М. А. ЯКОВЛЕВА

ДВУХКОМПОНЕНТНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Общая задача линейного программирования, частным случаем которой является двухкомпонентная задача, может быть сформулирована следующим образом.

Задана матрица

$$A=\{a_{ij}\}_{\substack{i=1,\dots,n;\\ j=1,\dots,m;}}$$

и векторы

$$B=\{b_j\}_{j=1,\dots,m}, \quad C=\{c_i\}_{i=1,\dots,n}, \quad D=\{d_i\}_{i=1,\dots,n}.$$

Требуется определить вектор $X=\{x_i\}_{i=1,\dots,n}$, удовлетворяющий условиям:

1°. $0\leq x_i\leq d_i$, $i=1,\dots,n$,

2°. $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}x_i=b_j$, $j=1,\dots,m$,

3°. достигает минимума величина

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i .$$

Если в решаемой задаче не все x_i имеют ограничения сверху, то соответствующие d_i равны $+\infty$ (точнее, достаточно большому числу R).

Вектор X называется допустимым, если выполнены условия 1^0 и 2^0, и оптимальным, если выполнены условия 1^0, 2^0 и 3^0.

Известно [3], что необходимым и достаточным условием оптимальности допустимого вектора является существование чисел y_j, $j=1,2,\dots,m$, удовлетворяющих условиям:

1) $\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \le c_i$, если $x_i = 0$,

2) $\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} y_j = c_i$, если $0 < x_i < d_i$,

3) $\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} y_j \ge c_i$, если $x_i = d_i$.

Допустимый вектор называется базисным, если можно выделить m линейно-независимых строк матрицы A

$$A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m} \tag{1}$$

так, что для строк, не совпадающих с выделенными, $x_i = 0$ или $x_i = d_i$. Совокупность векторов (1) называется базисом.

Для широкого класса практических задач матрица A имеет частный вид: каждая ее строка содержит не более двух отличных от нуля компонент. Применять в этом случае алгорифмы, разработанные для решения общей задачи линейного программирования, нецелесообразно. Изучению более частной задачи указанного типа посвящен ряд работ (см. , например, [1, 2]). В настоящей статье рассматривается двухкомпонентная задача в общем виде и для ее решения приводится детализированный алгорифм, рассчитанный на использование ЭВМ. По своему характеру описываемый алгорифм является конкретизацией модифицированного симплекс-метода, учитывающей специфику задачи. Двухкомпонентная структура матрицы позволяет на каждом шаге процесса алгорифмически решать системы для определения очередного вектора $Y = \{y_j\}_{j=1,\dots,m}$ и коэффициентов разложения вводимого в базис вектора. Это снимает необходимость вести обратную матрицу большой размерности и приводит к снижению трудоемкости решения и к увеличению объема решаемых задач.

Вектор $Y=\{y_j\}_{j=1,\ldots,m}$ на каждом шаге определяется из системы уравнений

$$A_{i_\nu} Y = c_{i_\nu}, \quad \nu=1,\ldots,m, \qquad (2)$$

где $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$ – базис, соответствующий рассматриваемому в данный момент допустимому вектору.

В нашем случае система (2) обладает рядом свойств, используемых в алгорифме.

Эта система состоит из одной или нескольких нераспадающихся групп уравнений, попарно не имеющих общих неизвестных. При этом группа представляет собой систему с числом уравнений, равным числу неизвестных.

Нераспадающуюся систему уравнений назовем циклом, если каждое неизвестное входит в уравнение два и только два раза.

Структура встречающихся в двухкомпонентной задаче групп может быть одного из двух видов:

а) в группе имеется уравнение, содержащее одно неизвестное; можно показать, что группа такого вида не содержит других уравнений с одним неизвестным и циклов;

б) в группе нет уравнения, содержащего одно неизвестное; в этом случае из уравнений группы единственным образом выделяется подсистема, являющаяся циклом.

Для наглядности дальнейшего изложения с каждым неизвестным y_j будем связывать вершину некоторого графа, а каждому уравнению системы (2) соотнесем дугу этого графа, соединяющую вершины, соответствующие неизвестным с ненулевыми коэффициентами. При этом уравнениям с одним ненулевым коэффициентом сопоставим на графе стрелки, выходящие из соответствующих вершин. Стрелки графа также будем называть дугами. Таким путем для каждого базиса может быть построен его граф.

Из сказанного выше следует, что полученный граф состоит из компонент двух видов:

а) дерево, к одной (и только одной) вершине которого примыкает стрелка;

б) простой цикл с примыкающими к нему ответвлениями в виде деревьев.

На этом графе каждая вершина j соединена цепочкой дуг и вершин со стрелкой или циклом. Последовательность вершин этой цепочки будем называть цепочкой вершин, выходящей из вершины j, а последовательность дуг - цепочкой дуг. При этом стрелка включается в цепочку дуг.

Для каждого цикла графа в дальнейшем будет зафиксировано одно из возможных направлений его обхода.

Числа и группы чисел, фигурирующие в алгорифме и одинаковые по своему смыслу, объединяются в списки.

Список 1 служит для записи исходной информации, а также отметок у небазисных строк матрицы A, которым соответствуют $x_i = d_i$. Список состоит из n строк вида

i	$p^{(i)}$	$q^{(i)}$	$a^{(i)}$	$b^{(i)}$	$c^{(i)}$	$d^{(i)}$	$\pi^{(i)}$

где i - номер строки матрицы A;

$p^{(i)}, q^{(i)}$ - номера отличных от нуля компонент i-ой строки матрицы A;

$a^{(i)}, b^{(i)}$ - значения компонент с номерами $p^{(i)}$ и $q^{(i)}$ соответственно;

$c^{(i)}$ - i-ая компонента вектора C;

$d^{(i)}$ - i-ая компонента вектора D;

$\pi^{(i)}$ - равно нулю, если $x_i = 0$ или A_i входит в базис, и равно единице в противном случае.

Если в строке матрицы имеется только один отличный от нуля элемент, т. е. $a^{(i)} = 0$ или $b^{(i)} = 0$, то $p^{(i)}$ или соответственно $q^{(i)}$ полагается равным нулю.

Список 2, состоящий из m строк, служит для хранения данных об очередном базисе. Он включает в себя информацию из списка 1 (за исключением отметки $\pi^{(i)}$) о базисных строках матрицы A и соответствующих компонентах векторов C, X и D. Кроме того, в нем отведено место для коэффициентов f_k разложения вновь вводимого вектора по базису и вспомогательных величин φ_k и ψ_k, причем φ_k принимает значения 0 или 1, ψ_k может быть равно одному из чисел 0, 1, 2, 3. Все величины этого списка в отличие от величин из списка I отмечены нижним индексом, означающим номер строки. Строка κ списка 2 имеет вид:

i_κ	p_κ	q_κ	a_κ	b_κ	c_κ	d_κ	x_κ	f_κ	φ_κ	ψ_κ

Список 3 состоит из m строк вида:

y_j	l_j	η_j	ζ

Величина y_j, стоящая в j-ой строке этого списка, равна j-ой компоненте вектора Y. Величина l_j принимает значения 1, 2, ...,m. Отметки η_j и ζ_j принимают значения 0 и 1.

Поскольку список 2 содержит информацию об уравнениях системы (2), то этим списком задан граф соответствующего базиса. Каждая строка списка 2 определяет одну из его дуг. Строкам списка 3 соответствуют вершины этого графа, причем вершины цикла выделены отметкой $\zeta_j = 1$. Величина l_j указывает номер (в списке 2) первой из дуг цепочки, выходящей из вершины j. При этом, если вершина j лежит на цикле, то l_j указывает номер первой дуги при обходе цикла в выбранном направлении, начиная с вершины j.

В дальнейшем мы не будем различать строки списка 2 и дуги графа, а также его вершины и строки списка 3.

Изложение алгорифма ведется близко к его машинной реализации и разбито на ряд самостоятельных частей (блоков), снабженных необходимыми пояснениями. Однако для большей ясности изложения некоторые схожие куски алгорифма, которые при написании программы легко объединяются в одну подпрограмму, описаны независимо.

Для сокращения изложения принята следующая символика. Запись

$$F(P, Q, \ldots, R) = S$$

означает, что надлежит сначала вычислить значение $F(P, Q, \ldots, R)$, а затем присвоить его переменной S. При этом переменная S может входить в число аргументов операции F.

Каждый блок состоит из ряда пунктов и оформлен в виде таблицы, имеющей три графы. Первая графа содержит номер пункта. Во второй графе записываются условия, при удовлетворении которых выполняются действия, указанные в третьей графе. При этом в третьей графе одного пункта может быть указано несколько операций. В этом случае они выполняются в порядке их написания.

Работа блока всегда начинается с пункта 1 и при отсутствии специальных указаний пункты выполняются в естественном порядке. Перед выполнением каждого пункта происходит проверка условий, указанных во второй графе (если таковые имеются). В случае нарушения условий выполнения этого пункта не происходит, а производится исследование следующего пункта. Отсутствие каких-либо условий во второй графе означает, что данный пункт выполняется безусловно. Для облегчения чтения у некоторых таких пунктов все же выписаны условия, заключенные в фигурные скобки. Делать проверку этих условий нет необходимости, так как при выходе на данный пункт они выполняются автоматически. При записи условий, имеющих сложную структуру, принята символика исчисления высказываний.

В блоке 1 осуществляется вычисление значений переменных y_j из уравнений, которым соответствуют дуги графа, не являющиеся стрелками и не лежащие на цикле. Одновременно запоминается информация о цепочках. При этом упорядочения уравнений не производится, а происходит многократный просмотр списка 2. При каждом просмотре выборочно решаются те уравнения, которые в данный момент можно решить, т. е. у которых одно из неизвестных уже определено. При вычислении каждого значения y_j в той же строке списка 3 записывается номер уравнения l_j (номер строки списка 2), с помощью которого это неизвестное было вычислено.

По этим данным для любой вершины графа могут быть восстановлены выходящие из нее цепочки дуг и вершин: для любой вершины j непосредственно имеем номер l_j первой дуги цепочки и по этому номеру в списке 2 находим вершину, следующую за вершиной j. По ней определяем номер следующей дуги и т. д.

Разъясним смысл вспомогательных величин, участвующих в этом блоке. Если $\eta_j = 1$, то значение y_j допустимо использовать для вычисления других неизвестных.

Величина ζ_j, как уже говорилось, введена для обозначения вершин циклов. Вычисляемые в блоке 1 неизвестные y_j заведомо не принадлежат циклу, и поэтому для них $\zeta_j=0$. Если $\varphi_\kappa = 1$, то это значит, что соответствующее уравнение уже использовалось в вычислениях при предыдущих просмотрах списка 2 и что его следует пропустить. Кроме того, иногда требуется искусственно запретить вычисление по некоторому уравнению, что также достигается с помощью величины φ_κ.

При обращении к блоку 1 предполагается, что в списке 3 часть строк имеет нужное заполнение и не подлежит перевычислению. К таким строкам всегда относятся вершины графа, примыкающие к стрелке или лежащие на цикле. Перевычисляются лишь те вершины, для которых выходящие из них цепочки вершин содержат вершину с отметкой $\eta_j = 1$. При этом если вершина с указанной отметкой лежит на цикле, то все дуги цикла в списке 2 должны быть отмечены признаком $\varphi_\kappa = 1$. Если эта вершина не лежит на цикле, то для первой дуги выходящей из нее цепочки $\varphi_\kappa = 1$.

Блок 1

№	Условия	Операции
1		$1 \Rightarrow \kappa,\ 0 \Rightarrow \alpha$.
2	$(\varphi_\kappa - 1) \vee (p_\kappa = 0) \vee (q_\kappa = 0)$	Перейти к выполнению пункта 5
3	$(\eta_{p_\kappa} = 0) \& (\eta_{q_\kappa} = 1)$	$\frac{c_\kappa - b_\kappa y_{q_\kappa}}{a_\kappa} \Rightarrow y_{p_\kappa},\ \kappa \Rightarrow l_{p_\kappa},\ 1 \Rightarrow \eta_{p_\kappa},$ $0 \Rightarrow \xi_{p_\kappa},\ 1 \Rightarrow \varphi_\kappa,\ 1 \Rightarrow \alpha$.
4	$(\eta_{p_\kappa} = 1) \& (\eta_{q_\kappa} = 0)$	$\frac{c_\kappa - a_\kappa y_{p_\kappa}}{b_\kappa} \Rightarrow y_{q_\kappa},\ \kappa \Rightarrow l_{p_\kappa},\ 1 \Rightarrow \eta_{q_\kappa},$ $0 \Rightarrow \xi_{q_\kappa},\ 1 \Rightarrow \varphi_\kappa,\ 1 \Rightarrow \alpha$.
5	$\kappa < m$	$\kappa + 1 \Rightarrow \kappa$, перейти к выполнению пункта 2.
6	$\alpha = 1$	Перейти к выполнению пункта 1.
7		Работа блока закончена.

При проведении алгоритма перед обращением к блоку 1 иногда приходится предварительно определять значения неизвестных y_j на цикле. Этой цели служат блоки 2 и 3.

Пусть имеется цикл с r неизвестными $y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_r}$. Будем считать уравнения упорядоченными таким образом, что первое уравнение содержит неизвестные y_{j_1} и y_{j_2}, второе – y_{j_2} и y_{j_3}, третье – y_{j_3} и y_{j_4} и т. д. Наконец, r-ое уравнение содержит неизвестные y_{j_r} и y_{j_1}. Обозначим в s-ом уравнении коэффициенты при указанных неизвестных соответственно через α_s и β_s и правую часть уравнения через γ_s.

В принятых обозначениях система имеет вид

$$\begin{cases} \alpha_1 y_{j_1} + \beta_1 y_{j_2} = \gamma_1 \\ \alpha_2 y_{j_2} + \beta_2 y_{j_3} = \gamma_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{r-1} y_{j_{r-1}} + \beta_r y_{j_r} = \gamma_{r-1} \\ \beta_r y_{j_1} \qquad \alpha_r y_{j_r} = \gamma_r \end{cases} \qquad (3)$$

и может быть решена следующим образом. Примем сначала y_{j_1} за параметр и будем последовательно решать одно уравнение за другим. Из первого уравнения получим

$$y_{j_2} = \frac{\gamma_1 - \alpha_1 y_{j_1}}{\beta_1} = \mu_1 + \rho_1 y_{j_1}.$$

Из второго

$$y_{j_3} = \frac{\gamma_2 - \alpha_2 y_{j_2}}{\beta_2} = \frac{\gamma_2 - \alpha_2 \mu_1}{\beta_2} - \frac{\alpha_2}{\beta_2} \rho_1 y_{j_1} = \mu_2 + \rho_2 y_{j_1}$$

и т. д. Наконец, из последнего уравнения найдем

$$y_{j_1} = \frac{\gamma_r - \alpha_r y_{j_r}}{\beta_r} = \frac{\gamma_r - \alpha_r \mu_{r-1}}{\beta_r} - \frac{\alpha_r}{\beta_r} \rho_{r-1} y_{j_1} = \mu_r + \rho_r y_{j_1} = \mu + \rho y_{j_1}.$$

Для того чтобы $y_{j_1}, y_{j_2}, \ldots, y_{j_r}$ были решением системы (3), y_{j_1} должно удовлетворять условию

$$y_{j_1} = \mu + \rho y_{j_1},$$

т. е. быть равным $\dfrac{\mu}{1-\rho}$.

Блок 2 является вспомогательным и служит для вычисления чисел μ и ρ, которые считаются по рекуррентным формулам

$$\mu_0 = 0, \quad \mu_s = \frac{\gamma_s - \alpha_s \mu_{s-1}}{\beta_s}, \quad s = 1, 2, \ldots, r;$$

$$\rho_0 = 1, \quad \rho_s = -\frac{\alpha_s}{\beta_s}\rho_{s-1}, \quad s = 1, 2, \ldots, r.$$

Перед обращением ко второму блоку структура цикла предполагается оформлённой, т. е. в строках списка 3, соответствующих входящим в цикл неизвестным, должны быть проставлены номера l_j, отвечающие одному из возможных обходов цикла. Кроме того, необходимо задать номер j_0 одной из вершин цикла. В нашем случае полагаем $j_0 = j_1$.

Блок 2

1		$1 \Rightarrow \rho,\ 0 \Rightarrow \mu,\ j_0 \Rightarrow j.$
2	$j = p_{l_j}$	$-\rho \dfrac{a_{l_j}}{b_{l_j}} \Rightarrow \rho,\ \dfrac{c_{l_j} - a_{l_j}\mu}{b_{l_j}} \Rightarrow \mu,\ g_{l_j} \Rightarrow j.$ Перейти к выполнению пункта 4.
3	$\{j = g_{l_j}\}$	$-\rho \dfrac{b_{l_j}}{a_{l_j}} \Rightarrow \rho,\ \dfrac{c_{l_j} - b_{l_j}\mu}{a_{l_j}} \Rightarrow \mu,\ p_{l_j} \Rightarrow j.$
4	$j \neq j_0$	Перейти к выполнению пункта 2.
5		Работа блока окончена.

В блоке 3 происходит вычисление y_{j_s}, выполняемое по формулам

$$y_{j_1} = \frac{\mu}{1-\rho}; \quad y_{j_s} = \frac{\gamma_s - \alpha_s y_{j_{s-1}}}{\beta_s}, \quad s = 2, 3, \ldots, r.$$

Значения y_{j_s} записываются в соответствующие строки списка 3 и для этих строк полагается $\eta_{j_s} = 1$ и $\zeta_{j_s} = 1$

Поскольку неизвестные y_j, принадлежащие циклу, имеют признак $\eta_j = 1$, то при последующем обращении к блоку 1 все они могут быть использованы для вычисления остальных неизвестных этой группы.

Блок 3		
1		$1 \Rightarrow \rho, \quad \frac{\mu}{1-\rho} \Rightarrow \alpha, \quad j_0 \Rightarrow j.$
2		$\alpha \Rightarrow y_j, \quad 1 \Rightarrow \eta_j, \quad 1 \Rightarrow \zeta_j, \quad 1 \Rightarrow \varphi_{ij}.$
3	$j = p_{ij}$	$\frac{c_{ij} - a_{ij}\alpha}{b_{ij}} \Rightarrow \alpha, \quad g_{ij} \Rightarrow j,$ перейти к выполнению пункта 5.
4	$\{j = g_{ij}\}$	$\frac{c_{ij} - b_{ij}\alpha}{a_{ij}} \Rightarrow \alpha, \quad p_{ij} \Rightarrow j.$
5	$j \neq j_0$	Перейти к выполнению пункта 2.
6		Работа блока окончена.

В блоке 4 осуществляется проверка условий 1-3 оптимальности допустимого вектора.

Условие считается нарушенным, если значение невязки $\Delta = a^{(i_0)} y_{p(i_0)} + b^{(i_0)} y_{g(i_0)}$ для некоторой строки списка 1 будет достаточно большим и превысит значение барьера Б. Включение в базис прежде всего тех строк списка 1, для которых невязки достаточно велики, ускоряет процесс решения задачи.

Попутно с проверкой условий по всем строкам списка 1 выбирается максимальная невязка M. В том случае, если ни для одной строки невязка не превышает барьера, значение барьера уменьшается до величины $\frac{M}{2}$. Для выявления этого случая в блоке 4 используется переменная $\varkappa$, принимающая значения 0 и 1; $\varkappa = 0$, если при просмотре списка 1 не обнаружилось невязки, превысившей значение барьера, в противном случае $\varkappa = 1$.

Задача считается решенной, если условия 1 – 3 выполняются с заданной точностью, т. е. при очередном уменьшении величина барьера становится меньше числа $\varepsilon_Б$.

Блок 4 работает автономно. При обнаружении нарушения условий 1 – 3 и соответствующем изменении списков 2 и 3 новая проверка условий начинается не с начала списка 1, а продолжается с того места, где она была прервана, т. е. со строки $i_0 + 1$.

Блок 4

1		$i_0 + 1 \Rightarrow i$.
2	$(i = m+1) \& (\varkappa = 1)$	$0 \Rightarrow M$, $0 \Rightarrow \varkappa$, $1 \Rightarrow i$.
3	$(i = m+1) \& (M \leq \varepsilon_Б)$	Задача решена.
4	$(i = m+1) \& (M > \varepsilon_Б)$	$\frac{M}{2} \Rightarrow Б$, $0 \Rightarrow M$, $1 \Rightarrow i$
5	$\{i \leq m\}$	$a^{(i)} y_{p(i)} + b^{(i)} y_{q(i)} - c^{(i)} \Rightarrow \Delta$.
6	$(\pi^{(i)} = 0) \& (\Delta > Б)$	$i \Rightarrow i_0$, $1 \Rightarrow \varkappa$, перейти к выполнению пункта 11.
7	$(\pi^{(i)} = 0) \& (\Delta > M)$	$\Delta \Rightarrow M$.
8	$(\pi^{(i)} = 1) \& (\Delta < -Б)$	$i \Rightarrow i_0$, $1 \Rightarrow \varkappa$, перейти к выполнению пункта 11.
9	$(\pi^{(i)} = 1) \& (\Delta < -M)$	$-\Delta \Rightarrow M$.
10		$i + 1 \Rightarrow i$, перейти к выполнению пункта 2.
11		Работа блока окончена.

В результате работы блока 4 получается номер i_0-ой строки списка 1, которую надлежит ввести в базис.

Чтобы перейти к новому допустимому вектору с меньшим значением линейной формы в 3^0, нужно найти коэффициенты f_k разложения вводимого в базис вектора $A_{i_0} = a^{(i_0)} e_{p^{(i_0)}} + b^{(i_0)} e_{q^{(i_0)}}$, взятого с обратным знаком (блоки 7 и 8), умножить их на число ε и добавить к x_k в соответствующих строках списка 2 (блок 6).

Подобно симплекс-методу для общей задачи линейного программирования в описываемом алгорифме число ε определяется как предельно возможное при соблюдении условий 1^0. При этом из базиса удаляется тот вектор, на котором одно из неравенств в 1^0 обращается в равенство.

В блоке 5, осуществляющем вычисление ε, номер этого вектора в списке 2 обозначен через λ.

Блок 5

1		$1 \Rightarrow k,\ 0 \Rightarrow \beta,\ 0 \Rightarrow \lambda.$
2	$x_k - \varepsilon f_k < 0$	$\frac{x_k}{f_k} \Rightarrow \varepsilon,\ 0 \Rightarrow \beta,\ k \Rightarrow \lambda.$
3	$x_k - \varepsilon f_k > a_k$	$\frac{x_k - d_k}{f_k} \Rightarrow \varepsilon,\ 1 \Rightarrow \beta,\ k \Rightarrow \lambda.$
4	$k < m$	$k+1 \Rightarrow k$, перейти к выполнению пункта 2.
5	$\beta = 1$	$1 \Rightarrow \pi^{(i_\lambda)}.$
6		Работа блока окончена.

Блок 6

1		$1 \Rightarrow k.$
2		$x_k - \varepsilon f_k \Rightarrow x_k.$
3	$k < m$	$k+1 \Rightarrow k$, перейти к выполнению пункта 2.
4	$(\varepsilon = d^{(i_0)}) \& (\lambda = 0)$	$1 \Rightarrow \pi^{(i_0)}.$
5	$(\varepsilon = -d^{(i_0)}) \& (\lambda = 0)$	$C \Rightarrow \pi^{(i_0)}.$
6	$\lambda \neq 0$	$0 \Rightarrow \pi^{(i_0)},\ i_0 \Rightarrow i_\lambda,\ p^{(i_0)} \Rightarrow p_\lambda,\ q^{(i_0)} \Rightarrow q_\lambda,$ $a^{(i_0)} \Rightarrow a_\lambda,\ b^{(i_0)} \Rightarrow b_\lambda,\ c^{(i_0)} \Rightarrow c_\lambda,$ $d^{(i_0)} \Rightarrow d_\lambda,\ x_0 + \varepsilon \Rightarrow x_\lambda.$
7		Работа блока окончена.

В блоке 7 вычисляются коэффициенты g_κ $(\kappa = 1, 2, \ldots, m)$ разложения однокомпонентного вектора по векторам базиса, т. е. решается система

$$\sum_{\nu=1}^{m} A_{i\nu}\, g_\nu = g\, e_j\,, \qquad (4)$$

где e_j – положительный орт с единицей в j-ой компоненте.

Среди g_κ отличны от нуля лишь те, которые соответствуют дугам цепочки, выходящей из j, а если эта цепочка оканчивается циклом, то и дугам цикла.

Блок 7

1		$0 \Rightarrow \alpha$, $1 \Rightarrow \gamma$.
2	$j = \alpha$	Перейти к выполнению пункта 7.
3	$(\zeta_j \neq \gamma) \& (j = p_{l_j})$	$l_j \Rightarrow \kappa$, $-\dfrac{g}{a_\kappa} \Rightarrow g$, $f_\kappa + g \Rightarrow f_\kappa$, $\psi_\kappa + \delta \Rightarrow \psi_\kappa$, $g \cdot b_\kappa \Rightarrow g$, $g_\kappa \Rightarrow j$, перейти к выполнению пункта 2.
4	$(\zeta_j \neq \gamma) \& (j = q_{l_j})$	$l_j \Rightarrow \kappa$, $-\dfrac{g}{b_\kappa} \Rightarrow g$, $f_\kappa + g \Rightarrow f_\kappa$, $\psi_\kappa + \delta \Rightarrow \psi_\kappa$, $g \cdot a_\kappa \Rightarrow g$, $p_\kappa \Rightarrow j$, перейти к выполнению пункта 2.
5	$\zeta_j \neq \gamma$	$j \Rightarrow j_0$, выполнить блок 2.
6		$\dfrac{g \cdot \rho}{\rho - 1} \Rightarrow g$, $0 \Rightarrow \gamma$, $j_0 \Rightarrow \alpha$, $j_0 \Rightarrow j$, перейти к выполнению пункта 3.
7		Работа блока окончена.

Если вершина j не лежит на цикле, то выходящая из нее цепочка дуг содержит, по крайней мере, одну дугу. Поскольку вершина j принадлежит только первой дуге цепочки, то уравнения в системе (4), соответствующие цепочке вершин, выходящей из вершины j, позволяют последовательно вычислять коэффициенты разложения, соответствующие цепочке дуг. Если цепочка дуг оканчивается стрелкой, то при этом будут получены все отличные от нуля коэффициенты разложения. Если же цепочка оканчивается циклом, то при выходе на него останется вычислить коэффициенты разложения по его дугам, что соответствует задаче разложения некоторого вектора вида

$$h \cdot e_s ,$$

где h - скаляр, e_s - s-ый положительный орт и вершина s принадлежит циклу. Получение коэффициентов на цикле может быть осуществлено так же, как и получение коэффициентов на цепочке. Начиная с пункта s, нужно перебрать дуги цикла в выбранном направлении, вычисляя последовательно коэффициенты разложения. Отличие состоит лишь в том, что исходная вершина s, помимо первой встречающейся при обходе цикла дуги, принадлежит также и последней.

Рассуждения, аналогичные проведенным при вычислении неизвестных y_j на цикле, дают следующую формулу для коэффициента, соответствующего первой дуге цикла при начале обхода в вершине s :

$$\frac{\rho \cdot h}{(\rho - 1) \cdot \alpha} ,$$

где α - множитель при вычисляемом коэффициенте разложения в s-ом уравнении системы (4) и ρ - величина, введенная при подсчете неизвестных y_j на цикле.

В блоке 8 вычисляются коэффициенты разложения двухкомпонентного вектора $-a^{(i_0)} e_{p(i_0)} - b^{(i_0)} e_{q(i_0)}$. Очевидно, что коэффициенты разложения этого вектора равны сумме коэффициентов разложения векторов $-a^{(i_0)} e_{p(i_0)}$ и $-b^{(i_0)} e_{q(i_0)}$. В связи с этим в блоке 8 дважды происходит обращение к блоку 7. Перед первым обращением задается $j = p^{(i_0)}$, $g = -a^{(i_0)}$ и $f_k = 0$ во всех строках списка 2. В результате работы блока 7 вычисляются коэффициенты разложения для вектора $-a^{(i_0)} e_{p(i_0)}$. Перед вторым обращением полагаем $j = q^{(i_0)}$, $g = -b^{(i_0)}$. Вычисляемые на этот раз коэффициенты разложения суммируются с уже записанными в списке 2 коэффициентами для вектора $-a^{(i_0)} e_{p(i_0)}$.

Помимо вычисления коэффициентов, в блоке 8 присваивается значение величинам ψ_k, которые после конца работы блока 8 имеют следующий смысл: дуги, принадлежащие цепочке дуг, выходящей из вершины $p^{(i_0)}$, отмечены признаком $\psi_k = 1$; дуги цепочки, выходящей из $q^{(i_0)}$, имеют $\psi_k = 2$; для дуг, принадлежащих обеим указанным цепочкам, $\psi_k = 3$. Точно так же отмечены и дуги циклов, если ими оканчиваются цепочки.

Блок 8

1		$1 \Rightarrow k$.
2		$0 \Rightarrow f_k$, $0 \Rightarrow \psi_k$.
3	$k < m$	$k+1 \Rightarrow k$, перейти к выполнению пункта 2.
4		$p^{(i_0)} \Rightarrow j$, $-\alpha^{(i_0)} \Rightarrow g$, $1 \Rightarrow \delta$, выполнить блок 7.
5		$q^{(i_0)} \Rightarrow j$, $-\beta^{(i_0)} \Rightarrow g$, $2 \Rightarrow \delta$, выполнить блок 7.
6		Работа блока окончена.

При изменении базиса могут образоваться новые циклы, которые перед обращением к блокам 2 и 3 надлежит оформить, т. е. в списке 3 для каждой вершины указать номер l первой дуги, следующей за этой вершиной при выбранном обходе цикла.

Как уже говорилось, при заполненных списках 2 и 3, взяв некоторую вершину j_0 за начальную, можно записать цепочку вершин и дуг, выходящую из вершины j_0:

$$l_0, l_1;\ j_1, l_2;\ j_2, l_3;\ \ldots;\ j_{s-1}, l_s;\ j_s, l_{s+1}.$$

Операция, выполняемая блоком 9, по заданным номерам j_0, λ и $l_{s+1} = l$ меняет направленность этой цепочки, сдвигая

Блок 9

1		$\lambda \Rightarrow \alpha$, $j_0 \Rightarrow j$.
2		$l_j \Rightarrow \beta$, $\alpha \Rightarrow l_j$.
3	$j = p_\beta$	$q_\beta \Rightarrow j$, перейти к выполнению пункта 5.
4	$\{j = q_\beta\}$	$p_\beta \Rightarrow j$.
5		$\beta \Rightarrow \alpha$.
6	$\alpha \neq l$	Перейти к выполнению пункта 2.
7		Работа блока окончена.

номера l_γ на одну позицию вправо и приписывая к j_0 заданный номер λ. После работы блока 9 выходящая из вершины j_s цепочка вершин и дуг будет иметь вид:

$$j_s, j_s; j_{s-1}, l_{s-1}; \dots; j_2, l_2; j_1, l_1; j_0, \lambda .$$

Блок 10 является основным, так как в нем содержится описание алгорифма решения рассматриваемой нами задачи. Основная особенность излагаемого алгорифма заключается в том, что при переходе от одного допустимого вектора к другому заново перевычисляются не все величины y_j, а лишь те, значения которых меняются при изменении базиса. При этом в зависимости от значения ψ_λ, соответствующего исключаемому из базиса вектору, может реализоваться один из трех случаев:

а) $\psi_\lambda = 3$. Это свидетельствует о том, что при исключении из базиса вектора, стоявшего в строке λ, и замене его новым вектором образуется цикл. В этом случае необходимо вновь образовавшийся цикл оформить, т. е. выполнить блок 9 при $l=\lambda$. После этого надлежит обратиться последовательно к блокам 2, 3, 1, в которых будут вычислены необходимые y_j;

б) $\psi_\lambda = 1$. Это свидетельствует о том, что значение $y_{q(i_0)}$ при переходе к новому базису остается неизменным, а значение $y_{p(i_0)}$ меняется. В соответствии с этим для нового базиса необходимо перевычислить те строки списка 3, для которых выходящие из них цепочки проходят через вершину $p^{(i_0)}$. Прежде всего заново вычисляется

$$y_{p(i_0)} = \frac{c^{(i_0)} - b^{(i_0)} y_{q(i_0)}}{a^{(i_0)}}$$

и в списках 2 и 3 задаются величины $\eta_{p(i_0)} = 1$, $l_{p(i_0)} = \lambda$, $\varphi_\lambda = 1$, после чего следует перейти к выполнению блока 1;

в) $\psi_\lambda = 2$. Этот случай сводится к случаю б), если поменять ролями вершины $p^{(i_0)}$ и $q^{(i_0)}$.

При описании алгорифма не затронут вопрос о получении начального допустимого вектора, т. е. первоначального заполнения списка 2. Предполагается, что перед обращением к блоку 10

Блок 10

1		$0 \Rightarrow i_0$, $0 \Rightarrow M$, $0 \Rightarrow \varkappa$.
2		Выполнить блок 1.
3		Выполнить блок 4.
4		Выполнить блок 8.
5	$\pi^{(i_0)} = 0$	$d^{(i_0)} \Rightarrow \varepsilon$, $0 \Rightarrow x_0$.
6	$\pi^{(i_0)} = 1$	$-d^{(i_0)} \Rightarrow \varepsilon$, $d^{(i_0)} \Rightarrow x_0$.
7		Выполнить последовательно блоки 5 и 6.
8	$\lambda = 0$	Перейти к выполнению пункта 3.
9		$1 \Rightarrow t$.
10		$0 \Rightarrow \varphi_t$, $0 \Rightarrow \eta_t$.
11	$t < m$	$t+1 \Rightarrow t$, перейти к выполнению пункта 10.
12		$1 \Rightarrow \varphi_\lambda$.
13	$\psi_\lambda = 3$	$\lambda \Rightarrow l$, выполнить блок 9, $p^{(i_0)} \Rightarrow j_0$, выполнить последовательно блоки 2 и 3, перейти к выполнению пункта 2.
14	$p^{(i_0)} = 0$	$\dfrac{c^{(i_0)}}{b^{(i_0)}} \Rightarrow y_{q^{(i_0)}}$, $1 \Rightarrow \eta_{q^{(i_0)}}$, перейти к выполнению пункта 2.
15	$g^{(i_0)} = 0$	$\dfrac{c^{(i_0)}}{a^{(i_0)}} \Rightarrow y_{p^{(i_0)}}$, $1 \Rightarrow \eta_{p^{(i_0)}}$, перейти к выполнению пункта 2.
16	$\psi_\lambda = 1$	$\dfrac{c^{(i_0)} - b^{(i_0)} y_{q^{(i_0)}}}{a^{(i_0)}} \Rightarrow y_{p^{(i_0)}}$, $1 \Rightarrow \eta_{p^{(i_0)}}$.
17	$\psi_\lambda = 2$	$\dfrac{c^{(i_0)} - a^{(i_0)} y_{p^{(i_0)}}}{b^{(i_0)}} \Rightarrow y_{p^{(i_0)}}$, $1 \Rightarrow \eta_{q^{(i_0)}}$.
18		Перейти к выполнению пункта 2.

список 2 заполнен. Кроме того, в соответствии с начальным заполнением списка 2 должен быть частично заполнен список 3. В строках, отвечающих вершинам циклов, необходимо записать значения y_j и l_j, снабженные признаками $\eta_j = 1$ и $\zeta_j = 1$, а также отметить дуги циклов в списке 2, положив для них $\varphi_\kappa = 1$. Признаком $\varphi_\kappa = 1$ следует, кроме того, отметить строки, соответствующие стрелкам графа, и вычислить значения y_j в вершинах, примыкающих к этим стрелкам, положив для них $\eta_j = 1$. Все остальные значения η_j и φ_κ необходимо задать равными нулю.

Не рассматривая, как это может быть выполнено в общем случае, приведем лишь алгорифм (блок 11), осуществляющий первоначальное заполнение списка 3 при условии, что первоначальное заполнение списка 2 не содержит циклов.

Блок 11

1		$1 \Rightarrow t$, $1 \Rightarrow \kappa$.
2		$0 \Rightarrow \varphi_t$, $0 \Rightarrow \eta_t$.
3	$t < m$	$t+1 \Rightarrow t$, перейти к выполнению пункта 2.
4	$p_\kappa = 0$	$\frac{c_\kappa}{b_\kappa} \Rightarrow y_{q_\kappa}$, $1 \Rightarrow \eta_{q_\kappa}$, $1 \Rightarrow \varphi_\kappa$.
5	$q_\kappa = 0$	$\frac{c_\kappa}{a_\kappa} \Rightarrow y_{p_\kappa}$, $1 \Rightarrow \eta_{p_\kappa}$, $1 \Rightarrow \varphi_\kappa$.
6	$\kappa < m$	$\kappa+1 \Rightarrow \kappa$, перейти к выполнению пункта 4.
7		Работа блока окончена.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. К. Гавурин, Г. Ш. Рубинштейн, С. С. Сурин. Об оптимальном использовании средств при выполнении нескольких видов работ (обобщенная транспортная задача). - Сиб. матем. журн., т. III, № 4, 1962.
2. У. Х. Малков. Алгоритм решения распределительной задачи. - Журнал вычисл. математики и матем. физики, т. II, № 2, 1962.
3. Л. В. Канторович. Экономический расчет наилучшего использования ресурсов. М., Изд. АН СССР, 1959.