k \le m).$$

$$B_{kk}(g_k + \Lambda_k g_0 - \lambda^s_k) = 0, \quad \text{если} \quad k \ge 1. \tag{I6}$$

$$B_{jj}(g_j + \Lambda_j g_0) = 0 \quad \text{для} \quad j = 1,\dots,k-1,k+1,\dots,m.$$

В силу единственности решения системы (I6)

$$g_k + \Lambda_k g_0 - \lambda^s_k = 0, \quad \text{если} \quad k \ge 1,$$

$$g_j + \Lambda_j g_0 = 0 \quad \text{для} \quad j = 1,\dots,k-1,k+1,\dots,m,$$

откуда тотчас следует (I3).

Далее, по обычным формулам симплекс-метода находим место исключаемого столбца $\nu$ и вычисляем новый вектор $\bar{x}'$

$$\bar{x}' = \bar{x} - \theta g + \theta E^{\nu},$$

где

$$\theta = \frac{(\bar{x})_\nu}{(g)_\nu} = \min_{(g)_l > 0,\ l=1,\dots,N} \frac{(\bar{x})_l}{(g)_l}.$$

Рассмотрим три возможных случая значения $\nu$ и как в зависимости от этого должны преобразоваться

$$\gamma_0, \mathcal{B}^{-1}_{00}, B^{-1}_{11}, \dots, B^{-1}_{mm}, \Lambda_1, \dots, \Lambda_m.$$

Случай I: исключенный столбец $B^{\nu}$ находится в матрице $B_{\cdot 0}$ $(1 \le \nu \le n_0)$. Тогда $A^s_{\cdot k}$ вводится на его место, и матрица $\mathcal{B}^{-1}_{00}$ подправляется по известным формулам (см. например, работу [4] ):

$$\mathcal{B}'^{-1}_{00} = \mathcal{B}^{-1}_{00} - \frac{1}{(g_0)_\nu}(g_0 - E^{\nu}_{00})(E_{00})_\nu \mathcal{B}^{-1}_{00}. \tag{I7}$$

Кроме того, если исключенный столбец $B^{\nu} = A^{\xi}_{\cdot \bar{j}}$ и $\bar{j} \ge 1$, то в матрице $\Lambda_{\bar{j}}$ столбец $\Lambda^{\nu}_{\bar{j}}$ нужно заменить нулевым, в матрицу $\Lambda_k$ вписать столбец $\lambda^s_k$ вместо $\Lambda^{\nu}_k$, а в векторе $\gamma_0$ компоненту $\gamma^{\nu}_0$ заменить на $c^s_k - \bar{c}_k \lambda^s_k$.

Случай 2: исключенный столбец $B^{\nu} = B_{.\kappa}^{\bar{\nu}}$, $\kappa \geq 1$, $1 \leq \bar{\nu} \leq n_{\kappa}$ и $(\lambda_{\kappa}^{s})_{\bar{\nu}} \geq (\Lambda_{\kappa}^{i})_{\bar{\nu}}$, $i = 1, \ldots, n_0$. Тогда $A_{.\kappa}^{s}$ вводится на его место, матрица $B_{\kappa\kappa}^{-1}$ подправляется по формуле, аналогичной (17):

$$B_{\kappa\kappa}^{\prime -1} = B_{\kappa\kappa}^{-1} - \frac{1}{(\lambda_{\kappa}^{s})_{\bar{\nu}}} \left(\lambda_{\kappa}^{s} - E_{\kappa\kappa}^{\bar{\nu}}\right)\left(E_{\kappa\kappa}\right)_{\bar{\nu}} B_{\kappa\kappa}^{-1},$$

$\bar{\nu} = \nu - \sum\limits_{i=0}^{\kappa-1} n_i$ — номер исключенного столбца в матрице $B_{.\kappa}$. Если при этом $\Lambda_{\kappa} \neq 0 \, (s_{\kappa} > 0)$, то $\Lambda_{\kappa}$ необходимо преобразовать по формулам:

$$\left(\Lambda_{\kappa}^{\prime l}\right)_i = \begin{cases} \left(\Lambda_{\kappa}^{l}\right)_i - \dfrac{\left(\Lambda_{\kappa}^{l}\right)_{\bar{\nu}}}{\left(\lambda_{\kappa}^{s}\right)_{\bar{\nu}}} \left(\lambda_{\kappa}^{s}\right)_i & \text{для} \quad i = 1, \ldots, \bar{\nu}-1, \bar{\nu}+1, \ldots, n_{\kappa}, \\ \dfrac{\left(\Lambda_{\kappa}^{l}\right)_{\bar{\nu}}}{\left(\lambda_{\kappa}^{s}\right)_{\bar{\nu}}} & \text{для} \quad i = \bar{\nu}, \end{cases} \tag{18}$$

$l = \sum\limits_{j=0}^{\kappa-1} s_j + 1, \ldots, \sum\limits_{j=0}^{\kappa} s_j$.

В матрице $\mathcal{B}_{00}$ в этом случае нужно произвести замену $s_{\kappa}$ столбцов, т. е. столбцы $\mathcal{B}_{00}^{l} = B_{00}^{l} - B_{0\kappa}\Lambda_{\kappa}^{l}$ нужно заменить на $\mathcal{B}_{00}^{\prime l} = B_{00}^{l} - B_{0\kappa}^{\prime}\Lambda_{\kappa}^{\prime l}$,

$$l = \sum_{j=0}^{\kappa-1} s_j + 1, \ldots, \sum_{j=0}^{\kappa} s_j,$$

где матрицы $B_{0\kappa}$ и $B_{0\kappa}^{\prime}$ отличаются только одним столбцом. Легко показать, что

$$\mathcal{B}_{00}^{\prime l} = \mathcal{B}_{00}^{l} - \left(\Lambda_{\kappa}^{\prime l}\right)_{\bar{\nu}} \mathcal{A}_{0\kappa}^{s}.$$

Действительно,

$$\mathcal{B}_{00}^{l} = B_{00}^{l} - B_{0\kappa}\Lambda_{\kappa}^{l} = B_{00}^{l} - \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq \bar{\nu})}}^{n_{\kappa}}{}' B_{0\kappa}^{i}\left(\Lambda_{\kappa}^{l}\right)_i - B_{0\kappa}^{\bar{\nu}}\left(\Lambda_{\kappa}^{l}\right)_{\bar{\nu}}; \tag{19}$$

$$\mathcal{B}_{00}^{\prime l} = B_{00}^{l} - B_{0\kappa}^{\prime}\Lambda_{\kappa}^{\prime l} = B_{00}^{l} - \sum_{\substack{i=1 \\ (i \neq \bar{\nu})}}^{n_{\kappa}}{}' B_{0\kappa}^{i}\left(\Lambda_{\kappa}^{\prime l}\right)_i - A_{0\kappa}^{s}\left(\Lambda_{\kappa}^{\prime l}\right)_{\bar{\nu}} -$$

$$- B_{0\kappa}^{\bar{\nu}}\left(\Lambda_{\kappa}^{l}\right)_{\bar{\nu}} + B_{0\kappa}^{\bar{\nu}}\left(\Lambda_{\kappa}^{l}\right)_{\bar{\nu}}. \tag{20}$$

Подставив (I8) в (20), получим на основании (I2), (I8) и (I9):

$$\mathcal{B}_{00}^{\prime l}=\mathcal{B}_{00}^{l}-\frac{(\Lambda_{\kappa}^{l})_{\bar{\nu}}}{(\lambda_{\kappa}^{s})_{\bar{\nu}}}\left(A_{0\kappa}^{s}-B_{0\kappa}\lambda_{\kappa}^{s}\right)=\mathcal{B}_{00}^{l}-(\Lambda_{\kappa}^{\prime l})_{\bar{\nu}}\,\mathcal{A}_{0\kappa}^{s}\;.$$

Следовательно, из всех столбцов $\mathcal{B}_{00}^{l}$ матрицы $\mathcal{B}_{00}$ нужно вычесть один и тот же столбец $\mathcal{A}_{0\kappa}^{s}$ со скалярным множителем

$$u^{l}=\begin{cases} 0, & \text{если } l=1,\ldots,\sum\limits_{j=0}^{\kappa-1}s_j,\ \sum\limits_{j=0}^{\kappa}s_j+1,\ldots,n_0\,, \\ (\Lambda_{\kappa}^{\prime l})_{\bar{\nu}}, & \text{если } l=\sum\limits_{j=0}^{\kappa-1}s_j+1,\ldots,\sum\limits_{j=0}^{\kappa}s_j\,, \end{cases}$$

или в матричной форме [4] :

$$\mathcal{B}_{00}^{\prime}=\mathcal{B}_{00}-\mathcal{A}_{0\kappa}^{s}u,\quad \gamma_0^{\prime}=\gamma_0-(c_{\kappa}^{s}-\bar{c}_{\kappa}\lambda_{\kappa}^{s})\,u\,,$$

где

$$u=(u^{1},\ldots,u^{n_0})\,.$$

Тогда

$$\mathcal{B}_{00}^{\prime-1}=\mathcal{B}_{00}^{-1}+\frac{1}{1-u g_0}\,g_0\,u\,\mathcal{B}_{00}^{-1}\;. \tag{21}$$

Формула (I7), как видно, является частным случаем (2I).

Случай 3. Если исключенный столбец $B^{\nu}=B_{\bar{\kappa}}^{\cdot\mu},\bar{\kappa}\geqslant 1, 1\leqslant\mu\leqslant n_{\bar{\kappa}}$, причем в случае $\bar{\kappa}=\kappa$ $(\lambda_{\kappa}^{s})_{\mu}\geqslant(\Lambda_{\kappa}^{i})_{\mu}$ для всех $i=1,\ldots,n_0$, то преобразование разбивается на два этапа:

а) В матрице $\mathcal{B}_{\cdot 0}$ отыскивается столбец $\mathcal{B}_{\cdot 0}^{\bar{\nu}}$ $(1\leqslant\bar{\nu}\leqslant n_0)$ такой, что $(\Lambda_{\bar{\kappa}}^{\bar{\nu}})_{\mu}\geqslant(\Lambda_{\bar{\kappa}}^{i})_{\mu}, i=1,\ldots,n_0$, и столбцы $B_{\cdot 0}^{\bar{\nu}}$ и $B_{\bar{\kappa}}^{\cdot\mu}$ меняются местами.

В этом случае матрицы $B_{\bar{\kappa}\bar{\kappa}}^{-1}$ и $\Lambda_{\bar{\kappa}}$ подправляются так же, как в случае 2 с помощью столбца $\Lambda_{\bar{\kappa}}^{\bar{\nu}}$, а $\mathcal{B}_{00}^{-1}$, $\gamma_0$ и $g_0$ преобразуются по формулам:

$$\mathcal{B}_{00}^{\prime -1} = \mathcal{B}_{00}^{-1} - E_{00}^{\bar{\nu}}\, \bar{u}\, \mathcal{B}_{00}^{-1} ,$$

$$\gamma_0^{\prime} = \gamma_0 - \frac{\gamma_0^{\bar{\nu}}}{(\Lambda_{\bar{k}}^{\bar{\nu}})_\mu}\, \bar{u} ,$$

$$g_0^{\prime} = g_0 - (\bar{u} g_0)\, E_{00}^{\bar{\nu}} ,$$

где

$$\bar{u} = (\Lambda_{\bar{k}})_\mu + (E_{00})_{\bar{\nu}} .$$

б) Столбец $A_{\cdot k}^{s}$ вводится вместо $B_{\cdot 0}^{\bar{\nu}}$ и $\mathcal{B}_{00}^{\prime -1}$, $\Lambda_{\bar{k}}^{\prime}$, $\gamma_0^{\prime}$ преобразуются с помощью вектора $g_0^{\prime}$ так же, как в случае I.

З а м е ч а н и е. Ради простоты изложения здесь рассматривалась каноническая форма системы ограничений (4), т. е. все ограничения были заданы в форме неравенств и переменные $(x_j)_\xi$ неотрицательны, но все виды обобщений, указанные в статье [3] настоящего сборника, могут быть перенесены и на данную задачу без существенного усложнения описанного алгоритма.

## 3. Частный случай

Рассмотрим отдельно задачу, в которой матрица $A$ имеет еще более частную структуру, а именно когда $A_{ij}$ - матрица размерности $1 \times r_j$ для $i, j = 1, \ldots, m$.

Для простоты можно считать, что все элементы матрицы $A_{ii}\ (i \geq 1)$ отличны от нуля и равны $\pm$ I. В противном случае можно перенумеровать столбцы так, чтобы столбец $A_{\cdot j}^{\xi}$, у которого $A_{jj}^{\xi} = (0)$, попал в матрицу $A_{\cdot 0}$, и домножить столбец $A_{\cdot j}^{\xi}$ на скаляр $\frac{1}{|a|}$, если $A_{jj}^{\xi} = (a)$ и $|a| > 0$, но $|a| \neq 1$.

Очевидно, что описанный выше алгоритм может быть целиком применен для решения этой задачи.

В то же время вычисления векторов $y_i$, $g_j$, а также подправление матриц $\mathcal{B}_{00}^{-1}$, $B_{jj}^{-1}$, $\Lambda_j$, $j=1,\dots,m$, сильно упрощается в связи с тем, что теперь для $i,j \geq 1$ матрица $B_{jj}^{-1}$ имеет порядок I и ее элемент равен $\pm$I, $B_{0j}$ – матрица размерности $n_0 \times 1$, $B_{j0}$, а следовательно и $\Lambda_j$ – матрицы размерности $1 \times n_0$, в каждой из которых только $s_j$ элементов равны I или -I, а остальные нули $\left(\sum_{j=0}^{m} s_j = n_0\right)$,

$$\lambda_k^s = \begin{cases} (0), & \text{если } k=0, \\ (\pm 1), & \text{если } k \geq 1, \end{cases}$$

$\bar{c}_j$, $g_j$, $y_j$ – векторы размерности I, так что в некоторых случаях произведение вектора на матрицу или матрицы на вектор фактически является скалярным произведением векторов или произведением скаляров, а так как элементы некоторых матриц и векторов равны I или -I, то часть произведений сводится к изменению знака, что особенно полезно учитывать при программировании на ЭВМ. Кроме того, если $m \gg n$, то полезно учитывать при вычислении $g_j$, $j \geq 1$ и преобразовании $\bar{x}$ тот факт, что количество матриц $\Lambda_j \neq 0$ не более чем $n_0$, так как в этом случае для хранения всех матриц $\Lambda_j$, $j=1,\dots,m$, достаточно $n_0$ двоичных разрядов, так же как для хранения всех матриц $B_{jj}^{-1}$, $j=1,\dots,m$ $m$ двоичных разрядов.

Впервые на специфику таких задач было обращено внимание в статье [2].

## ЛИТЕРАТУРА


1. Канторович Л. В. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов, 1959.
2. Рубинштейн Г. Ш. Обобщение задачи о крайней точке пересечения оси с выпуклым многогранником. - ДАН СССР, 1957, т. 113, № 5.
3. Рубинштейн Г. Ш. О решении задач линейного программирования большого объема. Настоящий сборник.
4. Фаддеев Д. К и Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры, 1960.