УДК 513.88:513.83

К ТЕОРИИ СТРУКТУРНОЙ ДВОЙСТВЕННОСТИ ФУНКЦИЙ И МНОЖЕСТВ

С.С.Кутателадзе, А.М.Рубинов

В в е д е н и е . В последние десятилетия в основном в связи с тематикой оптимального программирования возрос интерес к теории выпуклых множеств, выпуклых функций, выпуклых экстремальных задач и т.п. Можно сказать, что в настоящее время в рамках функционального анализа складывается новый раздел – выпуклый анализ *) – дисциплина, включающая в себя специфические направления и методы исследования задач, так или иначе связанных с выпуклостью.

Одним из основных приемов выпуклого анализа является построение объекта, в некотором смысле двойственного к данному, и последующее их совместное изучение. При этом техника исследования состоит в комбинировании методов теории двойственности векторных пространств (существенную роль в которой играют различные теоремы отделимости [10]) и методов теории полуупорядоченных пространств Л.В.Канторовича [20].

В настоящей работе делается попытка выделить "структурную" часть классических схем двойственности, связанных, прежде всего, с именами Минковского и Фенхеля. При этом выясняется, что многие известные результаты в теории сопряженных выпуклых функций и множеств носят, по существу, структурный характер. В связи с этим в работе выделяются H -выпуклые функции, т.е. функции, являющиеся верхними огибающими некоторых семейств функций

---

*) См. монографию R.T.Rockafellar, Convex analysis, Prinston Univ. Press, New Jersy, 1970.

из заданного класса H (отметим, что подобного рода обобщения выпуклости рассматривались и ранее). Такие функции представляются интересными не только потому, что на случай H-выпуклости переносятся известные конструкции, а, главным образом, в связи с тем, что для H-выпуклых функций и множеств возникает ряд задач, показавшихся нам нетривиальными и интересными.

Последнее обстоятельство объясняет способ изложения, по ходу которого намечая канву рассуждений, обобщающих известные построения, приводится достаточное количество примеров, иллюстрирующих вопросы, возникающие при изучении H-выпуклости. Ряд "переносимых" конструкций не излагается.

Работа состоит из трех параграфов и сжатого исторического и литературного комментария. Первый параграф посвящен схеме Минковского-Фенхеля для H-выпуклых функций. Второй – теории Фенхеля-Моро-Рокафеллера двойственных H-выпуклых функций. Наконец, в третьем параграфе поляры некоторых классов H-выпуклых функций и множеств характеризуются в терминах порядков типа Решетняка-Люмиса.

§ I. H-выпуклые функции и множества (схема Минковского – Фенхеля)

I°. Одним из основных результатов выпуклого анализа является теорема Минковского-Фенхеля. Мы покажем, что эта теорема может быть сформулирована и доказана на языке полулинейных пространств, являющихся полуструктурами (K – полулинеалов). Введем сначала следующие определения. Упорядоченное множество S называется полуструктурой, если любые два его элемента x и y имеют верхнюю грань $x \vee y$. Полуструктура S называется полной (соответственно, условно полной), если каждое (соответственно, каждое ограниченное) множество имеет верхнюю грань.

Пусть H – подмножество полуструктуры S. Будем говорить, что элемент $p \in S$ является H-выпуклым, если найдется множество U из H такое, что $p = \sup U$. Совокупность всех H-выпуклых элементов S обозначим через $P(H,S)$ или, если это не вызовет недоразумений, через $P(H)$.

Для $p \in P(H)$ положим

$$U_p = \{h \in H : h \leq p\}.$$

Если $\mathcal{U}$ -подмножество H такое, что $p = \sup \mathcal{U}$, то $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}_p$. Из сказанного следует, в частности, что $p = \sup \mathcal{U}_p$.

Подмножество $\mathcal{U}$ множества H назовем H-выпуклым, если существует $\sup \mathcal{U} = p$, причем $\mathcal{U} = \mathcal{U}_p$. Совокупность всех H-выпуклых множеств обозначим через $\mathcal{K}(H,S)$ (или через $\mathcal{K}(H)$). Упорядочим $\mathcal{K}(H)$ по включению. В множестве $P(H)$ введем отношение порядка, индуцируемое из S. Ясно, что отображение $\varphi : P(H) \to \mathcal{K}(H)$, определенное формулой

$$\varphi : p \mapsto \mathcal{U}_p , \tag{1.1}$$

является изоморфизмом упорядоченных множеств $P(H)$ и $\mathcal{K}(H)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1 Упорядоченное множество $\mathcal{K}(H)$ (и, стало быть, $P(H)$) является полуструктурой; если S – полная (условно полная) полуструктура, то полуструктура $\mathcal{K}(H)$ полна (условно полна).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p_1, p_2 \in P(H)$. Тогда $p_1 \vee p_2 = \sup \mathcal{U}_{p_1} \vee \sup \mathcal{U}_{p_2} = \sup(\mathcal{U}_{p_1} \cup \mathcal{U}_{p_2})$, откуда следует, что $p_1 \vee p_2 \in P(H)$. Таким же образом из полноты (условной полноты) S следует полнота (условная полнота) $\mathcal{K}(H)$.

Пусть $\mathcal{U} \subset H$ и существует $\sup \mathcal{U} = p_{\mathcal{U}}$. Рассмотрим множество $\mathcal{U}_{p_{\mathcal{U}}}$. Если $V \in \mathcal{K}(H)$ и $V \supset \mathcal{U}$, то $\sup V = p_V \geq p_{\mathcal{U}}$, откуда следует, что $\mathcal{U}_{p_V} = V \supset \mathcal{U}_{p_{\mathcal{U}}}$. Таким образом, $\mathcal{U}_{p_{\mathcal{U}}}$ является наименьшим среди всех элементов множества $\mathcal{K}(H)$, содержащих $\mathcal{U}$. Множество $\mathcal{U}_{p_{\mathcal{U}}} = \{h \in H \cdot h \leq \sup \mathcal{U}\}$ будем называть H-выпуклой оболочкой $\mathcal{U}$ и обозначать символом $co_H(\mathcal{U})$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Операция перехода к H-выпуклой оболочке, по существу, является операцией замыкания в смысле Мура (см. [4], гл. IV), определенной, однако, не на всех подмножествах H.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Пусть $(\mathcal{U}_\alpha)_{\alpha \in A}$ – семейство элементов $\mathcal{K}(H)$. Тогда $\sup\limits_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha$ (если этот элемент существует) совпадает с $co_H(\bigcup\limits_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $p_\alpha = \sup \mathcal{U}_\alpha$ $(\alpha \in A)$; $p = \sup\limits_{\alpha \in A} p_\alpha$.

Тогда, как нетрудно проверить, $p = \sup(\bigcup\limits_{\alpha \in A} \mathcal{U}_\alpha)$, откуда следует, что множество $\bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ имеет H-выпуклую оболочку. Ясно, что эта оболочка совпадает с $\sup_{\alpha\in A} U_\alpha$. Предложение доказано.

2^0. Множество S назовем полулинейным пространством, если в нем введена бинарная операция $+$, относительно которой S является коммутативной полугруппой и операция умножения на неотрицательное число, причем

1) существует элемент 0 такой, что $0\cdot s=0$ для любого $s\in S$;

2) $1\cdot s=s$ $\quad (s\in S)$;

3) $\lambda s+\mu s=(\lambda+\mu)s$ $\quad (\lambda,\mu\in R_+;\ s\in S)$; *)

4) $\lambda(s_1+s_2)=\lambda s_1+\lambda s_2$ $\quad (\lambda\in R_+;\ s_1,s_2\in S)$;

5) $(\lambda\mu)s=\lambda(\mu s)$ $\quad (\lambda,\mu\in R_+;\ s\in S)$.

В полулинейном пространстве естественным образом вводится понятие выпуклого множества. Простейшим примером полулинейного пространства может служить выпуклый конус K в векторном пространстве. (Заметим, что K – полулинейное пространство с сокращением: из равенства $x+z=y+z$ следует, что $x=y$).

Полулинейное пространство S, в котором введено отношение порядка $>$, назовем K-полулинеалом, если

1) S является полуструктурой,

2) неравенство $x>y$ влечет $x+z>y+z$ при всех $z\in S$,

3) из соотношения $x>y$ следует, что $\lambda x>\lambda y$ $(\lambda\in R_+)$.

В дальнейшем считаем, что полуструктура S, о которой шла речь в 1^0, является K-полулинеалом. Установим связь между алгебраическими свойствами H и $\mathscr{H}(H)$ $(P(H))$.

Предположим, что H выпукло, и покажем, что в этом случае и $P(H)$ выпукло. Пусть $p_i\in P(H)$, $U_i=U_{p_i}$ ($i=1,2$). Заметим, что $\alpha U_1+\beta U_2\subset H$ $(\alpha,\beta\geqslant 0;\ \alpha+\beta=1)$. Ясно, что $\alpha p_1+\beta p_2$ мажорирует любой элемент w множества $\alpha U_1+\beta U_2$. С другой стороны, если $p'\geqslant \alpha u_1+\beta u_2$ $(u_1\in U_1;\ u_2\in U_2)$, то $p'\geqslant\alpha\sup U_1+\beta\sup U_2=\alpha p_1+\beta p_2$. Таким образом, множество $\alpha U_1+\beta U_2$ имеет верхнюю грань, и $\sup(\alpha U_1+\beta U_2)=\alpha p_1+\beta p_2$. Из сказанного и следует выпуклость $P(H)$.

Заметим, что в рассматриваемой ситуации (H -выпуклое в обычном смысле множество) элементы структуры $\mathscr{H}(H)$ являются выпуклыми множествами. Пусть $U_1,U_2\in\mathscr{H}(H)$; $\alpha,\beta\geqslant 0,\ \alpha+\beta=1$. Приведенные выше рассуждения показывают, что множество $\alpha U_1+\beta U_2$

---

*) Символом R_+ обозначается множество неотрицательных чисел.

имеет супремум, и потому имеет смысл говорить о его H-выпуклой оболочке. Множество $co_H(\alpha U_1+\beta U_2)$ назовем выпуклой комбинацией множеств U_1 и U_2 (с коэффициентами α, β). Ясно, что биективное отображение $\varphi: P(H)\to \mathcal{K}(H)$, определенное формулой (I.I), переводит выпуклую комбинацию H-выпуклых элементов в выпуклую комбинацию соответствующих H-выпуклых множеств. Из сказанного легко следует, что отображение $\gamma: \mathcal{K}(H)\times\mathcal{K}(H)\times[0,1]\to\mathcal{K}(H)$, определенное формулой

$$\gamma:(U_1,U_2,\alpha)\mapsto co_H(\alpha U_1+(1-\alpha)U_2),$$

вводит на $\mathcal{K}(H)$ "выпуклую структуру" (т.е. $\mathcal{K}(H)$ можно погрузить в полулинейное пространство T так, что выпуклые комбинации $co_H(\alpha U_1+(1-\alpha)U_2)$ множеств U_1 и U_2 будут совпадать с выпуклыми комбинациями этих множеств в смысле T).

Предположим теперь, что H – полулинейное пространство. Тогда, как нетрудно проверить, $P(H)$ является K-полулинеалом (относительно алгебраических операций и порядка индуцированных из S). Введем в $\mathcal{K}(H)$ естественным образом операцию умножения на неотрицательное число и бинарную операцию $\oplus$, определенную соотношением

$$U_1\oplus U_2=co_H(U_1+U_2) \qquad (U_1,U_2\in\mathcal{K}(H)).$$

Легко проверить, рассуждая так же, как и выше, что относительно введенных операций и отношения порядка по включению $\mathcal{K}(H)$ является K-полулинеалом. Кроме того, имеет место

ТЕОРЕМА I.I. *Если H – полулинейное пространство, то отображение φ, определенное формулой (I.I), есть изоморфизм K-полулинеалов $P(H)$ и $\mathcal{K}(H)$.*

Эта теорема показывает, что отображение φ аналогично соответствию между выпуклыми множествами и сублинейными функциями, устанавливаемому в классической схеме Минковского-Фенхеля [33], [6], [54]. Отметим, что известные работы по схеме Минковского-Фенхеля (в случае локально выпуклых пространств) в содержательной части состоят в формулировании условий на H-выпуклые множества в терминах самого H (но не S). При этом, как правило, в качестве S принимают некоторое полулинейное (чаще векторное) пространство, состоящее из функций, заданных на некотором выпуклом множестве X, а в качестве H -полулинейное пространство, состоящее из линейных или аффинных функций. Требуемые условия в этой ситуации получаются с помощью тех или иных теорем отделимости. В связи с этим следующий пункт посвящен связи между H -выпуклостью и отделимостью.

3°. Рассмотрим множество X и совокупность S, состоящую из некоторых функций, определенных на X и принимающих значения из расширенной числовой прямой. Будем считать, что S является условно полной полуструктурой относительно естественного отношения порядка (если $s_1, s_2 \in S$, то $s_1 \geq s_2$ тогда и только тогда, когда $s_1(x) \geq s_2(x)$ для всех $x \in X$), причем супремум любого ограниченного в S множества совпадает с поточечным супремумом. Справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.3. *Пусть $H \subset S$. Множество $U \subset H$ является H-выпуклым тогда и только тогда, когда оно ограничено сверху в S и для любого $h' \in H$, $h' \notin U$ найдется элемент $x \in X$ такой, что*

$$h'(x) > \sup_{h \in U} h(x). \tag{I.2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) Пусть U-H выпукло. Тогда $U = \{h \in H : h \leq p_U\}$, где $p_U = \sup U$. По предположению $p_U(x) = \sup_{h \in U} h(x)$ $(x \in X)$. Так как $p_U \in S$, то U ограничено сверху. Кроме того, если $h' \in H$, $h' \notin U$, то найдется точка $x \in X$ такая, что

$$h'(x) > p_U(x) = \sup_{h \in U} h(x),$$

т.е. (I.2) выполнено.

2) Пусть U ограничено сверху и для каждого $h' \in H$, $h' \notin U$ найдется $x \in X$, для которого выполнено (I.2). Тогда существует $p = \sup U$, и если $h' \leq p$, то $h' \in U$. Последнее означает, что $co_H(U) = \{h' \in H : h' \leq p\} \subset U$. Обратное включение очевидно. Предложение доказано.

В дальнейшем, в случае, когда S является множеством функций, H -выпуклые элементы S будем называть H-выпуклыми функциями.

4°. Приведем теперь несколько примеров. Предварительно введем некоторые обозначения. Если X — некоторое множество, то совокупность всех функций, определенных на X и принимающих значения из $(-\infty, \infty)$, обозначим через F_X, принимающих значения из $(-\infty, \infty]$ — через $\bar{F}_X$, принимающих значения из $[-\infty, \infty)$ через $\underline{F}_X$. Совокупность всех ограниченных на X функций обозначим через M_X; если X — топологическое пространство, то через $C(X)$ обозначим множество всех непрерывных на X функций.

Относительно естественным образом введенных отношения порядка, сложения и умножения на вещественное число F_X и M_X являются K-пространствами, $C(X)$ является, вообще говоря, K-линеалом. В $\bar{F}_X$ и $\underline{F}_X$ имеет смысл рассматривать лишь умножение на неотрицательное число (считаем $-\infty \cdot 0 = \infty \cdot 0 = 0$). При этом $\bar{F}_X$ и $\underline{F}_X$ являются K-полулинеалами (и одновременно условно полными структурами; кроме того, $\bar{F}_X$ — полная полуструктура).

ПРИМЕР I.I. Пусть X — локально выпуклое пространство (л.в.п.). Через H обозначим совокупность всех аффинных функционалов, определенных на X ($h \in H$, если $h: x \mapsto f(x) + c$, где f принадлежит X' (пространству, сопряженному к X), $c \in R$. Отображение $H \to X' \times R$, определенное по формуле $h \mapsto (f, c)$, где $h(x) = f(x) + c$, является линейным изоморфизмом H и $X' \times R$ и позволяет отождествить эти пространства).

Нетрудно проверить, что $P(H, \bar{F}_X)$ состоит из всех выпуклых замкнутых (т.е. полунепрерывных снизу в $\sigma(X, X')$) функций со значениями из $(-\infty, \infty]$; используя предложение I.3 и теорему отделимости, легко показать, что множество U входит в $\mathcal{K}(H, \bar{F}_X)$ тогда и только тогда, когда оно выпукло, замкнуто в $\sigma(X' \times R, X \times R)$ и с каждой своей точкой (f, c) содержит луч $\{(f,c) + (0, c')\}_{c' \leq 0}$.

Если $U_1, U_2 \in \mathcal{K}(H, F_X)$, то, как легко видеть, $U_1 \oplus U_2 = \overline{U_1 + U_2}$ (здесь черта означает слабое замыкание). Ясно, что $P(H, F_X)$ (соответственно $P(H, M_X)$, $P(H, C(X))$) состоит из всех выпуклых замкнутых конечнозначных (соответственно, ограниченных, непрерывных) функций.

ПРИМЕР I.2. Пусть Z — некоторое, вообще говоря, невыпуклое подмножество л.в.п. X, H_Z — совокупность следов на Z аффинных на X функционалов. Элементы множества $P(H_Z, F_Z)$ естественно называть выпуклыми (замкнутыми) на z функциями. В самом деле, каждая H_Z - выпуклая функция допускает распространение до выпуклой замкнутой функции, определенной на замкнутой выпуклой оболочке Z.

ПРИМЕР I.3. Рассмотрим один частный случай предыдущего примера. Пусть Z - множество натуральных чисел. В этом случае H_Z состоит из всех арифметических прогрессий, $P(H_Z, F_Z)$ - из всех выпуклых последовательностей (напомним, что числовая последовательность (x_n) называется выпуклой, если $x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2} \geq 0$ при всех n).

ПРИМЕР I.4. Пусть, как и выше, X - л.в.п. Положим $H = X'$. В этом случае $P(H, F_X)$ состоит из всех сублинейных функционалов, определенных на X и со значениями в $(-\infty, \infty]$. $\mathscr{K}(H, F_X)$ состоит из всех выпуклых замкнутых в $\sigma(X', X)$ подмножеств (этот результат принадлежит Л.Хермандеру [59] и легко следует из предложения I.3 и теорем отделимости). При этом

$$U_1 \oplus U_2 = \overline{U_1 + U_2} \qquad (U_1, U_2 \in \mathscr{K}(H, F_X)).$$

Пусть теперь X^* - сильное сопряженное к X. Рассмотрим элементы X как функционалы над X^* и положим $S = C(X^*)$, $H = X$. В этом случае $P(H, C(X^*))$ совпадает с совокупностью всех непрерывных сублинейных функционалов на X^*, $\mathscr{K}(H, C(X^*))$ совпадает с совокупностью всех выпуклых ограниченных замкнутых подмножеств X (последнее утверждение также принадлежит Л.Хермандеру [59]). Заметим, что собственно теорема Минковского-Фенхеля совпадает с теоремой I.I, примененной в рассматриваемой сейчас ситуации (при дополнительном предположении, что $X = R^n$).

ПРИМЕР I.5. Пусть K - замкнутый выпуклый воспроизводящий конус в л.в.п. X. Обозначим через H_K сопряженный к K конус K' (точнее говоря, совокупность следов функционалов из K' на K). Элементы множества $P(H_K, F_K)$ названы в [48] вполне положительными сублинейными функционалами. В той же работе [48] показано, что K-полулинеал $\mathscr{K}(H_K, F_K)$ состоит из всех выпуклых ограниченных в $\sigma(X', X)$ нормальных подмножество конуса K' (Ω называется нормальным в смысле K', если $\Omega = \overline{\Omega - K'} \cap K'$). Заметим, что в рассматриваемой ситуации H_K -выпуклая оболочка $co_{H_K}(\Omega)$ выпуклого множества Ω совпадает с нормальной оболочкой $n\Omega$ этого множества (по определению $n\Omega = \overline{\Omega - K'} \cap K' (\Omega \subset K')$).

ПРИМЕР I.6. Этот пример является обобщением предыдущего. Пусть K и L – два замкнутых выпуклых конуса в л.в.п. X, причем $K \supset L$ и L -воспроизводящий. Через $H_{K,L}$ обозначим совокупность следов функционалов из K' на L. Можно показать, используя предложение I.3 и рассуждая так же, как в [48], что $U \in \mathscr{W}(H_{K,L}, F_L)$ тогда и только тогда, когда U выпукло, ограничено в $\sigma(X', X)$ и $U = \overline{(U - L')} \cap K'$.

ПРИМЕР I.7. Рассмотрим снова замкнутый выпуклый конус K в л.в.п. X и конус H_{-K} -совокупность следов функционалов из $-K'$ на K. Множество $P(H_{-K}, F_K)$ состоит из всех сублинейных функционалов, определенных на K и принимающих там неположительные значения. Множество U входит в $\mathscr{W}(H_{-K}, F_K)$ тогда и только тогда, когда оно выпукло, слабо замкнуто и $(-K')$ -устойчиво (т.е. $U - K' = U$) (см. [48]).

ПРИМЕР I.8. Рассмотрим теперь отрезок $[a, b]$, и пусть точки x_i $(i = 0, 1, \ldots, n+1)$ таковы, что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} = b$. Через H_c обозначим совокупность непрерывных функций, линейных на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ (ломаных). Ясно, что $P(H_c, C([a, b]))$ представляет из себя совокупность непрерывных "кусочно-выпуклых" функций (если $p \in P(H_c)$, то сужение p на каждый сегмент $[x_i, x_{i+1}]$ выпукло).

ПРИМЕР I.9. Пусть $X = (-\infty, \infty)$. Рассмотрим подмножество H в K-полулинеале $\underline{F}_X$, состоящее из функций $h_{x_0, c}$, где

$$h_{x_0,c}(x) = \left\{ \begin{array}{c|c} -\infty & x < x_0 \\ & \\ c & x \geqslant x_0 \end{array} \right\},$$

и постоянных. Нетрудно проверить, что $P(H, \underline{F}_X)$ состоит из всех неубывающих на $(-\infty, \infty)$ функций (принимающих, возможно, значение $-\infty$).

ПРИМЕР I.10. Λ – множество натуральных чисел. Нетрудно проверить, что в данном случае $P(\ell, s) = s$, $P(\ell, \infty) = m$,

$D(l_1, c_0) = c_0$, где l_1 – пространство абсолютно суммируемых рядов, m – пространство ограниченных последовательностей, c_0 – пространство всех последовательностей, стремящихся к нулю.

Дальнейшие примеры H -выпуклых функций приводятся в 5^0 §2. Там же изучаются свойства некоторых конкретных классов H -выпуклых функций.

5^0. В этом пункте установим связь введенного выше определения H -выпуклости с "классическим" определением Φ -выпуклости ([3]; [17], [51]). Напомним последнюю конструкцию. Пусть на множестве X задано семейство Φ вещественных на X функций. Тогда множество $A \subset X$ называется Φ -выпуклым, если для каждого $x \in X \setminus A$ существует такая функция $\varphi \in \Phi$, что $\varphi(x) > \sup_{y \in A} \varphi(y)$.

Будем считать множество X вложенным в K -полулинеал следующим способом: каждая точка $x \in X$ отождествляется с (δ) -функцией $\tilde{x} : \varphi \mapsto \varphi(x)$ $(\varphi \in \Phi)$ (предполагается, что семейство Φ разделяет точки из X). Совокупность всех функций вида $\tilde{x}$, где $x \in X$, обозначим через $\tilde{X}_\Phi$. Более того, знаком $\sim$ будем обозначать и сам оператор вложения X в F_Φ.

Тогда, ввиду предложения I.3, получается следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.4. Множество A из X является Φ-выпуклым в том и только том случае, когда множество $\tilde{A}$ из F_Φ является $\tilde{X}_\Phi$ -выпуклым.

Отметим, что подобного рода выпуклости систематически используются, например, в теории функций многих комплексных переменных. Фан [51] доказал для компактных Φ -выпуклых множеств аналог теоремы Крейна-Мильмана.

6^0. Пусть S – K -полулинеал с сокращением (если $s_1 + s_3 = s_2 + s_3$, то $s_1 = s_2$, $s_1, s_2, s_3 \in S$), $H \subset S$, H -полулинейное пространство. В этом случае $D(H)$ есть также K-полулинеал с сокращением и, поскольку в силу теоремы I.I $D(H)$ и $\mathcal{H}(H)$ изоморфны, $\mathcal{H}(H)$ является K -полулинеалом с сокращением. Это обстоятельство позволяет, используя обычную конструкцию, которая применяется для погружения полугруппы с сокращением в группу (см., например [56]), построить векторное пространство, в котором $\mathcal{H}(H)$ является (с точностью до изоморфизма) выпуклым воспроизводящим конусом.

Сначала рассмотрим векторное пространство $[\widetilde{\mathcal{H}(H)}]$, состощее из всех упорядоченных пар (U,V) $(U,V\in\mathscr{K}(H))$, в котором алгебраические операции введены следующим образом:

$$(U,V)+(U',V')=(U\bullet U',V\bullet V'),$$

$$\lambda(U,V)=\begin{cases}(\lambda U,\lambda V) & \text{если } \lambda\geq 0\\ (-\lambda U,-\lambda V) & \text{если } \lambda<0\end{cases}$$

Введем также в $[\widetilde{\mathscr{K}(H)}]$ отношение предпорядка $\geqslant$ и эквивалентности $\approx$, полагая

$$(U,V)\geqslant(U',V'),\ \text{если}\quad U+V'\supset V+U';$$
$$(U,V)\approx(U',V'),\ \text{если}\quad U+V'=V+U'. \tag{I.3}$$

Через $[\mathscr{K}(H)]$ обозначим фактор-пространство пространства $[\widetilde{\mathscr{K}(H)}]$ по отношению эквивалентности $\approx$. С помощью (I.3) в $[\mathscr{K}(H)]$ естественным образом вводится отношение порядка. Символом $\overline{(U,V)}$ обозначим элемент пространства $[\mathscr{K}(H)]$, содержащий пару (U,V). Совокупность всех элементов вида $\overline{(U,0)}$ обозначим через $[\mathscr{K}(H)]$. Ясно, что отображение $U\longmapsto\overline{(U,0)}$ является изоморфизмом между $\mathscr{K}(H)$ и $[\mathscr{K}(H)]^{\circ}$. При этом $[\mathscr{K}(H)]^{\circ}$ - выпуклый воспроизводящий конус в пространстве $[\mathscr{K}(H)]$.

С помощью той же конструкции можно построить пространство $[P(H)]$, в котором $P(H)$ является (с точностью до изоморфизма) выпуклым воспроизводящим конусом. Из теоремы I.I следует, что отображение $\tilde{\varphi}:[P(H)]\to[\mathscr{K}(H)]$, определенное формулой

$$\tilde{\varphi}:\overline{(p_1,p_2)}\longmapsto\overline{(U_{p_1},U_{p_2})}, \tag{I.4}$$

является изоморфизмом векторных пространств $[P(H)]$ и $[\mathscr{K}(H)]$ (здесь $\overline{(p_1,p_2)}$ -элемент пространства $[P(H)]$, содержащий пару (p_1,p_2)).

Введем в $[\mathscr{K}(H)]$ (соответственно, $[P(H)]$) отношение порядка с помощью конуса $K_{\mathscr{K}}$ (соответственно, K_P), где

$$K_{\mathscr{K}}=\{\overline{(U_1,U_2)}\in[\mathscr{K}(H)]:\ U_1\supset U_2\},$$
$$K_P=\{\overline{(p_1,p_2)}\in[P(H)]:\ p_1\geqslant p_2\}.$$

(Заметим, что если $(\overline{U_1, U_2}) = (\overline{V_1, V_2})$ и $U_1 \supset U_2$, то $V_1 \supset V_2$; если $(\overline{p_1, p_2}) = (\overline{g_1, g_2})$ и $p_1 \geq p_2$, то $g_1 \geq g_2$).

Легко проверить, что отношение порядка, индуцируемое в $\mathscr{K}(H)$ (соответственно, $P(H)$) из $[\mathscr{K}(H)]$ (соответственно, $[P(H)]$), совпадает с имеющимся в $\mathscr{K}(H)$ (соответственно, $P(H)$) отношением порядка. Это позволяет показать, что $[\mathscr{K}(H)]$ и $[P(H)]$ являются K -линеалами. При этом используется то обстоятельство, что $\mathscr{K}(H)$ и $P(H)$ - K -полулинеалы и следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I.5. Пусть Y - векторное пространство, упорядоченное выпуклым конусом L, и L_1 - выпуклый воспроизводящий конус в Y такой, что любые два его элемента имеют верхнюю грань. Тогда Y является K - линеалом.

Доказательство этого простого предложения содержится в работах [38], [59].

Ясно, что отображение $\tilde{\varphi}$, определенное формулой (I.4), является изоморфизмом K -линеалов $[P(H)]$ и $[\mathscr{K}(H)]$.

ЗАМЕЧАНИЕ I.2. Описанное здесь построение пространства выпуклых множеств $[\mathscr{K}(H)]$ принадлежит, по существу, А.Г.Пинскеру [38]. (В [38] рассматривался случай, когда $\mathscr{K}(H)$ - K - полулинеал выпуклых замкнутых ограниченных подмножеств л.в.п.).

ЗАМЕЧАНИЕ I.3. Если S - векторное пространство, то $[P(H)]$ (и, следовательно, $[\mathscr{K}(H)]$) совпадает (с точностью до изоморфизма) с векторным подпространством S , натянутым на конус $P(H)$.

§ 2. Сопряженные функции (теория Фенхеля-Моро--Рокафеллера)

При изучении выпуклых функций важную роль играет теория сопряженных выпуклых функций, разработанная Фенхелем, Моро, Рокафеллером, Брондстедом и др. Ниже основные результаты этой теории обобщаются на случай H -выпуклых функций.

Рассмотрим множество X и подмножество H пространства F_X . Будем считать, что H разделяет точки X , т.е. для любых $x_1, x_2 \in X$ существует $h \in H$, для которого $h(x_1) \neq h(x_2)$.

Как уже отмечалось в 5° § I, элементы множества X можно рассматривать как функции на F_H. Точнее говоря, каждый элемент x из X порождает функцию $\hat{x} \in F_H$, определяемую формулой:

$$\hat{x}: h \mapsto h(x).$$

Так как H разделяет точки X, то $\hat{x}_1 \neq \hat{x}_2$, если $x_1 \neq x_2$. В дальнейшем будем обозначать $\hat{x}$ той же буквой, что и порождающий ее элемент. Условимся еще о следующем: если $L \subset \bar{F}_Y$, то символом $L \oplus \mathbf{1}$ будем обозначать алгебраическую сумму в F_Y прямой $(\lambda \mathbf{1})_{\lambda \in (-\infty,\infty)}$ и L (здесь $\mathbf{1}$ -функция, сопоставляющая каждому $y \in Y$ число I).

Пусть $f \in \bar{F}_X$, причем $f(x) < \infty$ хотя бы для одного $x \in X$. Функция f^*, определенная на H формулой

$$f^*: h \mapsto \sup_{x \in X} (h(x) - f(x)),$$

называется сопряженной (точнее, H -сопряженной) к f функцией или H -преобразованием Юнга функции f.

Непосредственно из определения вытекает, что $f^* \in \bar{F}_H$. Кроме того, для $h \in X$ и $x \in X$

$$f^*(h) + f(x) \geq h(x). \qquad (2.1)$$

Имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.I. Для любой $f \in \bar{F}_X$ $(f \not\equiv \infty)$ функция f^* является $X \oplus \mathbf{1}$ -выпуклой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$U = \{ y \in X \oplus \mathbf{1} : y = x - f(x)\mathbf{1},\ x \in \operatorname{dom} f \} \quad *)$$

Тогда для любого $h \in H$

$$f^*(h) = \sup_{x \in X} (h(x) - f(x)) = \sup_{x \in \operatorname{dom} f} (x(h) - f(x)) =$$

$$= \sup_{x \in \operatorname{dom} f} (x - f(x)\mathbf{1})(h) = \sup_{y \in U} y(h)$$

Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Если $f_1 \geq f_2$, $(f_1 \not\equiv \infty)$, то $f_1^* \leq f_2^*$.

Доказательство очевидно.

---

*) $\operatorname{dom} f = \{x \in X : f(x) < \infty\}$.

Если $f^* \neq \infty$, то имеет смысл говорить о сопряженной к f^* функции f^{**}. Из определения сопряженной функции следует, что

$$f^{**}(x) = \sup_{h \in H} (h(x) - f^*(h)) \qquad (x \in X).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. Если $f \in \tilde{F}_X$, $f \neq \infty$, $f^* \neq \infty$, то

$$f(x) \geq f^{**}(x).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (2.I)

$$f(x) \geq h(x) - f^*(h),$$

а потому

$$f(x) \geq \sup_{h \in H} (h(x) - f^*(h)) = f^{**}(x).$$

ТЕОРЕМА 2.I. (Фенхель-Моро.) Функция f из $\tilde{F}_X$ является $H \circ 1$-выпуклой тогда и только тогда, когда

$$f = f^{**}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f = f^{**}$, $f^* \neq \infty$, то в силу предложения 2.I f является $H \circ 1$-выпуклой. Предположим теперь, что f $H \circ 1$-выпукла. Тогда найдется подмножество U множества $H \circ 1$ такое, что

$$f(x) = \sup_{g \in U} g(x)$$

Пусть $g \in U$, $g = h + \alpha 1$. Тогда $f(x) \geq h(x) + \alpha$ при всех $x \in X$, и потому

$$f^*(h) = \sup_{x \in X} (h(x) - f(x)) \leq -\alpha,$$

откуда следует, что

$$f^{**}(x) \geq h(x) - f^*(h) \geq h(x) + \alpha = g(x).$$

Таким образом,

$$f^{**}(x) \geq \sup_{g \in U} g(x) = f(x),$$

т.е. $f^{**} \geq f$. Обратное неравенство вытекает из предложения 2.I. Теорема доказана.

В дальнейшем будем предполагать иногда, не оговаривая этого особо, что рассматриваемые нами функции f таковы, что $f \neq \infty$,

$f^* \not\equiv \infty$.

Для $f \in \tilde{F}_X$ положим $\tilde{U}_f = \{g \in H \circ \ell : g \leq f\}$. Если множество $\tilde{U}_f$ непусто, то его $H \circ \ell$ -выпуклую оболочку обозначим через U_f. Введем в рассмотрение функцию $co_H f : x \mapsto \sup_{g \in U_f} g(x)$. Ясно, что $co_H f$ - $H \circ \ell$ - выпуклая функция и $f = co_H f$ тогда и только тогда, когда f - $H \circ \ell$ -выпукла.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.4. Для любой функции $f \in \tilde{F}_X$ множество $\tilde{U}_f \neq \emptyset$. При этом

$$f^{**} = co_H f.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция f^{**} является, в силу предложения 2.1, $H \circ \ell$ -выпуклой. Из предложения 2.3 следует, что $f^{**} \leq f$ и потому $U_{f^{**}} \subset \tilde{U}_f$, т.е. $\tilde{U}_f$ непусто. Кроме того, из соотношения $U_{f^{**}} \subset \tilde{U}_f$ следует, что $f^{**} \leq co_H f$. С другой стороны, из неравенства $f \geq co_H f$ получим, применяя предложение 2.2 и теорему 2.I, что $f^{**} \geq co_H f$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Пусть $(f_r)_{r \in \Gamma}$ -семейство функций из $\tilde{F}_X$. Тогда если $\inf_{r \in \Gamma} f_r \in \tilde{F}_X$, то

$$\left(\inf_{r \in \Gamma} f_r\right)^* = \sup_{r \in \Gamma} f_r^*,$$

кроме того,

$$\left(\sup_{r \in \Gamma} f_r\right)^* \leq co_X \left(\inf_{r \in \Gamma} f_r^*\right).$$

(Напомним, что все функции, о которых идет речь, таковы, что сами они и их сопряженные не равны тождественно ∞).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h \in H$. Тогда

$$\left(\inf_r f_r\right)^*(h) = \sup_x \left(h(x) - \inf_r f_r(x)\right) =$$

$$= \sup_x \left(h(x) + \sup_r \left(-f_r(x)\right)\right) = \sup_x \sup_r \left(h(x) - f_r(x)\right) =$$

$$= \sup_r \sup_x \left(h(x) - f_r(x)\right) = \sup_r f_r^*,$$

откуда и следует первая часть утверждения. Для доказательства второй части заметим, что для $\gamma_0 \in \Gamma$

$$\sup_{\gamma} f_{\gamma} \geq f_{\gamma_0} ,$$

откуда (предложение 2.2)

$$f^*_{\gamma_0} \geq (\sup_{\gamma} f_{\gamma})^*,$$

т.е. $\inf_{\gamma} f^*_{\gamma} \geq (\sup_{\gamma} f_{\gamma})^*$. Используя предложения 2.1, 2.3, 2.4 и теорему 2.1, получим, что

$$co_X \inf f^*_{\gamma} \geq (\sup_{\gamma} f_{\gamma})^*.$$

Предложение доказано.

2^0. В "классической" теории сопряженных выпуклых функций важную роль играет понятие конволюции (свертки) двух функций. Эта роль объясняется, в частности, тем, что именно с помощью конволюции удается описать сопряженную к сумме двух функций. Заметим, что конволюция двух функций имеет простой геометрический смысл: она совпадает с функцией, график которой порожден суммой надграфиков исходных функций.

Перейдем к определению конволюции в рассматриваемой нами ситуации. Будем считать, что H — полулинейное подпространство пространства F_X (иными словами, H - выпуклый конус в F_X). Рассмотрим X как подмножество пространства F_H и через $K(X)$ обозначим выпуклую коническую оболочку X в F_H. Каждый $h \in H$ порождает функцию $\tilde{h}$, определенную на $K(H)$ по формуле:

$$\tilde{h} : z \longmapsto z(h).$$

Ясно, что $\tilde{h}$ является распространением на $K(X)$ функции h, определенной на X; поэтому в дальнейшем функцию $\tilde{h}$ мы будем обозначать тем же символом h, что и порождающий ее элемент. Заметим еще, что, как следует непосредственно из определения, функция h аддитивна и положительно однородна на $K(X)$; в свою очередь, z $(z \in K(X))$ является аддитивной и положительно однородной функцией на X.

Пусть $f \in \bar{F}_X$, $f \not\equiv \infty$. Введем в рассмотрение функцию $\bar{f} \in \bar{F}_{K(X)}$, положив для $z \in K(X)$

$$\bar{f}(z) = \left\{ \begin{array}{c|c} f(z) & z \in X \\ \infty & z \notin X \end{array} \right\}.$$

Нетрудно проверить, что H - сопряженная к $\bar{f}$ функция f^* совпадает с H - сопряженной к f функцией f^*.

Конволюцией функций f_1 и f_2 на $\tilde{F}_X$ назовем функцию $f_1 \oplus f_2$, определенную на X по формуле

$$f_1 \oplus f_2 : x \longmapsto \inf_{\substack{x_1+x_2=x \\ x_1, x_2 \in K(X)}} \left(\bar{f}_1(x_1) + \bar{f}_2(x_2)\right).$$

Естественным образом определяется конволюция $f_1 \oplus f_2 \oplus \ldots \oplus f_n = \bigoplus_{i=1}^{n} f_i$ конечного числа функций.

Имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Пусть $f_i \in \tilde{F}_X$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Тогда

$$\left(\bigoplus_{i=1}^{n} f_i\right)^* = \sum_{i=1}^{n} f_i^* \ ; \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)^* \le co_H\left(\bigoplus_{i=1}^{n} f_i^*\right)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\left(\bigoplus_{i=1}^{n} f_i\right)^*(h) =$

$$= \sup_{x \in X}\left(h(x) - \bigoplus_{i=1}^{n} f_i(x)\right) = \sup\left(h(x) - \inf_{\substack{\sum_{i=1}^{n} x_i = x \\ x_i \in K(X)}} \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)\right) =$$

$$= \sup_{x \in X} \sup_{\substack{\sum_{i=1}^{n} x_i = x \\ x_i \in K(X)}} \sum_{i=1}^{n}\left(h(x_i) - \bar{f}_i(x_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \bar{f}_i^*(h) = \sum_{i=1}^{n} f_i^*(h)$$

$$2) \ \left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)^* \le \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{f}_i^{**}\right)^* = \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \bar{f}_i^*\right)^{**} = co_H\left(\bigoplus_{i=1}^{n} f_i^*\right).$$

Предложение доказано.

3^0. Применим аппарат сопряженных функций для исследования H-выпуклых множеств. Пусть X - некоторое множество, H - подмножество K-полулинеала $\tilde{F}_X$. Мы будем рассматривать H-выпуклые множества в $\tilde{F}_X$ (т.е. элементы $\mathcal{H}(H, \tilde{F}_X)$).

Пусть $U \subset H$. Для $h \in H$ положим

$$\delta_U(h) = \begin{cases} 0 & h \in U \\ \infty & h \notin U \end{cases}$$

(δ_U называется индикаторной функцией множества U). Для $x \in X$ имеем

$$\delta_U^*(x) = \sup_{h\in H} (h(x) - \delta_U(x)) =$$

$$= \sup_{h\in \operatorname{dom}\delta_U} (h(x) - \delta_U(x)) = \sup_{h\in U} h(x) = (\sup U)(x).$$

Таким образом,

$$\delta_U^* = \sup U \tag{2.2}$$

(здесь супремум берется в K -полулинеале $\tilde{F}_X$).

Предложение I.3. удобно переформулировать в терминах индикаторной функции. Точнее говоря, имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. Подмножество U в K-полулинеале F_X является H-выпуклым тогда и только тогда, когда для любого $h'\notin U$ выполняется $\delta_U^{**}(h')>0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (2.2), имеем для $h'\in H$

$$\delta_U^{**}(h') = \sup_{x\in X} (h'(x) - \sup_{h\in U} h(x)).$$

Привлекая предложение I.3, получим требуемое.

Следующая теорема описывает связь между H -выпуклыми множествами и $H\circ\ell$ -выпуклыми функциями.

ТЕОРЕМА 2.2. Для того, чтобы подмножество U множества H было H-выпуклым, необходимо и достаточно, чтобы оно являлось лебеговым множеством некоторой $X\circ\ell$ -выпуклой функции f (т.е. существует число c такое, что $U=\{h\in H: f(h)\le c\}$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. I) Пусть U - H -выпукло. Тогда, используя предложения 2.3 и 2.7, имеем

$$\delta_U^{**}(h)>0\,, \qquad \text{если} \qquad h\in U\,;$$

$$\delta_U^{**}(h)\le 0\,, \qquad \text{если} \qquad h\in U\,.$$

Осталось заметить, что функция δ_U^{**} является $X\circ\ell$ -выпуклой
2) Пусть f - $X\circ\ell$ -выпукла и $U=\{h\in H: f(h)\le c\}$. Существует подмножество V множества $X\circ\ell$ такое, что

$f(h)=\sup_{y\in V} h(y)$ $(h\in H)$. Пусть $h'\notin U$. Тогда для некоторого $y\in V$ $(y=x+\alpha f$ $(x\in X))$ выполняется $y(h')>c$, т.е. $x(h')>c-\alpha$. С другой стороны, для всех $h\in U$

$$x(h)+\alpha\leq \sup_{y\in V} h(y)=f(h)\leq c.$$

Для завершения доказательства осталось сослаться на предложение I.3.

Предположим теперь, что X -выпуклый конус в векторном пространстве F_H, H -выпуклый конус в F_X. Отсюда следует, в частности, что элементы конусов X (соответственно, H) являются аддитивными и положительно однородными функционалами на H (соответственно, на X).

Для подмножества U конуса H обычным образом определим поляру U° (относительно X), положив

$$U^\circ=\{x\in X:\ h(x)\leq 1 \quad \text{для всех } h\in U\}.$$

Ясно, что $U^\circ=\{x\in X:\ p_U(x)\leq 1\}$ (где $p_U=\sup U$).

Привлекая теорему 2.2, получим, что поляра является X -выпуклым множеством. Нетрудно проверить, используя предложение I.3, что $U^{\circ\circ}=(U^\circ)^\circ$ совпадает с $co_H\, U$, откуда вытекает, что множество U совпадает со своей второй полярой тогда и только тогда, когда оно H -выпукло.

Введем в рассмотрение калибровочную функцию (функционал Минковского) μ_U множества $U\subset H$, положив для $x\in X$:

$$\mu(x)=\begin{cases} 0 & x=0 \\ \inf\{\lambda>0:\ x\in\lambda U\} & x\neq 0\end{cases}.$$

(В частности, если $x\notin\lambda U$ при всех $\lambda>0$, то $\mu_U(x)=\infty$). Справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.8. Если $U\subset H$, то

$$\delta_{U^\circ}=\mu_U^*,$$

если, кроме того, $0\in U$, то

$$\delta_U^*=\mu_{U^\circ}.$$

Доказательство дословно совпадает с доказательством предложения I.6 в статье [19], где оно проведено для случая, когда X

и H - л.в.д.

Отметим еще, что имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.9. Множество $U \subset H$ является H-выпуклым тогда и только тогда, когда оно содержит нуль и функция δ_U $H \circ 1$-выпукла.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что если U является полярой к некоторому множеству, то оно содержит нуль. Так как H-выпуклое множество U совпадает со своей второй полярой, то $0 \in U$. Отметим еще, что из равенства $\delta_U = \delta_V$ следует, что $U = V$. Доказательство предложения вытекает теперь из следующей цепочки (мы используем теорему 2.I, предложение 2.8 и равенство $U = U^{00}$):

$$\delta_U = \delta_{(U^0)^0} = \mu^*_{U^0} = \delta_U^{**}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.10. Пусть U - H-выпуклое множество, $p_U = \sup U$. Тогда

$$p_U^* = \delta_U.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулу (2.2) и предложение 2.9, имеем

$$p_U^* = (\delta_U^{*})^* = \delta_U,$$

что и требовалось.

4°. Рассмотрим подмножество H пространства $\tilde{F}_X$. Множество $P(H)$ является полуструктурой. Наоборот, если P есть полуструктура, то найдется H такое, что $P = P(H)$. (В качестве H можно взять само P). Разумеется, одно и то же множество P может, вообще говоря, порождаться операцией $\sup$ с помощью различных множеств H.

Пусть H и H' - подмножества $\tilde{F}_X$, причем $P(H \circ 1) = P(H' \circ 1)$. Будем считать, что H и H' удовлетворяют условиям, приведенным в начале I° § 2. Ясно, что H и H' - преобразования Юнга функции f из $\tilde{F}_X$ не совпадают (они определены на разных множествах); однако вторые сопряженные к f функции (по H и H', соответственно) равны. В самом деле, используя предложение 2.4, достаточно проверить, что $co_H f = co_{H'} f$. Заметим, что из результатов I° § I легко следует, что $co_H f$ есть наибольшая $H \circ 1$-выпуклая функция, не превосходящая f , а потому нужное нам равенство следует из совпадения $H\circ f$ и $H'\circ f$ - выпуклых функций.

Для данного класса функций P , устойчивых относительно взятия супремума, представляет интерес описать в каком-либо смысле минимальные множества H , порождающие P с помощью взятия супремума. Часть примеров следующего пункта посвящена исследованию этой задачи в некоторых простейших ситуациях.

5^0. Ниже приводится несколько примеров.

ПРИМЕР 2.I. Пусть h -выпуклая функция на отрезке $X=[a,b]$.(Где $b>a$). Построим преобразование Юнга по лучу $H=\{\alpha h\}$ $\alpha\geqslant 0$ для функции $I: x\mapsto x$.

Так как выпуклая функция достигает максимума в граничных точках отрезка, то

$$I^*(\alpha)=I^*(h)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}(\alpha h(x)-x)=(\alpha h(a)-a)\vee(\alpha h(b)-b).$$

Если $h(a)\geqslant h(b)$, то $\alpha h(a)-a\geqslant\alpha h(b)-a\geqslant\alpha h(b)-b$. Следовательно, $I^*(\alpha)=\alpha h(a)-a$, откуда вытекает, что

$$I^{**}(x)=\sup_{\alpha\geqslant 0}\left(\alpha(h(x)-h(a))+a\right)=a.$$

Пусть теперь $h(b)>h(a)$. Тогда

$$I^{**}(x)=\sup_{\alpha\geqslant 0}\left\{\begin{array}{l|l}\alpha(h(x)-h(a))+a & 0\leqslant\alpha\leqslant\frac{b-a}{h(b)-h(a)}\\ & \\ \alpha(h(x)-h(b))+b & \alpha\geqslant\frac{b-a}{h(b)-h(a)}\end{array}\right\}$$

Отсюда непосредственно следует, что в данном случае

$$I^{**}(x)=a\vee\frac{b(h(x)-h(a))-a(h(x)-h(b))}{h(b)-h(a)}. \qquad (2.3)$$

Из полученного соотношения вытекает простое

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.II. *Класс* $P(H\circ I)$ (*где* $H=\{\alpha h\}_{\alpha\geqslant 0}$, $h\in F_{[0,1]}$) *совпадает с классом выпуклых непрерывных неубывающих функций в том и только том случае, когда* h *-аффинная возрастающая функция.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала h – аффинная возрастающая функция. Прежде всего ясно, что $H \circ I$ -выпуклые функции выпуклы, непрерывны и не убывают; с другой стороны, I является $H \circ I$ -выпуклой функцией, следовательно, любая непрерывная неубывающая выпуклая функция является $H \circ I$ -выпуклой.

Пусть теперь каждая $H \circ I$ -выпуклая функция является неубывающей выпуклой непрерывной функцией, и наоборот, каждая неубывающая выпуклая непрерывная функция $H \circ I$ -выпукла. Тогда, во-первых, h -выпуклая неубывающая функция, причем $h(b) > h(a)$, и, во-вторых, I является $H \circ I$ -выпуклой функцией. Из теоремы Фенхеля-Моро теперь следует, что $I^{**} = I$. Применяя формулу (2.3), имеем

$$h(x) = \frac{b-x}{b-a}\, h(a) + \frac{x-a}{b-a}\, h(b)$$

для всех x из $[a, b]$. Таким образом, h – аффинная функция. Предложение доказано.

ПРИМЕР 2.2. Покажем, что множество аффинных функций при некоторых естественных предположениях является "наименьшим" среди всех множеств, порождающих с помощью взятия супремума выпуклые функции. Точнее говоря, докажем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.12. *Пусть S – компакт в R^n, звездный относительно некоторой внутренней точки $x_0 \in S$, и H – замкнутое множество в пространстве $C(S)$. Тогда $P(H)$ совпадает с совокупностью всех выпуклых замкнутых на S функций в том и только том случае, если H состоит из выпуклых функций и при этом содержит все аффинные функции. (Определение выпуклых замкнутых на S функций см. в примере I.2. Заметим, что сужение выпуклой на S функции на любое выпуклое подмножество в S является функцией, выпуклой в обычном смысле слова).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нуждается в проверке лишь необходимость сформулированных условий.

Установим, прежде всего, следующий факт. Если ℓ – аффинная функция, $\varepsilon>0$, а f – выпуклая функция, причем

$$f(x)\le \ell(x) \quad (x\in S),$$
$$\ell(x_0)\le f(x_0)+\varepsilon,$$

то

$$\|\ell-f\|_C\le \frac{\varepsilon\,\mathrm{diam}\,S}{\delta} \qquad (2.4)$$

Здесь $\mathrm{diam}\,S=\max\limits_{x,y\in S}\|x-y\|$ и $\delta=\min\limits_{y\in\partial S}\|y-x_0\|>0$ (через ∂S обозначена граница S).

Рассмотрим сначала одномерный случай. Пусть S есть отрезок $[x,y]$. Проведем в R^2 прямую L_1 через точки $(y,\ell(y))$ и $(x_0,\ell(x_0)-\varepsilon)$, а L_2 через точки $(x,\ell(x))$ и $(x_0,\ell(x_0)-\varepsilon)$. Обозначим через h_i функцию, графиком которой служит L_i $(i=1,2)$. Очевидно, что f мажорирует функцию $h_1\wedge h_2$. Следовательно,

$$\|\ell-f\|_C\le(\ell(x)-h_1(x))\vee(\ell(y)-h_2(y))=\frac{\varepsilon|x-y|}{|x-x_0|\wedge|y-x_0|}.$$

В общем случае неравенство (2.4) устанавливается путем рассмотрения всевозможных сечений S прямыми, проходящими через точку x_0.

Перейдем теперь собственно к доказательству необходимости. Так как класс $P(H)$ и класс выпуклых замкнутых на S функций совпадают, то, в частности, функции из H являются выпуклыми и любая аффинная функция является H-выпуклой. Последнее означает, что для каждого натурального n найдется функция f_n из H такая, что

$$f_n\le \ell;\quad \ell(x_0)\le f_n(x_0)+\frac{1}{n}.$$

Применяя неравенство (2.4), имеем

$$\|\ell-f_n\|_C\le\frac{\mathrm{diam}\,S}{n\delta}$$

Таким образом, $\ell=\lim\limits_n f_n$. Следовательно, в силу замкнутости множества H, функция ℓ входит в H. Предложение доказано полностью.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Для произвольного компакта S предложение 1.12, вообще говоря, не имеет места.

ПРИМЕР 2.3. Пусть P - совокупность всех сублинейных функционалов, определенных на л.в.п. X (и принимающих, возможно, значение ∞).

Покажем, что наименьшее (по включению) подмножество H пространства $\bar{F}_X$, для которого $P = P(H)$ совпадает с сопряженным к X пространством X'. (Заметим, что по теореме Хермандера [59], $P(X') = P$). Пусть $H' \subset \bar{F}_X$, $P(H') = P$. Так как $X' \subset P$, то для любого $h \in X'$ найдется $h' \in H'$ такой, что $h' \leq h$. С другой стороны, так как $H' \subset P$ и $P(X') = P$, то для данного h' найдется $\bar{h} \in X'$, для которого выполняется неравенство $\bar{h} \leq h'$. Если $h' \neq h$, то $\bar{h} < h$, что невозможно, поскольку $\bar{h}$ и h - линейные функционалы. Итак, $\bar{h} = h$, а потому и $h = h'$, т.е. $h \in H'$, что и требовалось. Рассуждая так же, как и выше, нетрудно проверить, что справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.13. *Пусть S - структура, H - подмножество S, обладающее тем свойством, что для любого $h \in H$*

$$U_h \ (= \{h' \in H : h' \leq h\}) = \{h\}.$$

Тогда если $H' \subset S$ и $P(H') = P(H)$, то $H' \supset H$.

ПРИМЕР 2.4. Рассмотрим отрезок $[u, v]$ вещественной прямой и множество H, состоящее из всех вогнутых квадратных трехчленов, определенных на этом отрезке ($h \in H$, если $h(x) = ax^2 + bx + c$, где $a < 0$ $(x \in [u, v])$). Через $C_a([u, v])$ обозначим совокупность всех полунепрерывных снизу функций, определенных на $[u, v]$ и принимающих, возможно, значение $+\infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.14. $P(H) = C_a([u, v])$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Включение $P(H) \subset C_a([u, v])$ очевидно. Доказательство обратного включения проведем в несколько этапов.

1) Пусть g - многочлен и $x_0 \in [u, v]$. Нетрудно проверить, что найдется такой трехчлен $h \in H$, что $h(x) \leq g(x)$ $(x \in [u, v])$ и $h(x_0) = g(x_0)$. Таким образом, $g \in P(H)$, т.е. $P(H)$ содержит все многочлены.

2) Пусть $g \in C([u, v])$. Для каждого натурального n найдем многочлен g_n, удовлетворяющий условию

$$\| g - g_n \|_C \leq \frac{1}{n},$$

или, что то же самое,

$$g_n - \tfrac{1}{n}\mathbb{1} \leqslant g \leqslant g_n + \tfrac{1}{n}\mathbb{1} .$$

Покажем, что $\sup\limits_n (g_n - \tfrac{1}{n}\mathbb{1}) = g$. В самом деле, в противном случае найдется точка $x_0 \in [u,v]$, для которой

$$g(x_0) > \sup_n (g_n(x_0) - \tfrac{1}{n}) \geqslant \lim_n (g_n(x_0) - \tfrac{1}{n}) = g(x_0),$$

что невозможно. Так как $g_n - \tfrac{1}{n}\mathbb{1} \in P(H)$, то и $g \in P(H)$. Таким образом, $P(H) \supset C([u,v])$.

3) Пусть g – непрерывная на $[u,v]$ функция, принимающая, возмо"'о, значение $+\infty$. Тогда $g = \sup g_n$, где $g_n = (n\mathbb{1}) \wedge g$. Так как $g_n \in C([u,v]) \subset P(H)$, то и $g \in P(H)$.

4) Пусть $g \in C_0([u,v])$. Тогда (см. [II]) g является супремумом семейства непрерывных на $[u,v]$ функций и потому $g \in P(H)$.

Предложение доказано.

Пусть A – конфинальное (т.е. фильтрующее вправо по отношению порядка) подмножество множества неотрицательных вещественных чисел, содержащее нуль, и H' – подмножество H, состоящее из трехчленов, старший коэффициент которых входит в $-A$. Ясно, что $P(H') = P(H) = C_0([u,v])$. Отсюда, в частности, следует, что не существует минимального (по включению) замкнутого в $C([u,v])$ множества H', содержащегося в H, для которого $P(H') = P(H)$.

ПРИМЕР 2.5. Пусть H – некоторое множество функций, определенных на X, и f, g – $H \circ \mathbb{1}$ – выпуклые функции. Тогда, как следует из теоремы Фенхеля-Моро, равенство $f^* = g^*$ влечет $f = g$.

Используя это обстоятельство и предложение 2.14, легко проверить справедливость следующего утверждения:

Пусть $f, g \in C_0([u,v])$ и для любых чисел a, b, c (где $a \leqslant 0$) выполняется соотношение

$$\sup_{x\in[u,v]} (ax^2 + bx + c - f(x)) = \sup_{x\in[u,v]} (ax^2 + bx + c - g(x)) .$$

Тогда $f = g$.

ПРИМЕР 2.6. Пусть, как и выше, H – некоторое множество функций, определенных на X, $f \in \bar{F}_X$. Величину

$$f^*(h) = \sup_x (h(x) - f(x)) \qquad (h \in H)$$

назовем уклонением f от h. Естественно поставить вопрос об отыскании функции, дающей наименьшее уклонение от данной функции среди всех элементов H. Прежде всего попытаемся вычислить $\inf_h \sup_x (h(x) - f(x))$. Предположим, что существует точка $x_0 \in X$ такая, что $h(x_0) = 0$ для всех $h \in H$. Тогда

$$\inf_h \sup_x (h(x) - f(x)) = \inf_h f^*(h) =$$

$$= -\sup_h (-f^*(h)) = -\sup_h (h(x_0) - f^*(h)) = -f^{**}(x_0).$$

В частности, если f – $H \circ \mathbb{1}$ -выпуклая функция, то

$$\inf_h \sup_x (h(x) - f(x)) = -f(x_0). \qquad (2.5)$$

Предположим, что $\inf$ в формуле (2.5) реализуется на некотором элементе $h_0 \in H$. Тогда

$$h_0 + f(x_0)\mathbb{1} \leq f,$$

и, кроме того,

$$(h_0 + f(x_0)\mathbb{1})(x_0) = f(x_0).$$

Нетрудно проверить, что и наоборот, если элемент $h_0 + \alpha\mathbb{1}$ множества $H \circ \mathbb{1}$ опорен к f (т.е. $h_0 + \alpha \in U_f$) и $(h_0 + \alpha\mathbb{1})(x_0) = f(x_0)$, то функция h_0 реализует инфимум в (2.5). Итак, необходимое и достаточное условие существования элемента, наименее уклоняющегося от f заключается в следующем: существует функция g такая, что $g \in U_f = \{g' \in H \circ \mathbb{1} : g' \leq f\}$ и $g(x_0) = f(x_0)$. При этом функция $h_0 = g_0 + f(x_0)\mathbb{1}$ и является решением нашей задачи.

Отметим еще, что имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.15. Пусть отрезок $[u,v]$ содержит нуль, H_0 – совокупность всех функций, определенных на $[u,v]$ и обладающих тем свойством, что $h(0) = 0$. Пусть, далее, f – полунепрерывная снизу функция, определенная на $[u,v]$ и принимающая там конечные значения. Тогда найдутся вещественные числа a и b, причем

$a \le 0$, такие, что

$$\inf_{h\in H}\ \sup_{x\in[0,a]} \left(h(x)-f(x)\right) = \sup_{x\in[0,a]} \left(ax^2+bx-f(x)\right) = -f(0).$$

Если, кроме того, f выпукла, то можно считать, что $a=0$.

ПРИМЕР 2.7. Пусть h – непрерывная возрастающая функция, определенная на $[0,\infty)$, причем множество значений функции h также совпадает с $[0,\infty)$. Положим $H=\{\alpha h\}_{\alpha\ge 0}$ и рассмотрим множество X функций, определенных на H и порожденных точками из области определения h. (Точнее говоря, X состоит из функций $x:\alpha h\longmapsto \alpha h(x)$, где $x\in[0,\infty)$). Отождествляя X с неотрицательной полуосью, получим, что X состоит из всех линейных неубывающих функций, определенных на $[0,\infty)$. Отсюда следует, что множество $P(X\circ H)$ состоит из всех выпуклых замкнутых неубывающих функций, определенных на $[0,\infty)$ (и принимающих, возможно, бесконечные значения).

Из теоремы 2.1 и предложения 2.1 следует, что $g\in P(X\circ H)$ $(g^*\ne-\infty,\ g\ne\infty)$ тогда и только тогда, когда $g=f^*$ для некоторой функции $f\in F_X$ $(f\ne-\infty,\ f^*\ne\infty)$ (здесь * означает H-преобразование Юнга). Таким образом, множество всех функций, являющихся H-преобразованием Юнга, не зависит от h, однако класс $H\circ f$-выпуклых функций от h, безусловно, зависит.

Из сказанного также следует, что функция f является $H\circ f$-выпуклой тогда и только тогда, когда найдется выпуклая замкнутая неубывающая функция g такая, что

$$f(x)=\sup_{\alpha\ge 0}\left(\alpha h(x)-g(\alpha)\right)=g^*(h(x)).$$

При этом $g=f^*$.

Выясним некоторые свойства множества $P(H\circ f)$.

1) Поскольку $H\circ f$ является полулинейным пространством, то множество всех $H\circ f$-выпуклых функций представляет из себя K-полулинеал. (Это следует из результатов 2^0 § 1).

2) Если $f_n\in H\circ f$, $f_n(x)<\infty$ $(x\in[0,\infty),\ n=1,2,\dots)$ и f_n

равномерно стремятся к f, то $f \in H \circ f$. (Это утверждение следует из тех же соображений, что и вторая часть предложения 2.14).
3) Функция $y : x \mapsto (h(x))^{\nu}$ содержится в $P(H \circ f)$ при любом $\nu \geq 1$. При $\nu = 1$ это утверждение очевидно. Пусть $\nu > 1$. Рассмотрим выпуклую непрерывную функцию $\psi : \alpha \mapsto \frac{\nu-1}{\nu} \alpha^{\frac{\nu}{\nu-1}}$. Нетрудно проверить, что

$$\sup_{\alpha \geq 0} (\alpha h(x) - \psi(\alpha)) = \frac{1}{\nu}(h(x))^{\nu}.$$

Откуда следует, что $\frac{1}{\nu} y \in P(H \circ f)$ и, стало быть, $y \in P(H \circ f)$.
4) $P(H \circ f)$ содержит все многочлены $a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \ldots + a_n$ с неотрицательными коэффициентами, а также все равномерные пределы этих многочленов. Отметим также, что
5) $\delta_{[0,a]} \in P(H \circ f)$ при любом $a > 0$.

В самом деле, для $x \in [0, \infty]$ имеем

$$\sup_{\alpha \geq 0} (\alpha h(x) - \alpha h(a)) = \left\{ \begin{array}{c|c} \infty & h(x) > h(a) \\ 0 & h(x) \leq h(a) \end{array} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{c|c} \infty & x > a \\ 0 & x \leq a \end{array} \right\} = \delta_{[0,a]}(x).$$

Так как функция $y : \alpha \mapsto \alpha h(a)$ принадлежит $P(X \circ f)$, то $\delta_{[0,a]} \in P(H \circ f)$.

§ 3. Поляры к конусам H-выпуклых функций

1^0. При исследовании экстремальных задач важную роль играют критерии оптимальности. Общий подход к получению этих критериев разработан в математическом программировании. Как правило, критерии оптимальности, получаемые с помощью методов математического программирования, формулируются в терминах сопряженных (полярных) объектов (ортогональных подпространств, сопряженных конусов и т.д.). Понятно поэтому, что одна из важных задач математического программирования заключается в описании указанных сопряженных объектов.

В этом параграфе мы изучим поляры к некоторым конусам H-

выпуклых функций в пространстве $C(X)$, где X – компактное топологическое пространство. Будем считать, что $C(X)$ упорядочено конусом K неотрицательных функций. Напомним, что $C(X)$ является K-линеалом ограниченных элементов.

2°. Пусть H – выпуклый замкнутый конус в $C(X)$. Как было отмечено в 2° § 1, множество $P(H)=P(H,C(X))$ является выпуклым конусом. Если*) $f\in P^*(H)$, то как следует непосредственно из определения, $f_+(x)\geq f_-(x)$ для всех $x\in P(H)$. Таким образом, можно утверждать, что $f\in P^*(H)$ тогда и только тогда, когда найдутся функционалы f_1 и f_2 из K^* такие, что $f_1(x)\geq f_2(x)$ для всех $x\in P(H)$. Сказанное дает повод для следующего определения. Пусть $f,g\in K^*$. Будем говорить, что f H-следует за g, и писать $f \succ_H g$, если $f(x)\geq g(x)$ для всех $x\in P(H)$.

Для изучения отношения H-следования нам понадобится определить H-распространение функционалов. Линейный монотонный оператор $T: C(X)\to M_K$ назовем H-распространением единицы, если $T|_H \geq 1_H$ (где $T|_H$ – сужение T на H, 1_H – тождественное вложение H в M_K).

Пусть $f,g\in K^*$. Говорят, что f является H-распространением g и пишут $f \underset{H}{\supset} g$, если найдется H-распространение единицы T такое, что $f=T^*g$. Если $f\in K^*$, то разбиением f будем называть конечный набор функционалов $f_1, f_2,\dots, f_n\in K^*$ такой, что $\sum_{i=1}^{n} f_i=f$. Нам понадобится еще следующее определение.

Пусть $f,g\in K^*$. Говорят, что f H-сильнее g и пишут $f \gg_H g$, если для любого разбиения $\{g_1,\dots,g_n\}$ функционала g найдется разбиение $\{f_1,\dots,f_n\}$ функционала f такое, что $f_k-g_k\in H^*$ $(k=1,2,\dots,n)$.

Выясним некоторые простые связи между введенными отношениями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Если f является H-распространением g, то f H-следует за g.

---

*) Символом L^* мы обозначаем конус, сопряженный к L в пространстве $C^*(X)$ (где $C^*(X)$ – пространство, сопряженное к $C(X)$, состоящее из всех радоновских мер, определенных на X).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $f \gg_H g$, то существует H-распространение единицы T такое, что $f = T^* g$. Пусть $x \in P(H)$ и $h \le x$. Тогда $Tx \ge Th \ge h$ и, стало быть, $Tx \ge \sup\limits_{h \le x} h = x$. Имеем

$$f(x) = T^* g(x) = g(Tx) \ge g(x),$$

т.е. $f \succcurlyeq_H g$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. Если f является H-распространением g, то f H-сильнее

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть T такое H-распространение единицы, что $f = T^* g$. Возьмем разбиение $\{g_1, \dots, g_n\}$ функционала g и положим $f_k = T^* g_k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$. Тогда набор $\{f_1, \dots, f_n\}$ является разбиением f и, кроме того, для $h \in H$:

$$f_k(h) = g_k(Th) \ge g_k(h),$$

откуда и следует, что $f \gg_H g$. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Определения, данные выше, использовали лишь то обстоятельство, что $C(X)$ является K-линеалом и локально выпуклым пространством. (Последнее понадобилось лишь для того, чтобы определить конусы K^* и H^*). Ясно, что предложения 3.1 и 3.2 верны в любом K-линеале, являющемся л.в.п.. Следующее ниже предложение уже существенно использует специфику пространства $C(X)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. Пусть H конус в пространстве $C(X)$. Тогда если $f \gg_H g$, то $f \succcurlyeq_H g$ для любых $f, g \in K^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $h_1, h_2, \dots, h_n \in H$ и $p = h_1 \vee h_2 \vee \dots \vee h_n$. Положим

$$E_k = \{z \in X : p(z) = h_k(z)\} \quad (k = 1, 2, \dots, n);$$

$$E_1' = E_1;\; E_2' = (X \setminus E_1') \cap E_2; \dots ;\; E_n' = (X \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} E_k') \cap E_n.$$

Ясно, что E_k -борелевские множества, а потому E_k' - также борелевские множества $(k = 1, 2, \dots, n)$. Кроме того, $E_k' \cap E_j' = \emptyset$ $(k \ne j)$ и, как следует непосредственно из определения,

$$p(z) = h_k(z) \quad (z \in E_k').$$

Рассматривая g как неотрицательную меру на X, построим разбиение $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$, положив $g_k = g|_{E_k'}$ -сужение g

на E'_k. Тогда, поскольку $f \gg_H g$, найдется разбиение $\{f_1, \dots, f_n\}$ функционала f, такое, что $f_k(h) \geq g_k(h)$ при всех $h \in H$ $(k = 1, 2, \dots, n)$. Имеем

$$g(p) = \sum_{k=1}^{n} g_k(p) = \sum_{k=1}^{n} g_k(h_k) \leq \sum_{k=1}^{n} f_k(h_k) \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} f_k(p) = f(p).$$

Таким образом, $(f - g) \in (\widetilde{P(H)})^*$, где $\widetilde{P(H)}$ -конус всех H-выпуклых функций, представимых в виде супремума конечного набора элементов из H.

Покажем, что $\widetilde{P}(H)$ плотно в $P(H)$. Рассмотрим семейство A конечных подмножеств множества $U_q = \{h \in H : h \leq q\}$ $(q \in P(H))$, наделенное естественной упорядоченностью по включению. Тогда сеть $(P_\alpha)_{\alpha \in A}$, где $P_\alpha = \sup \alpha$, возрастает и поточечно сходится к q. В силу теоремы Дини q является равномерным пределом $(P_\alpha)_{\alpha \in A}$, откуда и вытекает требуемая плотность. Из сказанного вытекает, что $(P(H))^* = (\widetilde{P(H)})^*$. Таким образом, $f(q) \geq g(q)$ для любого $q \in P(H)$. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Рассмотрим K-пространство S, являющееся одновременно л.в.п., причем такое, что выполняется следующее условие

если $f \geq 0$, $f \in S^*$ и $0 \leq f_1 \leq f$, то $f_1 \in S^*$.

Пусть, далее, H-выпуклый замкнутый конус в S, причем

1) множество $\widetilde{P(H)}$ плотно в $P(H)$ ($\widetilde{P(H)}$ определяется так же, как и в предложении);

2) если $p = h_1 \vee h_2 \vee \dots \vee h_n$ $(h_k \in H,\ k = 1, 2, \dots, n)$, то найдется разложение K-пространства S на систему компонент $S_1, S_2, \dots, S_n$ такое, что

$$P_{\tau S_k}\, p = P_{\tau S_k}\, h_k \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Тогда если $f, g \in K^*$ (где $K = \{s \in S : s \geq 0\}$) и $f \gg_H g$, то $f \succ_H g$. (Выше уже отмечалось, что отношения $\gg_H$ и $\succ_H$ имеют смысл и в рассматриваемой ситуации).

Справедливость этого утверждения можно проверить так. Возьмем $p = h_1 \vee h_2 \vee \dots \vee h_n \in \widetilde{P(H)}$, найдем по данному p разложение S на компоненты $S_1, \dots, S_n$, о котором шла выше речь, и построим разбиение $\{g_1, \dots, g_n\}$ функционала g, положив

$$g_k(s) = g(P_{s_{g_k}} s).$$

Далее можно использовать те же рассуждения, что и в доказательстве предложения 3.3.

Заметим, что по существу и само предложение 3.3 следует из сделанного замечания. (Надо погрузить $C(X)$ в K-пространство $M(X)$ ограниченных на X функций и понимать под K конус $\{s \in C(X) : s \geq 0\}$).

3^0. Мы показали, что имеет место следующая схема

$$\begin{tikzcd}
 & f \succcurlyeq_H g & \\
f \underset{H}{\sqsupseteq} g \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[rr, Leftrightarrow] & & f \underset{H}{\gg} g \arrow[ul, Rightarrow]
\end{tikzcd}$$

Представляет интерес выяснить, когда справедлива схема

$$\begin{tikzcd}
 & f \succcurlyeq_H g & \\
f \underset{H}{\sqsupseteq} g \arrow[ur, Leftrightarrow] \arrow[rr, Leftrightarrow] & & f \underset{H}{\gg} g \arrow[ul, Leftrightarrow]
\end{tikzcd}$$

Для этого достаточно выяснить, когда выполняется либо

1) $\quad f \succcurlyeq_H g \Longleftrightarrow f \underset{H}{\sqsupseteq} g,$

либо

2) $\quad f \succcurlyeq_H g \Longleftrightarrow f \underset{H}{\gg} g \quad$ и $\quad f \underset{H}{\gg} g \Longleftrightarrow f \underset{H}{\sqsupseteq} g.$

Введем в связи с этим следующие определения. Будем говорить, что конус H обладает свойством (C), если

$$f \succcurlyeq_H g \Longleftrightarrow f \underset{H}{\sqsupseteq} g;$$

H обладает свойством (L), если

$$f \succcurlyeq_H g \Longleftrightarrow f \underset{H}{\gg} g.$$

Заметим, что свойство (C) имеет место далеко не всегда. В самом деле, пусть $H = K$, тогда $f \succcurlyeq_H 0$ для всякого $f \in K^*$. С другой стороны, для любого H-распространения единицы T имеет место соотношение $T^* 0 = 0$.

Свойство (L) встречается существенно чаще. В самом деле, обратимся к следующей ситуации.

Пусть X – локально выпуклое пространство и, одновременно,

K -линеал; $H_1, H_2, \ldots, H_n$ - выпуклые замкнутые конусы в X. Предположим, что пространство X обладает следующими двумя свойствами:

а) конический отрезок $\langle 0, f \rangle$ компактен в слабой топологии пространства X^* при всяком $f \in K^*$ (где $K = \{x \in X : x \geq 0\}$);

б) для любого $f \in K^*$ и произвольных $h_1 \in H_1, \ldots, h_n \in H_n$ найдется разбиение $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ функционала f такое, что

$$f(h_1 \vee \ldots \vee h_n) = \sum_{k=1}^{n} f_k(h_k).$$

При сделанных предположениях справедлива

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть $f, g \in K^*$. Тогда неравенство

$$f(h_1 \vee \ldots \vee h_n) \leq g(h_1 \vee \ldots \vee h_n)$$

имеет место для любых $h_i \in H_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ в том и только том случае, если для любого разбиения $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ функционала g найдется разбиение $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ функционала f, обладающее тем свойством, что

$$f_k - g_k \in H_k^* \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточность устанавливается так же, как в предложении 3.3. Для проверки необходимости рассмотрим следующее множество:

$$S = \{(f_1, f_2, \ldots, f_n) \in (K^*)^n : \sum_{k=1}^{n} f_k = f\}.$$

Ясно, что S - непустое выпуклое слабокомпактное подмножество пространства $(X^*)^n$. Положим

$$\tilde{S} = S - H_1^* \times \ldots \times H_n^*.$$

Очевидно, что $\tilde{S}$ является непустым слабозамкнутым выпуклым множеством. Пусть $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ произвольное разбиение g. Допустим, что элемент $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$ не входит в $\tilde{S}$. Тогда по теореме отделимости найдутся точки $\bar{h}_1, \ldots, \bar{h}_n \in X$ такие, что неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(\bar{h}_k) - \sum_{k=1}^{n} l_k(\bar{h}_k) < \sum_{k=1}^{n} g_k(\bar{h}_k)$$

имеет место для любых $(f_1,\dots,f_n)\in S$, $l_k\in H_k^*$ $(k=1,2,\dots,n)$. Отсюда, в частности, следует, что $\bar h_k\in H_k$ $(k=1,2,\dots,n)$. Пусть теперь $\{\bar f_1,\bar f_2,\dots,\bar f_n\}$ такое разбиение f, для которого

$$f(\bar h_1\vee\dots\vee\bar h_n)=\sum_{k=1}^{n}\bar f_k(\bar h_k).$$

Тогда имеем

$$f(\bar h_1\vee\dots\vee\bar h_n)<\sum_{k=1}^{n}g_k(\bar h_k)\leqslant g(\bar h_1\vee\dots\vee\bar h_n).$$

Полученное противоречие с условиями теоремы означает, что набор $(g_1,g_2,\dots,g_n)$ входит в S, что и требовалось доказать.

Непосредственным следствием этой теоремы является теорема Картье-Фелла-Мейе [52], утверждающая, что конус следов аффинных функций на выпуклое компактное подмножество некоторого л.в.п. обладает свойством (L). Как видно, таким свойством заведомо обладает любой выпуклый замкнутый конус в $C(X)$.

Отметим попутно, что конструкция теоремы 3.1 позволяет описывать различные классы выпуклых фигур, например, совокупность пирамид с данным многогранным углом при вершине и т.д., однако за недостатком места на этих вопросах и их приложениях к исследованию экстремальных геометрических задач мы останавливаться не будем.

4°. Напомним, что функционал p, определенный в нормированном пространстве S, называется суперлинейным, если он положительно однороден $(p(\lambda s)=\lambda p(s)$, $\lambda>0, s\in S)$; супераддитивен $(p(s_1+s_2)\geqslant p(s_1)+p(s_2);\ s_1,s_2\in S)$ и полунепрерывен сверху. Супераддитивный положительно однородный функционал p непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен, т.е.

$$\|p\|=\sup_{s\in S,\ \|s\|\leqslant 1}|p(s)|<+\infty.$$

Линейный функционал l называется опорным к суперлинейному функционалу p, если $l(s)\geqslant p(s)$ для всех $s\in S$. Вернемся к изучению конусов в $C(X)$. Пусть H -выпуклый замкнутый конус в $C(X)$, $f\in C(X)$. Через $p(f)$ обозначим $\sup\{h\in H: h\leqslant f\}$ (здесь $\sup$ берется в K-полулинеале F_X). Для $x\in X$ положим

$$p_x(f)=p(f)(x)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. Ф у н к ц и о н а л $p_x : f \longmapsto p_x(f)$ с у п е р а д д и т и в е н и п о л о ж и т е л ь н о о д н о р о д е н. Д о к а з а т е л ь с т в о о ч е в и д н о.

Нас будет интересовать сейчас вопрос о том, когда имеет место свойство (C). Введем с этой целью следующее определение. Будем говорить, что конус H обладает свойством (K), если

1) функционал p_x непрерывен (и, стало быть, суперлинеен) для всякого $x \in X$;

2) функционал $x \longmapsto \|p_x\|$ измерим по Борелю.

Ниже мы покажем, что (K) влечет (C). Предварительно опишем один случай, когда свойство (K) имеет место.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. П у с т ь H - п о д п р о с т р а н с т в о, с о д е р ж а щ е е с и л ь н о п о л о ж и т е л ь н ы й э л е м е н т f_H и X - м е т р и з у е м о е п р о с т р а н с т в о и л и п р о с т р а н с т в о С т о у н а (э к с т р е м а л ь н ы й к о м п а к т), т о г д а H о б л а д а е т с в о й с т в о м (K).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как f_H - сильно положительный элемент, то найдется число $\lambda > 0$ такое, что $1 \leq \lambda f_H$. Имеем для любого $f \in C(X) : -\lambda \|f\| f_H \leq -\|f\| 1 \leq f$ и потому, учитывая то обстоятельство, что $-\lambda \|f\| f_H \in H$ и вспоминая определение $p(f)$, получим при всех $x \in X$

$$p_x(f) = p(f)(x) \geq -\lambda \|f\| f_H(x).$$

Из супераддитивности функционала p_x (предложение 3.4) следует, что $p_x(f) \leq -p_x(-f)$ и потому

$$p_x(f) \leq \lambda \|f\| f_H(x) \leq \lambda \|f_H\| \|f\|.$$

Из сказанного вытекает соотношение

$$\|p_x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |p_x(f)| \leq \lambda \|f_H\|.$$

Таким образом, функционал p_x ограничен и, следовательно, непрерывен.

Непосредственно из определения следует, что функция $p(f)$ ограничена, полунепрерывна снизу и, стало быть, измерима по Борелю.

Если X метризуемо, то $C(X)$ - сепарабельное пространство. Значит, для всякого $\varepsilon > 0$ выполняется соотношение

$$U_\varepsilon = \{x \in X : \|p_x\| = \sup_{\|f\|\le 1} |p_x(f)| < \varepsilon\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : |p_x(f_n)| < \varepsilon\},$$

где (f_n) есть счетное всюду плотное подмножество единичного шара пространства $C(X)$. Значит, U_ε – борелевское множество, и потому H обладает свойством (K).

Если же X – пространство Стоуна, то по теореме Огасавары [15] алгебра борелевских множеств является полной структурой по включению, откуда мгновенно следует требуемый результат. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Пусть H обладает свойством (K). Положим $\bar{f} = \sup\{y \in P(H) : y \le f\}$. Тогда $\bar{f}(x) = p_x(f)$ для всех $x \in X$ и $f \in C(X)$ и, кроме того, для любой неотрицательной меры μ имеет место соотношение

$$\mu(\bar{f}) = \sup\{\mu(y) : y \in P(H);\ y \le f\}.$$

Доказательство повторяет рассуждения леммы 9.2 из [52].

Следующее предложение указывает на связь между свойствами (K) и (C).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7. Всякий выпуклый замкнутый конус H пространства $C(X)$, обладающий свойством (K), обладает свойством (C).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть μ, ν – неотрицательные меры из $C^*(X)$. Достаточно показать, что из условия $\mu \succ_H \nu$ вытекает существование отображения $x \longmapsto T_x$ компакта X в конус неотрицательных борелевских мер такого, что

1) отображение $x \longmapsto T_x(f)$ измеримо по Борелю для всякой функции f из $C(X)$;

2) $T_x(h) \ge h(x)$ для всех $h \in H$;

3) $\mu(\cdot) = \int_X T_x(\cdot)\, d\nu$.

Рассмотрим функционал $\tilde{p}$, определенный на $C(X)$ по формуле

$$\tilde{p}(f) = \int_X p_x(f)\, d\nu.$$

Отметим прежде всего, что данное определение корректно (ибо функция $p(f)$ полунепрерывна снизу). Ясно, что функционал $\tilde{p}$ супераддитивен и положительно однороден. (Это непосредственно вытекает из предложения 3.4). Кроме того, этот функционал непрерывен, ибо

$$|\bar{p}(f)| \leq \sup_x |p(f)(x)|\, \vartheta(X) \leq \|f\|\, \vartheta(X)\|f\|.$$

Более того, используя предложение 3.6 и привлекая условие $\mu \succ_H \vartheta$, имеем

$$\mu(f) \geq \mu(p_x(f)) = \mu(\bar{f}) = \sup\{\mu(g) : g \in P(H),\ g \leq f\} \geq$$

$$\geq \sup\{\vartheta(g) : g \in P(H),\ g \leq f\} = \vartheta(\bar{f}) = \bar{p}(f).$$

Таким образом, функционал μ опорен к сублинейному функционалу. Можно, используя теорему Штрассена [62], показать, что в этом случае найдется отображение $x \mapsto T_x$ компакта X в совокупность неотрицательных радоновских мер, измеримое по Борелю при всякой $f \in C(X)$ такое, что

$$\mu(f) = \vartheta(T_x(f)) \quad (f \in C(X)),$$

и функционал T_x опорен к функционалу p_x. В частности, для всех $h \in H$

$$T_x(h) \geq p_x(h) = h(x).$$

Следовательно, отображение $x \mapsto T_x$ обладает требуемыми свойствами. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. По существу, мы доказали несколько более сильное утверждение. Пусть H обладает свойством (K), μ и ϑ — неотрицательные меры на X. Тогда если $\mu \succ_H \vartheta$, то существует отображение $x \mapsto T_x$, обладающее свойствами 1)-3), сформулированными при доказательстве леммы. Указанное отображение будем называть в дальнейшем $(\mu, \vartheta; H)$ -распространением.

Отметим, впрочем, что имеет место следующее утверждение. Пусть H - конус, содержащий прямую, проходящую через сильно положительный элемент. Тогда оператор T является H-распространением единицы в том и только том случае, когда найдется непрерывное отображение $x \mapsto T_x$ компактного пространства X в пространство $C^*(X)$, наделенное слабой топологией, такое что

1. T_x является неотрицательной мерой;
2. $T_x(h) \geq h(x)$ для всех $h \in H$;
3. $(Tf)(x) = \int_X f\, dT_x \quad (f \in C(X),\ x \in X)$

Справедливость этого утверждения усматривается так же, как в предложении I.2 из [37]. Таким образом, оператор, сопряженный к H-распространению единицы T, имеет вид

$$\nu \longmapsto \int_X T_x(\cdot)\, d\nu.$$

Из полученных результатов вытекает, в частности, следующая теорема

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть Z-метризуемый или экстремальный компакт, H-подпространство $C(Z)$, содержащее сильно положительный элемент. Тогда H обладает свойствами (C) и (L).

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Чтобы подчеркнуть то обстоятельство, что свойства (C) и (L) могут быть определены в любом K-линеале, являющемся л.в.п., мы переформулируем теоремы 3.I и 3.2 в терминах теории полуупорядоченных пространств. При этом используется известная теорема Крейнов-Какутани [15] о реализации K-линеала ограниченных элементов.

ТЕОРЕМА 3.3. Пусть S - K-линеал ограниченных элементов, тогда любой выпуклый замкнутый конус в S обладает свойством (L).

Пусть H-подпространство S, причем существует элемент $s_0 \in H$ такой, что при некотором $\lambda > 0$

$$s_0 \geq \lambda 1$$

(где 1 - единица в S). Тогда если S сепарабельно или является K-пространством, то H обладает свойством (C).

5°. Приведем несколько примеров.

ПРИМЕР 3.I. Рассмотрим пространство R^n (т.е. считаем, что X состоит из n точек). Имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. Пусть H-подпространство R^n, содержащее строго положительный вектор. Тогда f H-следует за g в том и только том случае, когда найдутся неотрицательные векторы $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ такие, что $\ell_{k}-e_k \in H^{\perp}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ и, кроме того,

$$f = \sum_{k=1}^{n} (g, e_k)\, \ell_k,$$

(напомним, что $(e_1, \dots, e_n)$ – канонический базис R^n).

Для доказательства достаточно проверить, что векторы ℓ_1, $\ell_2, \dots, \ell_n$ обладают указанными в предложении свойствами тогда и только тогда, когда найдется H-распространение единицы T, для которого $\ell_k = T^* e_k$ $(k = 1, 2, \dots, n)$.

ПРИМЕР 3.2. Пусть X -метризуемый компакт в л.в.п. S ; через A обозначим совокупность следов непрерывных аффинных функционалов на X ; заметим, что $P(A)$ совпадает с совокупностью всех непрерывных выпуклых на X функций (см. пример I.2). Поскольку A содержит единицу, то, привлекая теорему 3.2 и замечание к предложению 3.7, получим следующий результат

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть X - метризуемый компакт в л. в. п. S. μ, ν - неотрицательные меры на X. Тогда следующие три утверждения равносильны:

а) $\int_X p\,d\mu \geq \int_X p\,d\nu$ для любой непрерывной выпуклой на X функции p ;

б) $\mu \underset{A}{\gg} \nu$;

в) существует $(\mu, \nu; A)$ - распространение.

ПРИМЕР 3.3. Пусть K -конус с выпуклым компактным основанием σ в л.в.п. S . Через H_K обозначим совокупность следов линейных над S функционалов на σ . Ясно, что H_K является линейным подпространством в $C(\sigma)$, содержащим единицу. (Элемент $\mathbb{1}$ является следом функционала ℓ , определяющего основание $\sigma = \{s \in S : \ell(s) = 1\}$). Множество $P(H_K) = P(H_K, C(\sigma))$ состоит из всех непрерывных сублинейных функционалов, определенных на K (точнее, из следов этих функционалов на σ).

Из теоремы 3.2 вытекает, что справедлива следующая

ТЕОРЕМА 3.5. Пусть K - выпуклый конус с компактным метризуемым основанием σ в л. в. п. S; пусть, далее, μ и ν - неотрицательные меры на σ. Тогда следующие три утверждения равносильны:

1) $\int_\sigma p\,d\mu \geq \int_\sigma p\,d\nu$ для любого непрерывного сублинейного функционала, определенного на K;

2) $\mu \underset{H_K}{\gg} \nu$;

3) существует $(\mu, \nu; H_K)$ - распространение.

ПРИМЕР 3.4. Через H_L обозначим совокупность следов всех линейных функционалов из $(R^n)^*$ на единичную сферу Z_{n-1} пространства R^n. Ясно, что подпространство H_L пространства $C(Z_{n-1})$ не содержит положительных функций. Очевидно, что H_L не обладает свойством (C). Тем не менее, как известно [28], H_L обладает свойством (L). Таким образом, поляра к конусу $P(H_L)$, состоящему из сублинейных функционалов, определенных на R^n, может быть описана в терминах отношения " H-сильнее".

ПРИМЕР 3.5. Пусть H - выпуклый замкнутый конус в пространстве R^n. Рассматривая элементы H как линейные функционалы над R^n и отождествляя линейный функционал с его следом на единичную евклидову сферу Z_{n-1}, будем считать H конусом в $C(Z_{n-1})$.

Легко проверить, что конус $\mathcal{K}(H)$ совпадает в данном случае с совокупностью всех выпуклых компактов, содержащихся в H.

Опишем поляру к конусу $\mathcal{K}(H)$ (или, что то же самое, к $P(H)$). Использовать с этой целью теорему 3.2 в данной ситуации нельзя, ибо, как можно показать, конус H не обладает свойством (C). Тем не менее, по теореме 3.I, этот конус обладает свойством (L).

Этот факт позволяет установить ряд геометрических следствий. Например, имеет место

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть $x_1, \dots, x_{n-1}; y_1, \dots, y_{n-1}$ - заданные выпуклые поверхности в R^n и H - подпространство R^n. Для того, чтобы для любой выпуклой поверхности z, лежащей в H, имело место неравенство

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, z) \geq V(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, z),$$

необходимо и достаточно выполнение условия

$$\mu(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \underset{H}{\gg} \mu(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}).$$

Здесь $V(\cdot, \ldots, \cdot)$ и $\mu(\cdot, \ldots, \cdot)$ – соответственно смешанный объем и смешанная поверхностная функция ([2], [8]).

ПРИМЕР 3.6. Пусть K -выпуклый замкнутый конус в R^n и N – совокупность следов на $K^* \cap Z_{n-1}$ элементов K, рассматриваемых как функционалы над R^n. Ясно, что N -выпуклые множества отождествляются в данном случае с выпуклыми K -нормальными подмножествами K (см. пример 1.6). Конус N не обладает, вообще говоря, свойством (C). Однако K обладает свойством (L). Именно, имеет место

ТЕОРЕМА 3.7. Неравенство

$$\int_{K^* \cap Z_{n-1}} \sup_{l \in U} l(x)\, d\mu \geq \int_{K^* \cap Z_{n-1}} \sup_{l \in U} l(x)\, d\nu \quad (\mu, \nu \geq 0)$$

имеет место для любого выпуклого K-нормального множества U в том и только том случае, когда

$$\mu \underset{N}{\gg} \nu.$$

ПРИМЕР 3.7. Рассмотрим пространство $C([u,v])$ (где $-\infty < u < v < \infty$) и обозначим через H конус, состоящий из всех вогнутых квадратичных трехчленов на $[u,v]$. Из результатов примера 2.4 следует, что $P(H) = P(H, C([u,v])) = C([u,v])$ и потому $P(H)^* = \{0\}$. Используя это обстоятельство и предложение 3.1, легко показать, что любое H -распространение единицы является тождественным оператором. Удобнее, впрочем, использовать непосредственно способ доказательства предложения 3.1. Сформулируем соответствующий результат в виде теоремы.

ТЕОРЕМА 3.8. Пусть T – положительный

линейный оператор в пространстве $C([u,v])$, причем

$$T(\mathbb{1})=\mathbb{1};\quad T(I)=I;\quad T(I^2)\leq I^2$$

(где $I: x\longmapsto x$; $I^2: x\longmapsto x^2$).

Тогда T - тождественный оператор.

Нетрудно проверить, что результат, подобный теореме 3.8, верен и для положительных операторов в пространстве R^n.

ПРИМЕР 3.8. Укажем на полезную характеристику конусов, обладающих свойством (C).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.12. Пусть H - конус, обладающий свойством (C), и $\mathfrak{A}(H)$ есть совокупность всех H-распространений единицы. Положим

$$M(H)=\{p: T_p\geq p \quad \text{для всех } T\in\mathfrak{A}(H)\}.$$

Тогда $P(H)^*=M(H)^*$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество $M(H)$ является V-полуструктурой, кроме того, $M(H)\supset H$. Следовательно, $M(H)\supset P(H)$. С другой стороны, если $f,g\in K^*$ и $f-g\in P(H)^*$, то для некоторого $T\in\mathfrak{A}(H)$ имеем $f=T^*g$. Так как $f(p)=g(T_p)\geq g(p)$ для всех $p\in M(H)$, то $f-g\in M(H)^*$, следовательно, $M(H)^*\supset P(H)^*$. Предложение доказано.

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть X - метризуемый компакт в л.в.п.. Тогда функция f - выпукла и замкнута в том и только том случае, когда $Tf\geq f$ для всех монотонных операторов T, действующих из $C\to M$ и таких, что $Th=h$ для любой аффинной функции h.

Исторический и литературный комментарий

Харди, Литтлвуд и Пойя в книге [58] отмечают, что основы теории выпуклых функций были заложены Иенсеном [18], хотя неравенства, определяющие выпуклую функцию, рассматривались еще Гельдером [16]. Одно из первых упоминаний выпуклых функций есть уже в учебнике Штольца [61]. Практически в то же время были обнаружены различные двойственные связи между функциями и выпуклыми множествами, известными математикам задолго до введения понятия выпуклой функции. Фундаментальным явилось понятие опорной функции выпуклого множества, введенное Г.Минковским в связи с исследованиями по геометрии чисел [33]. Важным шагом в развитии взглядов Минковского явилось установление Фенхелем изоморфизма конуса выпуклых однородных функций и конуса выпуклых компактных подмножеств евклидова пространства (см., например, [6]). В последние годы в связи с развитием теории двойственности локально выпуклых векторных пространств [10] появились различные обобщения схемы Минковского-Фенхеля на случаи выпуклых множеств в K -полулинеалах более сложной структуры (см. Херма..ер [59], А.М.Рубинов [48]). Выяснилось, что опорные функции Минковского (сублинейные функционалы) являются удобным аппаратом исследований проблем, возникающих в различных разделах математики. Упомянем только недавние работы В.С.Владимирова [14] и Л.С.Маергойза [30] по теории роста аналитических функций, Р.Т.Рокафеллера [44], А.М.Рубинова [46] по теории точечно-множественных отображений. Как отмечается в монографии [60], положительно однородные выпуклые функции встречаются также и при рассмотрении вопросов единственности решений дифференциальных уравнений. Плодотворность схемы Минковского-Фенхеля для рассмотрения задач выпуклой геометрии общеизвестна (см. А.Д. Александров [2], Ю.Г.Решетняк [40], Боннезен и Фенхель [6], Буземан [8], Хадвигер [57]).

Как показывает теорема I.I, схема Минковского-Фенхеля имеет структурный характер, т.е., по существу, использует лишь то обстоятельство, что сублинейный функционал является верхней огибающей некоторого семейства линейных функций, т.е. является в нашей терминологии H -выпуклой функцией (по классу линейных функционалов).

Конструкция пункта I параграфа I, естественно, не нова. Подобные построения неоднократно используются в теории частично упорядоченных алгебраических систем (см. например, [56], [15], [9]).

Выделение H-выпуклых функций в настоящей работе проводится для того, чтобы прояснить роль и место теорем отделимости в различных схемах двойственности функций и множеств. Подобная идея впервые была реализована Г.Ш.Рубинштейном при получении абстрактного принципа двойственности экстремальных задач [50].

Здесь уместно отметить, что различные обобщения выпуклости шли, как правило, в сторону обобщения понятия выпуклого множества, а не функции (см. подробный обзор в монографии [17]). Конструкция H -выпуклости представляется в этой связи тем более естественной, что (как установлено в 5^0 § I) понятие выпуклости относительно семейства функций (так называемая Φ-выпуклость, рассматриваемая Бержем [3] и Фаном [51]) вкладывается в излагаемую схему.

В связи с развитием функционального анализа естественно было применить его методы для изучения выпуклых множеств. Это, прежде всего, потребовало реализовать полулинейное пространство выпуклых множеств как конус в векторном пространстве. Такой объект (пространство выпуклых множеств) был построен в работах Радстрома [39], Хермандера [59], Пинокера [38], см. также работу Рубинова [47]. По существу, во всех этих работах использовалась конструкция Неймана-Биркгофа (см., например, монографию Л.Фукса [56]).

Пространство выпуклых множеств естественно возникает в различных вопросах анализа, геометрии и математической экономики. По поводу возможного использования этого пространства в геометрии выпуклых поверхностей см., например, [2], [27].

В математической экономике систематически используются так называемые суперлинейные точечно-множественные отображения, являющиеся, по существу, "вогнутыми" операторами со значениями в пространстве выпуклых множеств. Эти отображения были введены (в конечномерном случае) Р.Т.Рокафелларом [44] и А.М. Рубиновым [45]. Общая теория двойственности этих отображений в произвольных л.в.п. развита А.М.Рубиновым в [46]. Заметим, что изучение спектральных свойств таких отображений существенно использует технику пространства выпуклых множеств. Многие результаты, относящиеся к теории вогнутых точечно-множественных отображений, остаются справедливыми и в случае " H-вогнутости", на чем мы за недостатком места не останавливались.

Во втором параграфе настоящей статьи дается структурный аналог теории сопряженных выпуклых функций. История развития этой теории, явившейся обобщением схемы Минковского-Фенхеля (а в некотором смысле и эквивалентом этой схемы), подробно изложена в обзорной статье А.Д.Иоффе и В.М.Тихомирова [19]. В этой же работе указаны многочисленные связи этой теории с проблемами других математических дисциплин. Поэтому мы не будем подробно останавливаться на значении теории Фенхеля-Моро-Рокафеллера, а отошлем читателя к работам [7], [13], [21], [35], [36], [41], [42], [43], [53], [54].

Третий параграф посвящен описанию поляр к конусам H-выпуклых функций. Помимо той роли, которую играют эти поляры при исследовании экстремальных задач (что уже отмечалось выше), поляра к соответствующему конусу позволяет перейти от задания его с помощью операции взятия супремума к обычной форме задания выпуклого конуса в виде пересечения полупространств.

Поляра к конусу выпуклых функций в одномерном случае в терминах распространения описана Харди, Литлвудом и Пойя в [58]. Для компакта в R^n соответствующий результат получен Блекуэллом [5]. В общем случае метризуемого выпуклого компакта в л.в.п. требуемое представление было дано Картье, Феллом и Мейе. Мы в настоящей работе следовали методу Штрассена[62]. По поводу этих работ, а также связи распространений с задачами математической статистики подробнее см. [52]. H-распространения используются также в некоторых разделах функционального анализа (см., например, [37]).

Отношение L-сильнее, где L есть совокупность линейных функционалов над конечномерным числовым пространством было введено Ю.Г.Решетняком в [40]. Им же было показано, что отношение L-сильнее влечет отношение L-следования. Обращение этой теоремы получено С.С.Кутателадзе [28]. Интерпретация отношения L-сильнее в терминах пространства выпуклых множеств и применение этого понятия к изучению смешанных объемов даны в [27], [28]. Для случая аффинных функций отношение H-сильнее было введено Люмисом [29]. Картье, Фелл, Мейе [52] получили описание поляры конуса выпуклых функций, определенных на компакте в л.в.п., в терминах этого порядка.

В заключение отметим, что при изучении H-выпуклости возникает ряд интересных задач, некоторые из которых связаны и с известными проблемами. Представляет интерес вопрос о существовании и описании минимальных конусов, порождающих заданный класс H-выпуклых функций. Любопытен вопрос о числе $m(X)$ образующих минимального конуса, порождающего заданное векторное полуупорядоченное пространство X. (Отметим попутно, что при естественных предположениях на класс допустимых конусов имеем:

$3 \leq m(R^n) \leq 4$ и $3 \leq m(C([0,1])) \leq 4$).

Другой важный вопрос - нахождение внутренней характеристики H-выпуклого множества (в связи с этой задачей упомянем только работы [1], [31], [32], в которых в частном случае обсуждается та же задача). Авторам представляется также интересным получение (при минимальных предположениях) необходимых и достаточных условий, при которых конус в K-линеале обладает свойствами (C) или (L).*) Более частные нерешенные вопросы легко извлечь из примеров, приводимых в основном тексте статьи.

Литература

1. Л.А.Айзенберг, А.П.Южаков, Л.Я.Макарова. О линейной выпуклости в C^n. Сиб.мат.журн. т.IX, № 4 (1968), 731-746.
2. А.Д.Александров. К теории смешанных объемов выпуклых тел. Матем. сб., 2(44): 5, 1937, 947-972; Матем.сб., 2(44) 6, 1937, 1205-1236; Матем.сб., 3(45): 1, 1938, 27-46; Матем. сб., 3(45):2, 1938.
3. К.Берж (C.Berge). Sur une convexite requliere non lineaire et ses applications à la theoriere des jeux. Bull. Soc. Math. France, 82 (1954), 301-315.
4. Г.Биркгоф. Теория структур. ИЛ., М., 1952.
5. Д.Блекуэлл (D.Blackwell). Equivalent comparisons of experiments. Ann. Math. Stat., 24 (1953), 265-272.
6. Т.Боннезен, В.Фенхель (T.Bonnesen, W.Fenchel). Theorie der konvexen korper. B., 1934, M.4, 1938.
7. А.Брондстед (A.Brondsted). Conjugate convex functions in topological vector spaces. Math. fys. Meddelelser udjigate at Det. Kongelige Danske Vid. Selskal. C., 34, 2 (1964).
8. Г.Буземан. Выпуклые поверхности. "Наука", М., 1964.
9. Н.Бурбаки. Алгебра. гл.IУ-УI. "Наука", М., 1965.
10. Н.Бурбаки. Топологические векторные пространства. ИЛ., М., 1959.
11. Н.Бурбаки. Общая топология. "Наука", М., 1968.

*) Недавно нам стала известной работа H.Dinges, Decompositions in ordered semigroups, J. Funct. Anal., 5 (1970), 3, 436-484, в которой рассматриваются подобные вопросы, хотя и в несколько иной постановке.

12. Р.А.Вайсман (R.A.Wijsman). Convergence of sequences of convex sets, cones and functions. Trans. Amer. Math. Soc., 123, 1 (1966), 32-45.

13. В.С.Владимиров. Преобразование Лежандра выпуклых функций. Матем. заметки, 1:6 (1967), 675-682.

14. В.С.Владимиров. Выпуклые однородные функции - индикатрисы роста голоморфных функций. Матем. заметки 2:2(1967), 167-174.

15. Б.З.Вулих. Введение в теорию полуупорядоченных пространств. ГИФМЛ., М., 1961.

16. О.Гёльдер (O.Hölder). Ueber einen Mittelwertsatz,Göttinger Nachrichten, 1889, 38-47.

17. Л.Данцер, Б.Грюнбаум, В.Кли. Теорема Хелли. "Мир", М.1968.

18. И.. Йенсен (I.L.Iensen). Om Uligheder imellem Potensmiddelvaerdier. Math. Tidsskrift. B., 1931, 1.

19. А.Д.Иоффе, В.М.Тихомиров. Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи. УМН, т.XXIII, 6(144), 1968, 51-116.

20. Л.В.Канторович, Б.З.Вулих, А.Г.Пинскер. Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, М.-Л. ГИТТЛ, 1950.

21. С.Карлин. Математические методы в теории игр, программировании и экономике. М., ИЛ., 1964.

22. В.Кли (V.Klee). Convex sets in linear spaces. I Duke Math. I., 18 (1951), 443-466.

23. В.Кли (V.Klee). Convex sets in linear spaces. II Duke Math. I., 20 (1953), 105-112.

24. Convexity, Proceedings of simposia in pure math. VII, Providence, 1963.

25. Proceedings of the collog. on convexity. Copenhagen, 1967.

26. М.А.Красносельский, Я.Б.Рутицкий. Выпуклые функции и пространства Орлича. М., Физматгиз, 1958.

27. С.С.Кутателадзе, А.М.Рубинов. Задачи типа изопериметра в пространстве выпуклых тел, Оптимальное планирование, вып. 14, Новосибирск, 1969.

28. С.С.Кутателадзе. Положительные линейные функционалы над выпуклыми поверхностями. Оптимальное планирование, вып.14, Новосибирск, 1969.

29. Л.Люмис (L.H.Loomis). Unique direct integral decompositions on convex sets. Amer. J. Math., 94 (1962), 509-526.

30. Л.С.Маергойз. Некоторые свойства выпуклых множеств и их приложения к теории роста выпуклых и целых функций. Сиб. мат.журнал, т.IX, № 3(1968), 377-391.

31. Л.Я.Макарова. О дополнительных линейно выпуклых оболочках. Сиб.мат. журнал, т.XI, № 3 (1970), стр.546-551.

32. А.Мартино (A.Martineau). Sur la topologie des espaces de fonctions holomorphes. Math. Ann., 163, 1 (1966), 62-68.

33. Г.Минковский (H.Minkowski). Theorie des konvexen Körper, ins fe sondere be gründung ihres Oberflachen bergriffs. bes. Abh., 25 (1911), 131-229.

34. Б.С.Митягин. Интерполяционная теорема для модулярных пространств. Мат.сб., т.66 (1965), 473-482.

35. Дж.Моро (J.J.Moreau). Fonctions convexes en dualite. Faculte des science de Montepellier. Seminaire de Math. (multigraph), 1962.

36. Дж.Моро (J.J.Moreau). Inf-convolution des fonctions numeriques sur un espace vectorial. Compt. Rend. Acad. Sci, 258 (1964), 1128-1330.

37. А.Пелчинский. Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения. "Мир", М., 1970.

38. А.Г.Пинскер. Пространство выпуклых множеств локально выпуклого пространства. В сб. "Некоторые классы полуупорядоченных пространств", изд. ЛГУ, 1966, 13-18.

39. Х.Радстром (H.Rådström). An embedding theorem for spaces of convex sets. Prac. Amer. Math. Soc., 3 (1952), 165-169.

40. Ю.Г.Решетняк. Канд. дисс. Ленинград, 1954, 32-49.

41. Р.Рокафеллер (R.T.Rockafellar). Duality theorem for convex functions. Bull. Amer. Math. Soc., 70 (1964), 1.

42. Р.Рокафеллер (R.T.Rockafellar). Level sets and contimuty of conjugate convex functions. Trans. Amer. Math. Soc., 123 (1966), 46-63.

43. Р.Рокафеллер (R.T.Rockafellar), Extension on Fenchel duality for convex functions. Duke Math. J., 33 (1966), 497-510.

44. Р.Рокафеллер (R.T.Rockafellar). Monotone processes of convex and concave type. Mem. Amer. Math. Soc., 1967.

45. А.М.Рубинов. Двойственные модели производства, ДАН СССР, 180 141, 1968, 795-798.

46. А.М.Рубинов. Точечно-множественные отображения, определенные на конусе. Оптимальное планирование, вып.14 (1969), Новосибирск.

47. А.М.Рубинов. О некоторых свойствах сублинейных функционалов, Оптимальное планирование, вып.9 (1967), Новосибирск.

48. А.М.Рубинов. Сублинейные функционалы, определенные на конусе. Сиб.матем.журн., т.XI, 2(1970).

49. А.М.Рубинов. Эффективные траектории динамической модели производства. ДАН СССР, 184 (6), 1969, 1294-1297.

50. Г.Ш.Рубинштейн. Двойственные экстремальные задачи. ДАН СССР, 152(2), 1963, 288-291.

51. К.Фан (K.Fan). On the Krein-Milman theorem. Convexity, Providence, 1963, 211-219.

52. Р.Фелпс. Лекции о теоремах Шоке. "Мир", М., 1968.

53. В.Фенхель (W.Fenchel). On conjugate convex functions. Canad. J. Math., 1 (1949), 73-77.

54. В.Фенхель (W.Fenchel). Convex cones, sets and functions. Lecture notes. Prinston Univ., 1953.

55. Б.А.Фукс. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. ИФМЛ, М., 1962.

56. Л.Фукс. Частично упорядоченные алгебраические системы. "Мир", М., 1965.

57. Г.Хадвигер. Лекции об объеме, площади поверхности и изометрии. "Наука", 1966.

58. Г. Харди, Д.Е.Литтльвуд, Г.Полиа. Неравенства. ГИИЛ. М., 1948.

59. Л.Хермандер (L.Hörmander). Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans une espace localement convexe. Arkiv för Matematik, 3, 2 (1955).

60. Э.Хилле, Р.Филлипс. Функциональный анализ и полугруппы. ИИЛ, М., 1962.

61. О.Штольц (O.Stolz). Grundzüge der Differential und Integralrechung. L., 1893.

62. В.Штрассен (V.Strassen). The existence of probability measures with given marginals. Ann. Math. Statist., 36 (1965), 423-440.

Поступила в редакцию
29.IX. 1970 г.