УДК 512.25/26 + 519.3:330.115

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ДРОБНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Ю.П.Чернов, Э.Г.Ланге

I. Постановка задачи

В предлагаемой работе рассматривается следующая задача. Найти минимум

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\varphi_{ij}(x_{ij})}{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\psi_{ij}(x_{ij})} \tag{I}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i\ ,\quad i=1,2,\dots,m, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j\ ,\quad j=1,2,\dots,n, \tag{3}$$

$$\alpha_{ij}\leqslant x_{ij}\leqslant\beta_{ij}\ ,\quad i=1,2,\dots,m,\ j=1,2,\dots,n, \tag{4}$$

где вещественнозначные функции $\varphi_{ij}(x_{ij})$, $\psi_{ij}(x_{ij})$, определённые на сегментах $[\alpha_{ij},\beta_{ij}]$, непрерывны и ограничены при $i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n$, причем знаменатель функционала $\psi(x)$ отличен от нуля на множестве R, определённом ограничениями (4). Множество функционалов вида (I) обозначим через V.

При дальнейшем изложении работы всегда будем предполагать, что $\psi(x)>0,\ x\in R$ (относя знак минус, если это необходимо, к числителю) и что выполнены условия разрешимости задачи (I) - (4), которые имеют вид

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \leqslant a_i \leqslant \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \leqslant b_j \leqslant \sum_{i=1}^{m} \beta_{ij} \quad , \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j ,$$

а функция

$$S(x,c) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} S_{ij}(x_{ij}, c) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \{\varphi_{ij}(x_{ij}) - c\psi_{ij}(x_{ij})\} \quad (5)$$

выпукла на множестве R при любом $c \in [c', c'']$, где c' и c'', соответственно, нижняя и верхняя границы функционала (I) на множестве R. Последнее условие (см. [I]) обеспечивает одноэкстремальность задачи (I) - (4).

2. Транспортная задача дробно-линейного программирования (ДЛП).

Рассмотрим частный случай задачи (I)-(4) в случае, когда функции $\varphi_{ij}(x_{ij}), \psi_{ij}(x_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, линейные, т.е. имеют вид $\varphi_{ij}(x_{ij}) = c'_{ij} x_{ij}$, $\psi_{ij}(x_{ij}) = c''_{ij} x_{ij}$. Транспортная задача ДЛП такого вида, без учёта ограничений вида (4), рассматривалась в работе [2]. Для неё был получен критерий оптимальности, который сформулирован следующим образом.

Признак оптимальности. Если для опорного плана X все детерминанты $d_{ij} \geqslant 0$, то план X является оптимальным для задачи ДЛП на минимум.

Здесь

$$d_{ij} = \begin{vmatrix} \varphi(x) & \Delta'_{ij} \\ \psi(x) & \Delta''_{ij} \end{vmatrix} \quad (6)$$

Δ'_{ij}, Δ''_{ij} - оценки переменных x_{ij} в транспортных задачах линейного программирования при опорном плане X и линейных функциях, являющихся, соответственно, числителем и знаменателем функционала транспортной задачи ДЛП.

Приведенный признак оптимальности справедлив и тогда, когда числитель и знаменатель функционала транспортной задачи ДЛП-линейные неоднородные функции.

Согласно приведенному признаку оптимальности, для решения транспортной задачи ДЛП можно применить любой алгоритм решения транспортной задачи ЛП, основой которого является последовательное улучшение плана.

Рассмотрим модифицированный распределительный метод решения транспортной задачи ДЛП.

Для этого сведем вначале данные задачи в таблицу, которая является аналогом транспортной таблицы и отличается от неё тем, что в каждую клетку вносятся два значения "стоимости" c'_{ij} и c''_{ij}, расположенные, соответственно, в левом верхнем и нижнем углах.

Предположим, что известен некоторый опорный план, и рассмотрим переход к новому опорному плану. С этой целью введём окаймляющую строку и окаймляющий столбец для дуальных переменных $\tau'_i, \tau''_i, \eta'_j, \eta''_j$. Дуальные переменные строк τ'_i, τ''_i и столбцов η'_j, η''_j определяются отдельно для числителя и знаменателя по тем же правилам, что и в линейном случае, и записываются в окаймляющую строку и окаймляющий столбец. Дуальные переменные строк τ'_i, τ''_i записываются, соответственно, в верхнюю и нижнюю половины клеток окаймляющего столбца. Аналогично записываются дуальные переменные столбцов. Значения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ записываются в первой клетке окаймляющей строки в верхней и нижней половинах. Клетка, расположенная на пересечении окаймляющей строки и окаймляющего столбца, не заполняется.

После этого переходим к нахождению оценок $\Delta'_{ij} = \tau'_i + \eta'_j - c'_{ij}$, $\Delta''_{ij} = \tau''_i + \eta''_j - c''_{ij}$ и d_{ij}. При этом так как для базисных переменных Δ'_{ij}, Δ''_{ij}, d_{ij} равны нулю, то соответствующие им клетки заполнены по схеме рис.I, а для внебазисных переменных, в силу $x_{ij} = 0$, соответствующие клетки заполняются по схеме рис. 2.

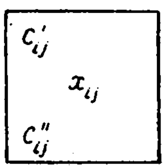

Рис. I

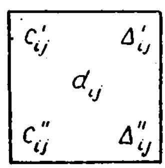

Рис. 2

Вычислив определители d_{ij}, переходим к проверке плана X на оптимальность. Если все $d_{ij} \geq 0$, то план X оптимален. В противном случае находим наименьшее значение d_{ij} и преобразуем соответствующую переменную в базисную так же, как и при решении задачи ЛП.

Нетрудно убедиться, что к транспортной задаче ДЛП с двусторонними ограничениями может быть применим метод решения транспортной задачи с ограничениями по пропускным способностям, предложенный Нестеровым [3], с учётом вышеуказанного критерия оптимальности.

Для полноты описания алгоритма рассмотрим вопрос о нахождении начального опорного плана. Очевидно, что простейший метод построения начального опорного плана транспортной задачи линейного программирования -метод северо-западного угла-применим и в случае транспортной задачи ДЛП. В других методах, таких как метод наименьшего элемента в строке, метод наименьшего элемента в столбце, метод наименьшего элемента в матрице, метод двойного предпочтения, метод Фогеля, в качестве элемента c_{ij}, фигурирующего в линейном случае, следует использовать отношение c'_{ij} / c''_{ij} при $c''_{ij} \neq 0$. Если при $c''_{ij} \neq 0$ не осуществляется полное распределение, то можно использовать элементы c'_{ij} при $c''_{ij} = 0$. В остальном эти методы переносятся непосредственно на случай транспортной задачи ДЛП.

3. Построение приближенной задачи

В настоящей работе предлагается один приближенный метод решения задачи (I)-(4), основанный на линеаризации функций, входящих в функционал (I).

Полученную задачу, по аналогии с [4], [5], будем называть δ -задачей. Метод построения δ -задачи состоит в следующем.

Каждый сегмент $[\alpha_{ij}, \beta_{ij}]$, $i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n$, разбиваем на p_{ij} частичных сегментов $[x_{k-1,ij}, x_{kij}]$, $k=1,2,\dots,p_{ij}$, точками x_{kij}, $k=0,1,\dots,p_{ij}$, $x_{0ij} = \alpha_{ij}$, $x_{p_{ij}ij} = \beta_{ij}$.

Для каждого x_{kij}, $i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n;\ k=0,1,\dots,p_{ij}$, вычислим значения $\varphi_{ij}(x_{kij}) = \varphi_{kij}$, $\psi_{ij}(x_{kij}) = \psi_{kij}$, $S_{ij}(x_{kij}, c) = S^{(c)}_{kij}$, и на каждом частичном сегменте $[x_{k-1,ij}, x_{kij}]$, $i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n;\ k=1,\dots,p_{ij}$, нелинейные функции заменяем, соответственно, отрезками прямых вида

$$\varphi_{k-1,ij} + \frac{\varphi_{kij} - \varphi_{k-1,ij}}{x_{kij} - x_{k-1,ij}}(x_{ij} - x_{k-1,ij}),$$

$$\psi_{k-1,ij}+\frac{\psi_{kij}-\psi_{k-1,ij}}{x_{kij}-x_{k-1,ij}}(x_{ij}-x_{k-1,ij}),\quad S^{(c)}_{k-1,ij}+\frac{S^{(c)}_{kij}-S^{(c)}_{k-1,ij}}{x_{kij}-x_{k-1,ij}}(x_{ij}-x_{k-1,ij}),$$

где $x_{ij}\in\left[x_{k-1,ij},\,x_{kij}\right]$.

Введем обозначения: $\Delta x_{kij}=x_{kij}-x_{k-1,ij}$, $\Delta\varphi_{kij}=\varphi_{kij}-\varphi_{k-1,ij}$,

$$\Delta\psi_{kij}=\psi_{kij}-\psi_{k-1,ij},\quad \Delta S^{(c)}_{kij}=S^{(c)}_{kij}-S^{(c)}_{k-1,ij}$$

и новые переменные $\delta_{kij}=x_{ij}-x_{k-1,ij}$ при $x_{ij}\in\left[x_{k-1,ij},\,x_{kij}\right]$ для всех $i=1,2,\dots,m$; $j=1,2,\dots,n$; $k=1,2,\dots,p_{ij}$.

Предположим, что при $\delta_{k_{ij}ij}>0$ все $\delta_{kij}=\Delta x_{kij}$ для $k=1,2,\dots,k_{ij}-1$. Это условие назовём, для краткости, условием A. Тогда для рассматриваемого случая можно записать

$$x_{k_{ij}-1,ij}=a_{ij}+\sum_{k=1}^{k_{ij}-1}\delta_{kij},\quad i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n.$$

Приведенное выше условие A обеспечивает, что если $0<\delta_{k_{ij}ij}<\Delta x_{k_{ij}ij}$, то $\delta_{kij}=0$, $k>k_{ij}$. Следовательно, если мы потребуем, чтобы при $\delta_{k_{ij}ij}>0$ выполнялось $\delta_{kij}=\Delta x_{kij}$, $k=1,2,\dots,k_{ij}-1$, то можем записать:

$$x_{ij}=\alpha_{ij}+\sum_{k=1}^{p_{ij}}\delta_{kij},\quad i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n. \qquad (7)$$

Тогда δ -задача запишется в таком виде.

Найти минимум

$$q(\delta)=\frac{\ell_1(\delta)}{\ell_2(\delta)}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\varphi_{0ij}+\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{p_{ij}}\left(\frac{\Delta\varphi_{kij}}{\Delta x_{kij}}\right)\delta_{kij}}{\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\psi_{0ij}+\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{p_{ij}}\left(\frac{\Delta\psi_{kij}}{\Delta x_{kij}}\right)\delta_{kij}}. \qquad (8)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_{ij}}\delta_{kij}=a_i-\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij},\quad i=1,2,\dots,m, \qquad (9)$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p_{ij}}\delta_{kij}=b_j-\sum_{i=1}^{m}a_{ij},\quad j=1,2,\dots,n, \qquad (10)$$

$$0\leq\delta_{kij}\leq\Delta x_{kij},\quad i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n;\ k=1,2,\dots,p_{ij} \qquad (11)$$

и при условии A.

Семейство функции (5) записывается в виде семейства гиперплоскостей

$$\ell(\delta, c) = \ell_1(\delta) - c\ell_2(\delta), \quad c \in [c', c''] . \qquad (12)$$

Обозначим через H множество векторов $\delta = (\delta_{111}, \delta_{211}, \dots, \delta_{p_{11}11}, \dots, \delta_{p_{mn}mn})$, удовлетворяющих условию A и неравенствам (II).

Преобразуем задачу (8)-(II) к виду транспортной задачи дробно-линейного программирования (ДЛП). С этой целью введём дополнительные переменные $\xi_{kij} \geqslant 0$ по формулам

$$\delta_{kij} + \xi_{kij} = \Delta x_{kij}, \; i=1,2,\dots,m; \; j=1,2,\dots,n; \; k=1,2,\dots,p_{ij}, \qquad (13)$$

и исключим δ_{kij} из системы ограничений (IO).

Имеем

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p_{ij}} \xi_{kij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p_{ij}} \Delta x_{kij} - b_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \; ; \; j=1,2,\dots,n .$$

Введем обозначения: $a_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = A_i$, $i = 1,2,\dots,m$;

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{p_{ij}} \Delta x_{kij} - b_j + \sum_{i=1}^{m} a_{ij} = A_{m+j}, \; j=1,2,\dots,n .$$

Сведём задачу (8), (9), (II), (I3), (IO) к транспортной таблице I при помощи запрещающих тарифов

	Δx_{k11}	Δx_{k21}	...	Δx_{km1}	...	Δx_{k1n}	Δx_{k2n}	...	Δx_{kmn}
A_1	δ_{k11}	0	...	0	...	δ_{k1n}	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
A_m	0	0	...	δ_{km1}	...	0	0	...	δ_{kmn}
A_{m+1}	ξ_{k11}	ξ_{k21}	...	ξ_{km1}	...	0	0	...	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$
A_{m+n}	0	0	...	0	...	ξ_{k1n}	ξ_{k2n}	...	ξ_{kmn}

где для краткости записи введено:

$$\|\Delta x_{kij}\| = (\Delta x_{1ij}, \Delta x_{2ij}, \ldots, \Delta x_{\rho_{ij} ij}); \quad \|\delta_{kij}\| = (\delta_{1ij}, \delta_{2ij}, \ldots, \delta_{\rho_{ij} ij});$$
$$\|\xi_{kij}\| = (\xi_{1ij}, \xi_{2ij}, \ldots, \xi_{\rho_{ij} ij}); \quad \|0\| = (0, 0, \ldots, 0).$$

Размерность вектор-строки $\|0\|$ определяется размерностью вектор-строки $\|\Delta x_{kij}\|$, ниже которого она располагается.

Заметим, что таблица I состоит из поставок, строки потребления и основной части, которая содержит переменные задачи.

Для перехода от таблицы I к транспортной таблице ДЛП в неё достаточно внести стоимости, которые вносятся по схемам (рис.3, 4,5).

Рис. 3

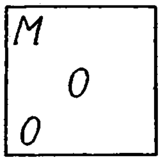

Рис. 4

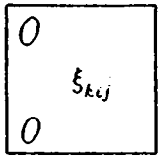

Рис. 5

где запрещающий тариф M – достаточно большое положительное число.

Для упрощения записи введём индексы μ, $\mu = 1, 2, \ldots, m+n$, $\nu = 1, 2, \ldots, N$, где $N = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \rho_{ij}$, μ является номером строки, а ν – номером столбца основной части табл.I. Установим взаимно однозначное соответствие между индексами и индексом ν, характеризующим номер столбца табл. I, которому соответствует поставка Δx_{kij} при помощи формулы

$$\nu = h(k,i,j) = \sum_{l=1}^{j} \sum_{r=1}^{m} \rho_{r\,l-1} + \sum_{r=1}^{i} \rho_{r-1,j+k}, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n; \; k = 1, 2, \ldots, \rho_{ij}, \tag{14}$$

где $\rho_{r0} = \rho_{0l} = 0$.

Тогда очевидно, что индексы μ и ν элементов δ_{kij} и ξ_{kij} определяются по формулам

$$\{\mu = i \quad \nu = h(k, \mu, j)\}, \quad \{\mu = m+j \quad \nu = h(k, i, \mu - m)\},$$

соответственно.

Введём следующие обозначения:

$$C'_{\mu\nu}=\begin{cases} \frac{\Delta\varphi_{kij}}{\Delta x_{kij}}, & \mu=1,2,\dots,m;\ \nu=h(k,i,j),\ i=\mu;\\ & j=1,2,\dots,n;\quad k=1,2,\dots,p_{ij},\\ 0, & \mu=m+1,m+2,\dots,m+n;\ \nu=h(k,i,j);\\ & i=1,2,\dots,m;\ j=\mu-m,\ k=1,2,\dots,p_{ij},\\ M, & \mu=1,2,\dots,m;\ \nu\neq h(k,i,j);\ i=\mu;\\ & k=1,2,\dots,p_{ij};\ \nu=1,2,\dots,\mathcal{N};\ j=1,2,\dots,n,\\ M, & \mu=m+1,m+2,\dots,m+n;\ \nu\neq h(k,i,j),\ j=\mu-m,\\ & i=1,2,\dots,m;\ k=1,2,\dots,p_{ij};\ \nu=1,2,\dots,\mathcal{N}, \end{cases} \tag{I5}$$

$$C''_{\mu\nu}=\begin{cases} \frac{\Delta\psi_{kij}}{\Delta x_{kij}}, & \mu=1,2,\dots,m;\ \nu=h(k,i,j);\ i=\mu;\\ & j=1,2,\dots,n;\ k=1,2,\dots,p_{ij},\\ 0, & \mu=1,2,\dots,m+n;\ \nu\neq h(k,i,j);\ i=\mu;\\ & j=1,2,\dots,n;\ k=1,2,\dots,p_{ij};\ \nu=1,2,\dots,\mathcal{N}, \end{cases} \tag{I6}$$

$$c'_o=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\varphi_{oij},\quad c''_o=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\psi_{oij}, \tag{I7}$$

$$B_\nu=\Delta x_{kij},\ \nu=h(k,i,j),\ i=1,2,\dots,m;\ j=1,2,\dots,n;\ k=1,2,\dots,p_{ij}. \tag{I8}$$

Введем новые переменные $y=\|y_{\mu\nu}\|_{m+n,\mathcal{N}}$**: при** $\mu=1,2,\dots,m;$ $\nu=h(k,i,j),\ i=\mu,\ j=1,2,\dots,n;\ k=1,2,\dots,p_{ij};\ y_{\mu\nu}=\delta_{kij}$, **а при** $\mu=m+1,m+2,\dots,m+n;\ \nu=h(k,i,j),\ i=1,2,\dots,m;$ $j=\mu-m,\ k=1,2,\dots,p_{ij}.\ y_{\mu\nu}=\xi_{kij}$.

С учётом (I5)-(I8) δ **- задачу, которую будем в дальнейшем называть** y **-задачей, можно записать следующим образом.**

Найти минимум

$$Q(y)=\frac{\mathcal{L}_1(y)}{\mathcal{L}_2(y)}=\frac{c'_o+\sum\limits_{\mu=1}^{m+n}\sum\limits_{\nu=1}^{\mathcal{N}}c'_{\mu\nu}y_{\mu\nu}}{c''_o+\sum\limits_{\mu=1}^{m+n}\sum\limits_{\nu=1}^{\mathcal{N}}c'_{\mu\nu}y_{\mu\nu}} \tag{I9}$$

при ограничениях

$$\sum_{\nu=1}^{\mathcal{N}}y_{\mu\nu}=A_\mu,\quad \mu=1,2,\dots,m+n, \tag{20}$$

$$\sum_{\mu=1}^{m+n}y_{\mu\nu}=B_\nu,\quad \nu=1,2,\dots,\mathcal{N}, \tag{21}$$

$$y_{\mu\nu} \geq 0 \quad , \mu = 1, 2, \ldots, m+n \; ; \; \nu = 1, 2, \ldots, N, \qquad (22)$$

и условие A', которое заключается в том, что для совокупности переменных $y_{\mu\nu}$, $\nu = h(k, \mu, j)$, $k = 1, 2, \ldots, \rho_{\mu j}$, имеют место соотношения при $y_{\mu\bar{\nu}} > 0$, а все $y_{\mu\nu} = B_\nu$, $\nu = h(k, \mu, j)$, $k = 1, \ldots, k_{\mu j} - 1$, для любого $\mu = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$ где $\bar{\nu} = h(k_{\mu j}, \mu, j)$.

Очевидно, что условие A' обеспечивает выполнение равенств $y_{\mu\nu} = 0$, $\mu = 1, 2, \ldots, m$; $\nu = h(k, \mu, j)$, $k = k_{\mu j} + 1, k_{\mu j} + 2, \ldots, \rho_{\mu j}$. Кроме того, условие A', ограничения (21) и запрещающие тарифы, в свою очередь, обеспечивают выполнение соотношений при $y_{\mu\bar{\nu}} < B_{\bar{\nu}}$ все $y_{\mu\nu} = 0$, $\nu = h(k, i, \mu - m)$, $k = 1, 2, \ldots, t_{i\mu - m} - 1$, при $y_{\mu\bar{\nu}} > 0$ все $y_{\mu\nu} = B_\nu$, $\nu = h(k, i, \mu - m)$, $k = t_{i\mu - m} + 1, t_{i\mu - m} + 2, \ldots, \rho_{i\mu - m}$, для любого $\mu = m+1, m+2, \ldots, m+n$; $i = 1, 2, \ldots, m$.

4. Метод решения y -задачи

Как следует из построения y -задачи, существенным фактором, отличающим её от транспортной задачи ДЛП, является требование выполнения условия A'. Кроме того, в y -задаче отсутствует предположение о положительности знаменателя функционала, которое, вообще говоря, может и не вытекать из предположения о положительности функции $\psi(x)$ исходной задачи. Тем не менее для решения y -задачи, как будет видно из дальнейшего, достаточно решить задачу (19)-(22).

Обозначим через H' множество значений y, удовлетворяющих условию A'.

Имеет место лемма.

ЛЕММА. Если $f(x) \in V$, то для любого вектора $y \in H'$ имеет место неравенства:

$$\mathcal{L}_2(y) > 0, \qquad (24)$$

$$c' \leq Q(y) \leq c'', \qquad (25)$$

Доказательство. Согласно принятым обозначениям (15)-(16) и условию A', для любого $y \in H'$ существует $\delta \in H$ такой, что $\mathcal{L}_1(y) = \ell_1(\delta)$ и $\mathcal{L}_2(y) = \ell_2(\delta)$. Поэтому для доказательства леммы достаточно показать, что $\ell_2(\delta) > 0$, $c' \leq q(\delta) \leq c''$ при любом $\delta \in H$.

Пусть $\mathcal{E}$ – произвольный вектор множества H. Тогда, в силу определения H, для любой пары индексов (i, j) найдется такой номер k_{ij} , что

$$\delta_{kij} = \begin{cases} \Delta x_{kij}, & k = 1, 2, \ldots, k_{ij} - 1, \\ \theta \Delta x_{kij}, & k = k_{ij}, \\ 0, & k = k_{ij} + 1, k_{ij} + 2, \ldots, p_{ij}, \end{cases}$$

где $0 < \theta \leqslant 1$.

Но тогда

$$\ell_2(\delta) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left\{ \psi_{k_{ij}-1,ij} + \frac{\Delta \psi_{k_{ij}ij}}{\Delta x_{k_{ij}ij}} \delta_{k_{ij}ij} \right\} \quad (26)$$

Рассмотрим задачу минимизации (26) при ограничениях

$$0 \leqslant \delta_{k_{ij}ij} \leqslant \Delta x_{k_{ij}ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, n.$$

Ясно, что минимальное значение $\ell_2(\delta)$ равно

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \psi_{\bar{k}_{ij}ij} \quad \text{, где } \psi_{\bar{k}_{ij}ij} = \min\left\{ \psi_{k_{ij}-1,ij}, \psi_{k_{ij}ij} \right\}.$$

Введем в рассмотрение вектор , компоненты которого зададим по формулам

$$\bar{\delta}_{kij} = \begin{cases} \Delta x_{kij}, & k = 1, 2, \ldots, \bar{k}_{ij}; \; i = 1, 2, \ldots, m \\ 0, & k = \bar{k}_{ij} + 1, k_{ij} + 2, \ldots, p_{ij}; \; j = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Вектор $\bar{\delta} \in H$, и ему соответствует единственный вектор $\bar{x} \in R$, компоненты которого определяются по формуле (7). Для векторов $\bar{\delta} \in H$ и $\bar{x} \in R$ справедливо равенство $\ell_2(\bar{\delta}) = \psi(x)$. Следовательно, $\ell_2(\delta) \geqslant \ell_2(\bar{\delta}) = \psi(\bar{x}) > 0$.

Аналогичным образом при замене функции $\psi(x) > 0$, $x \in R$, функцией $S(x, c') \geqslant 0, x \in R$, получаем $\ell(\delta, c') \geqslant \ell(\bar{\delta}, c') = S(\bar{x}, c') \geqslant 0$. Откуда $q(\delta) \geqslant c'$.

Для получения неравенства $q(\delta) \leqslant c''$ проведем аналогичные рассуждения относительно функции $S(x, c'') \leqslant 0, x \in R$, с заменой требования минимизации на максимизацию.

Т е о р е м а . Если для $f(x) \in V$ соответствующие функции $S_{ij}(x_{ij}, c)$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, выпуклы на множестве R при любом $c \in [c', c'']$ и начальный опорный план удовлетворяет условию A' , то условие A' выполняется также на каждой итерации модифицированного распределительного метода.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Доказательство проведём методом математической индукции. По условию теоремы условие A' выполнено на нулевой итерации, т.е. при $z = 0$.

Предположим теперь, что условие A' выполнено на ($z-1$)-ой итерации, и покажем, что она выполняется также на z -ой итерации модифицированного распределительного метода. Для доказательства этого утверждения осуществим одну итерацию модифицированного распределительного метода. Исходя из опорного плана $y^{(z-1)}$, вычислим значения z'_μ, z''_μ, η'_ν, η''_ν, $\mu = 1,2,\ldots,m+n$, $\nu = 1,2,\ldots N$, и исследуем совокупность оценок $d_{\mu\nu}$, $\mu = 1,\ldots,m+n$, $\nu = h(k,i,j)$, $k = 1,2,\ldots,\rho_{ij}$ для каждой фиксированной пары индексов (i, j) в отдельности.

Согласно $y^{(z-1)} \in H'$ и обозначениям (15), (16) величины η'_ν, η''_ν можно выразить через $c'_{\mu\nu}$, z'_μ и $c''_{\mu\nu}$, z''_μ по формулам

$$\eta'_\nu = \begin{cases} \dfrac{\Delta\varphi_{kij}}{\Delta x_{kij}} - z'_\mu & \text{при } \mu = i,\ \nu = h(k,i,j),\ k = 1,2,\ldots,k_{ij}, \\ -z'_\mu & \text{при } \mu = m+j,\ \nu = h(k,i,j),\ k = k_{ij}+1,\ldots,\rho_{ij}, \end{cases} \tag{27}$$

$$\eta''_\nu = \begin{cases} \dfrac{\Delta\psi_{kij}}{\Delta x_{kij}} - z''_\mu & \text{при } \mu = i,\ \nu = h(k,i,j),\ k = 1,2,\ldots,k_{ij}, \\ -z''_\mu & \text{при } \mu = m+j,\ \nu = h(k,i,j),\ k = k_{ij}+1,\ldots,\rho_{ij}. \end{cases} \tag{28}$$

Произведя непосредственное вычисление $d_{\mu\nu}$ по формуле (6), с учётом (15), (16), (27), (28) получаем, что

$$d_{\mu\nu} = \begin{cases} 0, & \mu = i;\ \nu = h(k,i,j);\ k = 1,2,\ldots,k_{ij}; \\ \mathcal{L}_2 \dfrac{\Delta S_{kij}(Q)}{\Delta x_{kij}} + \mathcal{L}_2(z'_{m+j} - z'_i) - \mathcal{L}_1(z''_{m+j} - z''_i), & \mu = i,\ \nu = h(k,i,j);\ k = k_{ij}+1,\ldots,\rho_{ij}, \\ \mathcal{L}_2 M - \mathcal{L}_2(z'_\mu + \eta'_\nu) + \mathcal{L}_1(z''_\mu + \eta''_\nu), & \mu \neq i,\ \mu \neq m+j,\ \mu = 1,\ldots,m+n,\ \nu = h(k,i,j),\ k = 1,\ldots,\rho_{ij}, \\ -\mathcal{L}_2 \dfrac{\Delta S_{kij}(Q)}{\Delta x_{kij}} + \mathcal{L}_2(z'_i - z'_{m+j}) - \mathcal{L}_1(z''_i - z_{m+j}), & \mu = m+j;\ \nu = h(k,i,j),\ k = 1,\ldots,\bar{k}_{ij}, \\ 0, & \mu = m+j;\ \nu = h(k,i,j),\ k = \bar{k}_{ij}+1,\ldots,\rho_{ij}, \end{cases} \tag{29}$$

где

$$\bar{k}_{ij} = \begin{cases} k_{ij} - 1, & \text{если } y_{m+j,\nu} \neq 0,\ \nu = h(k_{ij},i,j), \\ k_{ij}, & \text{если } y_{m+j,\nu} = 0,\ \nu = h(k_{ij},i,j). \end{cases}$$

Из формул (29) видно, что $d_{\mu\nu}$ могут быть отрицательными только лишь при $\mu=i$, $\nu=h(k,i,j)$, $k=k_{ij}+1,\dots,\rho_{ij}$, и при $\mu=m+j$, $\nu=h(k,i,j)$, $k=1,2,\dots,\bar{k}_{ij}$.

Предположим вначале, что функция $S_{ij}(x_{ij},Q)$ строго выпукла при $a_{ij}\leqslant x_{ij}\leqslant\beta_{ij}$ и любом $Q\in[c',c'']$. В этом случае имеют место неравенства

$$\frac{\Delta S_{kij}(Q)}{\Delta x_{kij}} < \frac{\Delta S_{k+1,ij}(Q)}{\Delta x_{k+1,ij}},\quad k=1,2,\dots,\rho_{ij}-1. \tag{30}$$

Это означает, учитывая (29) и $\mathcal{L}_2(y^{(z-1)})>0$, что $d_{\mu\nu}$ монотонно возрастают с увеличением ν при $\mu=i$, $\nu=h(k,i,j)$, $k=k_{ij}+1,\dots,\rho_{ij}$, и монотонно убывают при $\mu=m+j$, $\nu=h(k,i,j)$, $k=1,2,\dots,\bar{k}_{ij}$. Следовательно, кандидатами на ввод в базисные могут быть лишь переменная $y_{i\nu}$, $\nu=h(k_{ij}+1,i,j)$ либо $y_{m+j,\nu}$, $\nu=h(\bar{k}_{ij},i,j)$. Т.е. план $y^{(z)}$ также будет удовлетворять условию A'.

Перейдем к доказательству теоремы в случае, когда функция $S_{ij}(x_{ij},Q)$ не обязательно строго выпукла. В этом случае, как видно из метода построения y-задачи, посредством вариации точек деления, всегда можно добиться выполнения неравенств (30), при некотором фиксированном значении $Q\in(c',c'')$. Покажем, что в этом случае неравенства (30) имеют место при любом $c\in(c',c'')$. Действительно, предположим противное, т.е. существует такое значение $\bar{c}, c'<\bar{c}<c''$, что равенство $\frac{\Delta S_{kij}(\bar{c})}{\Delta x_{kij}} = \frac{\Delta S_{k+1,ij}(\bar{c})}{\Delta x_{k+1,ij}}$ имеет место хотя бы для одного значения k , $1\leqslant k\leqslant\rho_{ij}-1$. Но тогда, исходя из предположения о выпуклости функции $S_{ij}(x_{ij},Q)$, получаем неравенство

$$(\bar{c}-c)\times\left(\frac{\Delta\psi_{kij}}{\Delta x_{kij}} - \frac{\Delta\psi_{k+1,ij}}{\Delta x_{k+1,ij}}\right) < 0$$

для любого $c\in(c',c'')$, что невозможно.

Таким образом, теорема доказана полностью.

Согласно доказанной теореме, для решения y-задачи достаточно построить начальный опорный план задачи (19)-(22), удовлетворяющий условию A', а затем постепенно улучшать его модифицированным распределительным методом. В связи с этим возникает вопрос о построении начального опорного плана y-задачи. Ясно, что приведенные выше методы, неприемлемы непосредственно для y-задачи.

Рассмотрим следующий метод построения начального опорного плана. Сущность предлагаемого метода заключается в том, что для первых m строк производится поочередное распределение поставок A_μ, $\mu = 1,2,\dots,m$, для каждой отдельно взятой строки. Для осуществления распределения в строке, скажем, при $\mu = \mu_1$, $1 < \mu_1 < m$, выделим столбцы с индексами $\nu = h(\sigma^{(0)}_{\mu_1 j}, \mu_1, j)$, $j \in \mathcal{J}^{(0)}$, где $\sigma^{(0)}_{\mu_1 j} = 1$, $j = 1,2,\dots,m$, $\mathcal{J}^{(0)} = \{1,2,\dots,n\}$, и среди отношений $\frac{c'_{\mu_1\nu}}{c''_{\mu_1\nu}}$, $\nu = h(\sigma^{(0)}_{\mu_1 j}, \mu_1, j)$, $j \in \mathcal{J}^{(0)}$, находим наименьшее. Пусть, для определенности, минимум отношений достигается при $j = j_1$. В соответствующую клетку заносим поставку. Если при этом объём поставки A_{μ_1} еще не полностью распределен, то выделим новую совокупность столбцов с индексами $\nu = h(\sigma^{(0)}_{\mu_1 j}, \mu_1, j)$, $j \in \mathcal{J}^{(1)}$, где

$$\sigma^{(1)}_{\mu_1 j} = \begin{cases} \sigma^{(0)}_{\mu_1 j}, & j \neq j_1,\ j \in \mathcal{J}^{(0)}, \\ \sigma^{(0)}_{\mu_1 j} + 1, & j = j_1, \end{cases}$$

$$\mathcal{J}^{1} = \begin{cases} \mathcal{J}^{(0)}, & \text{если} \quad \sigma^{(0)}_{\mu_1 j_1} < \rho_{\mu_1 j_1}, \\ \mathcal{J}^{(1)} / \{\mathcal{J}_1\}, & \text{если} \quad \sigma^{(0)}_{\mu_1 j_1} = \rho_{\mu_1 j_1}, \end{cases}$$

и снова находим наименьшее отношение $\frac{c'_{\mu_1\nu}}{c''_{\mu_1\nu}}$, $\nu = h(\sigma^{(1)}_{\mu_1 j}, \mu_1, j)$, $j \in \mathcal{J}^{(1)}$, и в соответствующую клетку заносим поставку. Если имеются два равных отношения, то можно взять любое из них. Этот процесс продолжаем до тех пор, пока не будет распределён весь объём поставки. После этого переходим к распределению в последующей строке.

Распределение поставок в строках с индексами $\mu = m+1, m+2, \dots, m+n$ осуществляем по формулам

$$y_{\mu\nu} = \begin{cases} B_\nu - y_{i\nu}, & \nu = h(k, i, \mu - m),\ i = 1,2,\dots,m,\ k = 1,2,\dots,\rho_{i\,\mu-m}, \\ 0, & \nu \neq h(k, i, \mu - m),\ i = 1,2,\dots,m,\ k = 1,2,\dots,\rho_{i\,\mu-m},\ \nu = 1,\dots,N. \end{cases}$$

Как вытекает из постановки y-задачи, размеры получаемой транспортной задачи ДЛП в общем случае будут довольно внушительными. Однако в практических примерах часто возникают случаи, когда нелинейными функциями являются стоимости либо в отдельных клетках, либо в одном, либо в нескольких столбцах транспортной таблицы. В таких случаях размеры y-задачи значительно уменьшаются. Так, например, в случае, когда все функции линейные, за исключением, может быть, функции $\varphi_{i_1 j_1}$ и $\psi_{i_1 j_1}$, число столбцов исходной матрицы увеличится на $\rho_{i_1 j_1}-1$, а число строк увеличится на единицу. В случае, когда все функции $\varphi_{i j_1}$ и $\psi_{i j_1}$, j_1-го столбца нелинейные, число столбцов увеличится на $\sum_{i=1}^{m}\rho_{i j_1}-1$, а число строк увеличится на единицу. Это обстоятельство, как следует из вышесказанного, позволяет в ряде практических задач уменьшить существенным образом размеры y-задачи.

5. Экономическое приложение

В качестве приложения рассмотрим задачу оптимального распределения свёклы между сахарными заводами по критерию минимума затрат на производство единицы продукции (сахара).

Задача заключается в том, чтобы свёклу, выращиваемую n свеклосеющими хозяйствами, оптимальным образом распределить между m сахарными заводами, т.е. найти такие объёмы загрузок сахарных заводов и такую схему закрепления свёклосеющих хозяйств за сахарными заводами, чтобы минимизировать затраты на производство единицы продукции.

Причём считаем, что рассматриваемая система из m сахарных заводов и n свёклосеющих хозяйств является изолированной, т.е. не осуществляется доставка свёклы из какого-либо постороннего источника и не вывозится за пределы данного экономического района. Предполагаемая задача рассматривается на примере Чуйской зоны свёклосеяния Киргизской ССР.

Кроме того, предполагаем известными начало свёклопереработки и график уборки свёклы.

Для формализации задачи введём обозначения:

i - номер сахарного завода $(i=1,2,\dots,m)$;

j - номер свёклосеющего хозяйства $(j=1,2,\dots,n)$;

x_i - объём загрузки i-го завода;

x_{ij} - количество единиц веса свёклы, перевозимой из j-го хозяйства на i-й завод;

$z_i(t)$- запасы свёклы i-го завода на время t;

t_i - время окончания работы на i-ом заводе;

B_j – количество единиц веса свёклы, поставляемое j-ым хозяйством;

$R_i(t)$ – максимальная мощность по переработке свёклы i-м заводом на время t;

$m_i(t)$ – доля выхода патоки от веса перерабатываемой свёклы на i-ом заводе;

$\ell_i(t)$ – доля выхода жома от веса перерабатываемой свёклы на i-ом заводе;

$b(t)$ – потеря сахара единицей веса свёклы при её хранении за единицу времени;

$c_i(t)$ – потеря сахара при переработке единицы веса свёклы на i-ом заводе;

ε – доля хранимой свёклы, которая теряется в результате усушки, гнили, внутризаводской транспортировки и т.п. за единицу времени хранения;

$\overline{\psi}_0$ – суммарное содержание сахара в свёкле в момент её выкопки;

$\overline{\varphi}_0$ – суммарные затраты на приобретение суммарного урожая свёклы по совокупности всех заводов;

c_{ij} – затраты на доставку единицы веса свёклы с j-го хозяйства на i-ый завод (с учетом приёмки, погрузки, разгрузки и обратной транспортировки жома);

$z_i(t)$ – суммарные внутризаводские расходы в единицу времени;

c_1 – стоимость единицы веса патоки;

c_2 – стоимость единицы веса жома;

t_0 – начало кампании свёклоуборки;

t' – начало массовой копки свёклы;

t'' – конец уборки.

В соответствии с принятыми обозначениями, задача оптимального распределения свёклы по критерию минимума удельных затрат запишется следующим образом.

Найти минимум

$$f=\frac{\varphi}{\psi}=\frac{\overline{\varphi}_0+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}+\sum_{i=1}^{m}\int_{t_0}^{t_i}z_i(t)R_i(t)dt-c_1\sum_{i=1}^{m}\int_{t_0}^{t_i}m_i(t)R_i(t)dt-0{,}3c_2\sum_{i=1}^{m}\int_{t_0}^{t_i}\ell_i(t)R_i(t)dt}{\overline{\psi}_0-\sum_{i=1}^{m}\int_{t'}^{t_i}b(t)z_i(t)dt-\sum_{i=1}^{m}\int_{t_0}^{t_i}c_i(t)R_i(t)dt} \qquad (31)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = B_j\ , \quad j=1,2,\dots,n, \tag{32}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = X_i\ , \quad i=1,2,\dots,m, \tag{33}$$

$$\frac{dz_i(t)}{dt} = \begin{cases} -\varepsilon z_i(t) + \mathcal{N}_i - R_i(t), & t \in [t', t''] \\ -\varepsilon z_i(t) - R_i(t), & t \in [t', t''] \end{cases} \quad i=1,2,\dots,m, \tag{34}$$

$$z_i(t_i) = 0\ , \quad i=1,2,\dots,m, \tag{35}$$

$$X_i = \int_{t_0}^{t'} R_i(t)dt + (t''-t')\mathcal{N}_i\ , \quad i=1,2,\dots,m, \tag{36}$$

$$X_i \geqslant 0\ , \quad x_{ij} \geqslant 0\ , \quad z_i(t) \geqslant 0\ , \quad i=1,2,\dots,m\ , \ j=1,2,\dots,n, \tag{37}$$

где $\mathcal{N}_i$ -искомая мощность по перевозке свёклы на i -й завод в период массовой копки свёклы, которая является постоянной на всем рассматриваемом периоде времени $[t', t'']$, а $\sum_{i=1}^{m} \mathcal{N}_i$ - известная величина (см. 6);

$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$ - транспортные расходы;

$\sum_{i=1}^{m}\int_{t_0}^{t_i} z_i(t)R_i(t)\,dt$ - суммарные расходы на переработку всей свёкловичной массы;

$c_1\sum_{i=1}^{m}\int_{t_0}^{t_i} m_i(t)R_i(t)\,dt$ - суммарные доходы, получаемые в результате реализации произведенной патоки;

$0{,}3\, c_2\sum_{i=1}^{m}\int_{t_0}^{t_i} \ell_i(t)R_i(t)\,dt$ - суммарные доходы при реализации жома.

Как известно, согласно действующим контрактационным договорам, завод оставляет себе жом в размере 0,3 веса переработанной свёклы , 0,5 жома от веса сданной свёклы бесплатно отдаёт колхозам , 0,2 веса свёклы идут на сахар, патоку и др.;

$\sum_{i=1}^{m}\int_{t'}^{t_i} b(t)z_i(t)\,dt$ - суммарные потери сахара в результате хранения свёклы;

$\sum_{i=1}^{m} \int_{t_0}^{t_i} c_i(t) R_i(t)\,dt$ – суммарные потери сахара в процессе переработки всей свекловичной массы.

Ограничения (32) являются математической записью требования о вывозке всей свёклы из каждого хозяйства. Уравнения (34),(35) описывают закономерность изменения запасов на каждом отдельном заводе.

Уравнения (33) и (36) связывают количество привезенной свёклы, загрузку заводов, время работы i-го завода и известную мощность, а ограничения (37) указывают на отсутствие обратных перевозок, отрицательных запасов и объёмов.

Рассмотрим вопрос об упрощении задачи (31)-(37).

С этой целью решим систему дифференциальных уравнений (34) при условии (35) и $z_i(t')=0$, $i=1,2,\dots,m$. Имеем

$$z_i(t)=\begin{cases}\int_{t'}^{t} e^{\varepsilon(\tau-t)}\left[\mathcal{N}_i-R_i(\tau)\right]d\tau, & t\in\left[t',t''\right],\\ \int_{t}^{t_i} e^{\varepsilon(\tau-t)} R_i(\tau)\,d\tau, & t\in\left[t'',t_i\right].\end{cases} \quad i=1,2,\dots,m, \tag{38}$$

Функция $z_i(t)$ непрерывная, следовательно,

$$\int_{t'}^{t''} e^{\varepsilon(\tau-t'')}\left[\mathcal{N}_i-R_i(t)\right]d\tau=\int_{t''}^{t_i} e^{\varepsilon(\tau-t'')} R_i(\tau)\,d\tau$$

Откуда

$$\mathcal{N}_i=\frac{\int_{t'}^{t_i} e^{\varepsilon(\tau-t'')} R_i(\tau)\,d\tau}{\int_{t'}^{t''} e^{\varepsilon(\tau-t'')}\,d\tau}, \qquad i=1,2,\dots,m.$$

Подставляя $\mathcal{N}_i$ в (36) и введя обозначение

$$\gamma=\frac{t''-t'}{\int_{t'}^{t''} e^{\varepsilon(\tau-t'')}\,d\tau}, \qquad X_i^0=\int_{t_0}^{t'} R_i(t)\,dt-\int_{t'}^{t''}\gamma e^{\varepsilon(\tau-t'')} R_i(\tau)\,d\tau,$$

получаем, что

$$X_i=X_i^0+\int_{t''}^{t_i} e^{\varepsilon(\tau-t'')} R_i(\tau)\,d\tau, \qquad i=1,2,\dots,m. \tag{39}$$

Из (38) видно, что при любом значении t $z_i(t) \geq 0$, $i=1,2,\dots,m$. Это обстоятельство позволяет исключить $z_i(t)$ из функционала (31). Для этого подставим в $\int_{t'}^{t_i} b(t) z_i(t)dt$ значения $z_i(t)$, определённые по формулам (38).

Имеем

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{t'}^{t_i} b(t) z_i(t)dt = \sum_{i=1}^{m} \left\{ \int_{t'}^{t''} b(t) \int_{t'}^{t} e^{\varepsilon(\tau-t)} \left[N_i - R_i(\tau) \right] d\tau dt - \right.$$

$$\left. - \int_{t''}^{t_i} R_i(\tau) \int_{t''}^{\tau} e^{\varepsilon(\tau-t)} b(t) dt d\tau \right\}.$$

Или, учитывая, что согласно графику уборки $\sum_{i=1}^{m} N_i$ — известная постоянная, получаем окончательно после изменения записи τ на t, и наоборот, что

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{t_0}^{t_i} b(t) z_i(t)dt = \overline{\varphi}_1 + \sum_{i=1}^{m} \int_{t''}^{t_i} R_i(t) \int_{t''}^{t} e^{\varepsilon(t-\tau)} b(\tau) d\tau dt,$$

где

$$\overline{\varphi}_1 = \sum_{i=1}^{m} N_i \int_{t'}^{t''} \int_{t'}^{t} e^{\varepsilon(\tau-t)} b(t) d\tau dt - \sum_{i=1}^{m} \int_{t'}^{t''} b(t) \int_{t'}^{t} e^{\varepsilon(\tau-t)} R_i(\tau) d\tau dt.$$

Таким образом, задачу оптимального распределения свёклы между сахарными заводами можно записать в виде.

Найти минимум

$$f = \frac{\varphi}{\psi} = \frac{\overline{\varphi}_0 + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_0}^{t_i} ((z_i(t) - c_1 m_i(t) - 0{,}5 c_2 \ell_i(t)) R_i(t) dt}{\overline{\psi}_0 - \overline{\psi}_1 - \sum_{i=1}^{m} \left\{ \int_{t''}^{t_i} R_i(t) \int_{t''}^{t} e^{\varepsilon(t-\tau)} b(\tau) d\tau dt + \int_{t_0}^{t_i} c_i(t) R_i(t) dt \right.} \qquad (40)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = B_j, \quad j=1,2,\dots,n, \qquad (41)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = X_i, \quad i=1,2,\dots,m, \qquad (42)$$

$$X_i \geq 0, \quad x_{ij} \geq 0, \quad i=1,2,\dots,m, \; j=1,2,\dots,n, \qquad (43)$$

и уравнении связи между переменными X_i и t_i

$$X_i = X_i^0 + \int_{t^0}^{t_i} \gamma e^{\varepsilon(\tau - t^0)} R_i(\tau)d\tau\ ,\quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{44}$$

Полученная задача (40)-(44) может быть приведена к дробному аналогу задачи Хичкока-Купманса. Действительно, из (44) видно, что X_i является непрерывной функцией переменной t_i, т.е. $X_i = X_i(t_i)$. Следовательно, существует непрерывная обратная функция $t_i = t_i(X_i)$.

Подставляя $t_i = t_i(X_i)$ в (40) и введя обозначения:

$$\varphi_i(X_i) = \int_{t^0}^{t_i(X_i)} (r_i(t) - c_1 m_i(t) - 0{,}3c_2 \ell_i(t)) R_i(t)dt\ ,\quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\varphi_0 = \overline{\varphi}_0 + \sum_{i=1}^{m} \int_{t_0}^{t''} (r_i(t) - c_1 m_i(t) - 0{,}3 c_2 \ell_i(t)) R_i(t)dt,$$

$$\psi_i(X_i) = -\int_{t^0}^{t_i(X_i)} R_i(t)\left[c_i(t) - \int_{t^0}^{t} e^{\varepsilon(t-\tau)} b(\tau)d\tau\right]dt\ ,\quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

$$\psi_0 = \overline{\psi}_0 - \overline{\overline{\psi}}_0 - \sum_{i=1}^{m} \int_{t}^{t''} c_i(t)R_i(t)dt\ ,$$

получаем, что

$$f = \frac{\varphi}{\psi} = \frac{\varphi_0 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\varphi_i(X_i)}{\psi_0 + \sum_{i=1}^{m}\psi_i(X_i)}\ . \tag{40}$$

Далее, учитывая, что X_i – ограниченная величина, подстановкой пункта I её можно свести к задаче (I)-(4).

Для того, чтобы применить вышеизложенный метод, достаточно показать, что получаемая задача является одноэкстремальной, или что функции $S_{ij}(x_{ij}, c)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, выпуклы при $c \geq 0$ (положительность функционала f вытекает из экономического содержания задачи) и $x_{ij} \geq 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Согласно принятым обозначениям, функции $S_{ij}(x_{ij}, c)$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, линейны относительно переменной x_{ij}. Следовательно, доказательству подлежит только выпуклость функции $S_{in+1}(x_{in+1}, c)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, при $c \geq 0$ и $0 \leq x_{in+1} \leq A_i$.

Покажем, что если $r_i(t) - c_1 m_i(t) - 0{,}3c_2\ell_i(t)$, $c_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, m$

-непрерывные монотонно неубывающие функции, а функции $b(t)$, $R_i(t)$, $i=1,2,\ldots,m$, положительны при любом $t \geq t''$, то функция $S_{in+1}(x_{in+1},c)$ выпукла при любом положительном значении c и $x_{in+1} \geq 0$ для каждого i, $i=1,2,\ldots,m$. Доказательство приведём для $\varepsilon=0$. В соответствии с принятыми обозначениями

$$S_{in+1}(x_{in+1},c) = \int_{t''}^{t_i} (z_i(t)-c_1 m_i(t)-0{,}5c_2\ell_i(t))R_i(t)\,dt +$$

$$+ c\int_{t''}^{t_i} R_i(t)\left[c_i(t)+\int_{t''}^{t} b(\tau)d\tau\right]dt, \quad i=1,2,\ldots,m,$$

где

$$x_{in+1} = A_i - X_i^0 - \int_{t''}^{t_i} R_i(\tau)d\tau, \quad i=1,2,\ldots,m.$$

Найдём вторые производные неявной функции $S_{in+1}(x_{in+1},c)$ по x_{in+1}. Имеем

$$\frac{d^2 S_{in+1}(x_{in+1},c)}{dx_{in+1}^2} = (z_i(t_i)-c_1 m_i(t_i)-0{,}5c_2\ell_i(t_i))' + c(c_i(t_i)+\int_{t''}^{t_i} b(\tau)d\tau)',$$

откуда, в силу предположений, сделанных относительно функции $z_i(t)-c_1 m_i(t)-0{,}5c_2\ell_i(t)$, $c_i(t)$, $b(t)$, $R_i(t)$, $i=1,2,\ldots,m$, $\dfrac{d^2 S_{in+1}(x_{in+1},c)}{dx_{in+1}^2} \geq 0$, $i=1,2,\ldots,m$.

Следовательно, функции $S_{in+1}(x_{in+1},c)$, $i=1,2,\ldots,m$, выпуклы при любом $c \geq 0$ и $0 \leq x_{in+1} \leq A_i$ при $\varepsilon=0$. Это означает, в силу их непрерывности относительно параметра ε, что они будут также выпуклыми при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Таким образом, к задаче (40)-(44), при достаточно малом $\varepsilon > 0$ применим предлагаемый метод решения. Специфика задачи (40)-(44) заключается лишь в том, что функции $\varphi_{in+1}(x_{in+1})$, $\psi_{in+1}(x_{in+1})$ заданы в неявном виде. Поэтому для построения δ-задачи необходимо задать априорно максимально допустимое время T_i, $i=1,2,\ldots,m$, окончания кампании по переработке свёклы, и разбивать не на частичные сегменты $[0, A_i]$, $i=1,2,\ldots,m$, а на сегменты $[t'', T_i]$. Задав точки разбиения t_{ki}, $i=1,2,\ldots,m$, $k=0,1,\ldots,\rho_{ij}$, точки разбиения x_{kin+1}, $i=1,2,\ldots,m$, $k=0,1,\ldots,\rho_{in+1}$, определим по формуле

$$x_{kin+1} = A_i - X_i^0 - \int_{t''}^{t_{ki}} e^{\varepsilon(\tau-t_k)}R_i(\tau)d\tau, \quad i=1,2,\ldots,m, \quad k=0,1,\ldots,\rho_{in+1}.$$

Литература

1. Ю.П.Чернов, Э.Г.Ланге. О некоторых одноэкстремальных задачах дробного программирования. В сб."Математические методы моделирования экономических задач". Новосибирск, 1969, 201–211.

2. А.П.Шварцман. Об одном алгоритме дробно-линейного программирования. "Экономика и математические методы". 1965, т.1, вып. 4.

3. Е.П.Нестеров. Транспортные задачи линейного программирования. Трансжелдориздат. М., 1962.

4. G.B.Dantzig. Recent Advancesin Linear Programming, Manag. Sci., 2 (1956), 131–144.

5. Дж.Хедли. Нелинейное и динамическое программирование. М., "Мир", 1967.

6. Ю.П.Чернов, И.Д.Степаненко. Экономико-математическая модель комплексного графика уборки, переработки и хранения сахарной свёклы в Киргизской ССР. В"материалах к I Всесоюзной конференции по применению экономико-математических методов и ЭВМ в отраслевом планировании и управлении. Секция № 1." М., 1966.

Поступила в редакцию
12.XII. 1968 г.

Редактор В.И. Кобкова

Подписано к печати 13/X-1970 г. МН 01704
Формат бумаги 60х84 1/16. Объем 8,25 п.л., 8 уч.-изд.л.
Заказ 221. Тираж 800 экз. Цена 56 коп.

Отпечатано в Институте математики СО АН СССР, Новосибирск, 90.