УДК 513.88

ПРИБЛИЖЕНИЯ К НЕПОДВИЖНЫМ ТОЧКАМ

Б.А.Вертгейм

В сообщении изложены способы приближенного отыскания неподвижных точек некоторых классов отображений, использующие симплициальные разбиения. Мы рассматриваем непрерывные отображения, удовлетворяющие условиям теорем Брауэра или Лефшеца-Хопфа, и полунепрерывные сверху точечно-множественные отображения, удовлетворяющие условиям теорем Какутани или Эйленберга-Монтгомери. По аналогии с леммой Шпернера выделяется класс нормальных симплексов, а также более широкий класс симплексов, названных представительными. Получена оценка близости представительного симплекса к неподвижной точке; в оценке участвует число Лебега открытого покрытия некоторого компакта, см. [7,8].

1. Пусть $T \subset E^n$ замкнуто и связно, $f: T \to T$ непрерывно, $\varphi(x) = f(x) - x$, $v_i \in E^n$, $i \in Z_{n+1} = \{1, 2, \ldots, n+1\}$, $|v_i| \le 1$, $\sum_i v_i = 0$, $(v_i, v_j) \le 0$ при $i \ne j$ и векторы $\{v_i\}$, $1 \le i \le n$ линейно независимы. Пусть далее

$$M_i = \{x \in T \mid (\varphi(x), v_i) \ge 0\}, \quad \mu(x) = \{i \in Z_{n+1} \mid x \in M_i\} .$$

Множество $\mathcal{D} \subset T$ считается представительным, если $\bigcup_{x \in \mathcal{D}} \mu(x) = Z_{n+1}$.

ЛЕММА 1. (см. [8]).

$$\bigcap_{i=1}^{n+1} M_i = \varphi^{-1}(0), \quad \bigcup_{i=1}^{n+1} M_i = T; \quad \forall x \in T \; | \mu(x) \ne \emptyset .$$

3. Пусть x^* - изолированная неподвижная точка для f и замкнутая окрестность $\mathcal{U}$ этой точки не содержит других не-

неподвижных точек. Положим $P_\varepsilon = T \cap U \cap CS(x^*, \varepsilon)$

$$\gamma(\varepsilon) = \min_{x \in P_\varepsilon} \max_{i \in Z_{n+1}} d(x, M_i), \quad \beta(\rho) = \sup\{\varepsilon \mid \gamma(\varepsilon) \leq \rho\} .$$

ЛЕММА 2. $0 < \gamma(\varepsilon) \leq \varepsilon$,

$$\varepsilon \leq \varepsilon' \Rightarrow \gamma(\varepsilon) \leq \gamma(\varepsilon'), \qquad \lim_{\rho \to +0} \beta(\rho) = 0 .$$

ТЕОРЕМА I [8]. Пусть замкнутое множество U является окрестностью неподвижной точки x^* отображения $f: T \to T$ и U не содержит других неподвижных точек этого отображения. Тогда если σ – представительный симплекс радиуса ρ, вершины и центр z которого лежат в $T \cap U$, то $d(x^*, z) \leq \beta(\rho)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Построение величины $\gamma(\varepsilon)$ незначительно отличается от конструкции, ведущей к упомянутому числу Лебега открытого покрытия компакта P_ε множествами CM_i, [4].

Рассмотрим вопрос о том, как может быть оценена в конкретных случаях величина $\gamma(\varepsilon)$. Пусть имеет место разложение

$$\varphi(x) = A(x - x^*) + a(x); \quad \sup_{j \in Z_{n+1},\ |x - x^*| \leq 2\tau} |v_j^*|^{-1} |a(x)| = d(\tau) .$$

Здесь A – обратимое линейное преобразование, A^* – сопряженное к нему, $A^* v_j = v_j^*$, $\ell_j = |v_j^*|^{-1} v_j^* (v_j = const, \forall_j)$. Тогда

$$M_j \cap S(x^*, 2\tau) \subset \Pi_j(\tau) \cap S(x^*, 2\tau); \quad \Pi_j = \{x \in E^n \mid (x - x^*, \ell_j) \geq -d(\tau)\}.$$

Теперь, заменяя расстояния до замкнутых множеств M_i на величины $d(x, \Pi_i(\tau))$, равные расстояниям до соответствующих полупространств $\Pi_i(\tau)$, мы получаем оценку снизу для величины $\gamma(\tau) = \min_{|x - x^*| = \tau} \max_{i \in Z_{n+1}} d(x, M_i)$, и, предполагая, что эта величина не убывает с ростом τ, получаем оценку снизу для $\gamma(\tau)$. Это проще всего иллюстрировать случаем $n = 2$. Обозначим буквой θ наибольший угол между любыми двумя из трёх векторов v_j, $j = 1,2,3$, и пусть $\theta = \pi - \bar\theta$. Очевидно, $0<\theta<\frac{\pi}{2}$. Можно показать, что $\bar\gamma(r) = r\sin\frac{\theta}{2} - \alpha(r)$, и, если $\bar\gamma$ не убывает с ростом r, приходим к следующему утверждению: пусть σ – представительный симплекс с центром в точке c и радиусом δ. Если $\delta<\bar\gamma(r)$, то $|x^*-c|<r$.

Для сравнения полученной оценки с той, что обычно выводится при решении систем уравнений, например, методом Ньютона-Канторовича, заметим, что угол θ тем меньше, чем меньше $\det A$. Если $\lim \alpha(r)r^{-1}=0$, то $A=\varphi'(x^*)$. Пусть r и $\delta=\frac{r}{2}\sin\frac{\theta}{2}$ столь малы, что $\alpha(r)<\delta$. Тогда приведённая выше оценка принимает вид $|x^*-c|<2\delta/\sin\frac{\theta}{2}$ (сравн. с наличием в обычных оценках нормы обратного оператора $\|A^{-1}\|$).

3. В практических вычислениях обычно удобно вместо многозначной функции μ иметь дело с её сечением, то есть с такой функцией $\nu: T\to Z_{n+1}$, что $\forall x|\nu(x)\in\mu(x)$. Такую функцию ν будем называть нумерацией. Введём ещё понятие упорядоченной нумерации. Пусть $\pi': Z_{n+1}\to Z_{n+1}$ – некоторая заданная перестановка, например, тождественная. Упорядоченной нумерацией, соответствующей перестановке π', назовём следующую функцию

$$\nu_{\pi'}(x) = \min\{j\in Z_{n+1}|\pi'(j)\in\mu(x)\}.$$

Будем, как обычно, называть симплекс нормальным в нумерации $\nu_{\pi'}$, если образ множества W всех вершин симплекса при отображении $\nu_{\pi'}$ совпадает со всем Z_{n+1}, то есть $\nu_{\pi'}(W)=Z_{n+1}$. Нормальный симплекс всегда является представительным в смысле приведённого выше в пункте I определения. Важно отметить, что для упорядоченной нумерации получаются "в среднем" лучшие приближения, чем по предыдущему способу. Для сравнения рассмотрим линейный случай (см. выше, $a(x)\equiv 0$) и положим при $n=2$, что углы между векторами V_i^* и V_j^* равны $2\alpha_{ij}$ ($i,j=1,2,3,$ $i\neq j$, $\alpha_{12}+\alpha_{23}+\alpha_{31}=\pi$). Тогда в случае упорядоченной нумерации, где $\pi'=1$ – тождественная перестановка, центр нормального симплекса радиуса d удалён от неподвижной точки (точки 0) не далее чем на величину r,

$$r \leq d\frac{1}{\sin\eta}, \quad \eta = \eta_{\pi'} = \begin{cases} \alpha_{12}, \text{ если } & 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{4}, \\ & (\pi' = i) \\ \frac{\pi}{2} - \alpha_{12}, \text{ если } & \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Любопытно, что если угол, например, $\alpha_{13} \to \pi$, то такое вырождение не отражается на приведённой оценке, в то время как в предыдущем пункте 2 при этом получится, что $\theta \to 0$ и качество приближений, по существу, ухудшается. Отметим, однако, что, взяв минимум по всем перестановкам π', мы возвращаемся к оценке из предыдущего пункта 2.

Приведенная теорема может служить базой для построения приближений к неподвижным точкам. Однако не к каждой такой точке можно приблизиться указанным путём. Пример: $n=1$, $T=[-1,1]$ $f(x)-x=x^2(0{,}5-x)$. В нашей заметке [7] приведены достаточные условия применимости способа симплициальных разбиений (отличие от нуля топологического индекса неподвижной точки), а также один экономный алгоритм поиска представительных симплексов, который имеет общие черты с алгоритмами из [5,6], но отличается от них. Отметим, что в [5,6] не рассматривались вопросы об оценке точности приближений (см. выше) и о достаточных условиях применимости метода. Наконец, многозначные функции приближаем обычным кусочно-линейной интерполяцией.

Литература

1. П.С.Александров, Комбинаторная топология, М. 1947.
2. Л.В.Канторович, Г.П.Акилов, Функциональный анализ в нормированных пространствах, М., 1959.
3. М.А.Красносельский, Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, М., 1956.
4. П.Хилтон, С.Уайли, Теория гомологий, М., 1964.
5. H.Scarf, SIAM Journ Appl Mathem., v15, N5(1967), c. 1328.
6. H Kuhn. Proc. Nat. Acad. Scienc USA, v.61, N4. (Дес. 1968) с. 1238-1242.
7. Б.А.Вертгейм, Доклады Ак. наук СССР, т.191, № 1 (1970), 9-12.
8. Б.А.Вертгейм, Оптимальное планирование, вып. 14 (1969), 28-42.

Поступила в редакцию
15.IX. 1970 г.