УДК 512.25/26 + 519.3:330.115

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ПАРАМЕТРИЧЕСКОГО ДРОБНО-ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Ю.П. Чернов

1. Рассмотрим общую задачу параметрического дробно-линейного программирования, в которой коэффициенты дробно-линейного функционала и составляющих векторов условий и вектора ограничений зависят от одного параметра.

Требуется для каждого параметра t из некоторого множества T определить вектор x_t, обращающий в минимум дробно-линейный функционал

$$Q(x,t)=\frac{\mathcal{L}_1(x,t)}{\mathcal{L}_2(x,t)}=\frac{\sum_{j=1}^{n}(c_j+tc'_j)x_j+c+tc'}{\sum_{j=1}^{n}(\ell_j+t\ell'_j)x_j+\ell+t\ell'} \tag{1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i+tb'_i,\quad i=1,2,\dots,m; \tag{2}$$

$$x_j\geq 0,\quad j=1,2,\dots,n. \tag{3}$$

Будем рассматривать такие задачи (1)-(3), у которых при любом t из рассматриваемого множества знаменатель функционала (1) не обращается в нуль на многограннике условий G_t, заданном ограничениями (2)-(3). Для определенности будем считать знаменатель положительным, относя в противном случае знак минус к числителю функционала: $\mathcal{L}_2(x,t)>0$, $x\in G_t$.

Следовательно, при любом $t \in T$ и $x_0 \in G_t$ имеем:

$$\mathcal{L}_2(x_0, t) \geq \inf_{x \in G_t} \mathcal{L}_2(x, t) = M \geq 0 . \qquad (4)$$

Можно рассматривать как задачи, у которых многогранник условий G_t задаётся ограничениями (2)-(3) и на G_t дополнительно выполняется условие (4), так и задачи, у которых многогранник G_t непосредственно задаётся ограничениями (2), (3) и (4). При фиксированном значении t задача (I)-(4) является одноэкстремальной задачей дробно-линейного программирования (ДЛП), рассмотренной в [I], [2].

Рассмотрим некоторые простейшие частные случаи задачи (I)-(4), где для простоты будем считать многогранник решений G_t ограниченным.

Пусть параметр входит только в числитель функционала, тогда задачу (I)-(4) можно записать в следующем виде.

Требуется для каждого значения $\lambda \in [\alpha, \beta]$ определить вектор x_λ, обращающий в минимум дробно-линейный функционал

$$Q(x, \lambda) = \frac{\mathcal{L}_1(x, \lambda)}{\mathcal{L}_2(x)} = \frac{\sum_{j=1}^{n} (c_j + \lambda c'_j) x_j + c + \lambda c'}{\sum_{j=1}^{n} \ell_j x_j + \ell} \qquad (5)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i , \quad i = 1, 2, \ldots, m , \qquad (6)$$

$$x_j \geq 0 , \qquad (7)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \ell_j x_j + \ell \geq M > 0 , \qquad (8)$$

где M - нижняя граница $\mathcal{L}_2(x)$ на многограннике G, заданном ограничениями (6), (7).

2. Рассмотрим геометрическую интерпретацию задачи (5)-(8) на плоскости $x_1 O x_2$, когда ограничения (6) имеют вид неравенств

$$\sum_{j=1}^{2} a_{ij} x_j \leq b_i , \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

Пусть многограннику G соответствует на рис.I. многоугольник $ABDEF$, а уравнению $\mathcal{L}_2(x) = 0$ -прямая линия KH

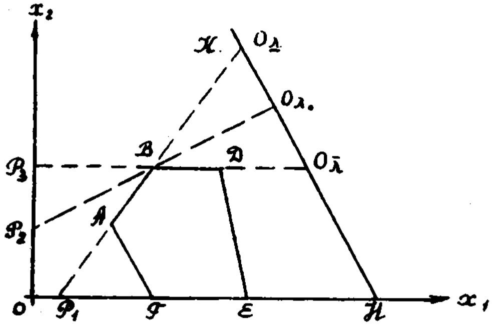

Рис. I.

Рассмотрим фиксированное значение $\lambda_0 \in [\alpha, \beta]$. Этому значению λ_0 соответствует числитель функционала (I) $\mathcal{L}_1(x, \lambda_0)$. Обозначим через O_{λ_0} точку пересечения прямых линий, которые соответствуют линейным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} \mathcal{L}_1(x, \lambda_0) = 0 \\ \mathcal{L}_2(x) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Если эти линии не являются параллельными, то определитель системы (9) отличен от нуля и система (9) имеет единственное решение, дающее координаты точки O_{λ_0}.

Нетрудно доказать, что в случае равенства нулю определителя системы (9) соответствующая задача (5)-(8) вырождается в задачу линейного программирования.

Рассмотрим однопараметрическое семейство прямых линий, отвечающих различным значениям Q функционала (5). Уравнения этих линий имеют вид

$$\mathcal{L}_1(x, \lambda_0) - Q\mathcal{L}_2(x) = 0 \qquad (10)$$

Очевидно, что все прямые линии семейства (10) проходят через точку O_{λ_0}. Нетрудно показать, что при монотонном увеличении параметра Q угловой коэффициент K семейства прямых линий (10) монотонно увеличивается или монотонно уменьшается, т.е. семейство прямых линий (10) монотонно вращается против или по часовой стрелке вокруг точки O_{λ_0}. Действительно, для углового коэффициента прямой (10) имеем формулу

$$K = \frac{Q\ell_1 - c'_1 - \lambda_0 c''_1}{Q\ell_2 - c'_2 - \lambda_0 c''_2}$$

Так как $\frac{\partial K}{\partial Q}$ является знакопостоянной функцией от Q, то это доказывает наше утверждение.

Следовательно, экстремальные значения функционала $Q(x, \lambda_0)$ достигаются в тех вершинах многоугольника $ABDEF$, в которых касаются прямые семейства (10) при вращении вокруг точки O_λ.

Пусть оптимальному плану задачи (5)-(8) при $\lambda = \lambda_0$ отвечает вершина B, а оптимальному значению дробно-линейного функционала - прямая $P_2 O_{\lambda_0}$. Будем постепенно изменять значение параметра λ. Точка вращения O_λ будет передвигаться по прямой $\mathcal{K}\mathcal{H}$, причем нетрудно показать, что при монотонном изменении λ координаты точки O_λ также монотонно изменяются, т.е. при монотонном увеличении λ точка O_λ будет монотонно двигаться по прямой $\mathcal{K}\mathcal{H}$ в одном направлении. Действительно, если решить систему уравнений (9) при $\lambda_0 = \lambda$ и вычислить частные производные по λ от координат точки O_λ, то получим, что эти частные производные являются знакопостоянными функциями параметра λ.

При небольшом изменении λ прямая, соответствующая оптимальному значению дробно-линейного функционала, будет поворачиваться вокруг точки B. Однако до тех пор пока $\lambda \in [\underline{\lambda}\ \bar{\lambda}]$, вершина B будет неизменно отвечать оптимальному плану x_{λ_0}.

При значении $\lambda = \underline{\lambda}$ $(\lambda = \bar{\lambda})$ прямая $O_\lambda P_1$ $(O_{\bar{\lambda}}, P_3)$, соответствующая оптимальному значению функционала, будет захватывать стороны AB (BD) многоугольника $ABDEF$.

Соответствующая задача ДЛП имеет не единственное решение. Сторона AB (или BD) многоугольника является образом множества оптимальных планов задачи. Последующее сколь угодно малое изменение λ определит задачу ДЛП с новым оптимальным планом. Образ нового решения - вершина A (или D). Дальнейшее изменение λ в определенном диапазоне оставит оптимальный план неизменным. Продолжая описанный процесс, можно разбить заданный диапазон изменения λ на конечное число частей, каждая из которых соответствует некоторому семейству дробно-линейных функционалов, достигающих своего наименьшего значения в одной и той же точке области определения задачи.

Заметим, что семейство гиперплоскостей (10), отвечающих параметру $\lambda = \lambda_0$ и различным значениям Q функционала, вращается вокруг $n-2$ мерной оси, являющейся пересечением гиперплоскостей, отвечающих уравнениям $\mathcal{L}_1(x, \lambda_0) = 0$ и $\mathcal{L}_2(x) = 0$.

Пусть вершина $\mathcal{B}$ многогранного множества условий отвечает оптимуму дробно-линейного функционала, геометрическим образом которого является гиперплоскость N.

При изменении λ гиперплоскость N поворачивается вокруг точки $\mathcal{B}$, и при некотором значении $\bar{\lambda}$ параметра λ гиперплоскость N может захватить ребро многогранного множества (например, ребро $\mathcal{B}\mathcal{D}$). Оптимум дробно-линейного функционала достигается в каждой точке ребра $\mathcal{B}\mathcal{D}$. При дальнейшем изменении λ можно определить интервал, все точки которого отвечают одному и тому же решению, геометрическим образом которого является точка $\mathcal{D}$, соседняя по отношению к $\mathcal{B}$. Такое положение мы всегда наблюдаем в двумерном случае. Однако в процессе решения многомерной задачи могут возникнуть и другие ситуации. В частности, может оказаться, что при $\lambda = \bar{\lambda}$ гиперплоскость, отвечающая оптимуму дробно-линейного функционала, захватит грань многогранного множества условий, размерность которой больше единицы.

В этом случае дальнейшее изменение λ не обязательно приведет в соседнюю с точкой $\mathcal{B}$ вершину $\mathcal{D}$ многогранного множества. Две вершины многогранного множества, отвечающие решениям задачи для двух соседних интервалов изменения параметра таким образом, вовсе не обязаны быть соседними.

В случае, когда коэффициенты числителя функционала (5) зависят от параметра λ линейно, незначительная модификация симплекс-метода решения задачи ДЛП (см. [1], [2]) позволяет с помощью конечного числа итераций последовательно построить оптимальные планы для всего диапазона изменения параметра λ и выделить область, если такая окажется, где задача неразрешима вследствие неограниченности её функционала. Вышеизложенной геометрической интерпретации двумерной задачи параметрического дробно-линейного программирования нетрудно сопоставить графический метод решения. Приведём аналитический метод решения задачи (5)-(7) при помощи симплекс-метода.

3. Рассмотрим задачу (5)-(7) при фиксированном значении λ и выполнении условия (8). Эта задача является задачей ДЛП, рассмотренной в [1], [2]. Оптимальным решением этой задачи является одна из вершин многогранника решений, для нахождения которой применим симплекс-метод с особым признаком оптимальности.

Признак оптимальности задачи ДЛП. Опорный план x является решением задачи ДЛП (5)-(7), (8) (при фиксировании λ), если $d_j(\lambda) \leq 0$ для $j=1,2,\dots,n$, где введены обозначения

$$d_j(\lambda) = \Delta_{j_1}(\lambda) - Q(x,\lambda)\Delta_{j_2} = \begin{vmatrix} \Delta_{j_1}(\lambda) & Q(x,\lambda) \\ \Delta_{j_2} & 1 \end{vmatrix}, \qquad (9)$$

$$\Delta_{j_1}(\lambda) = Z_{j_1}(\lambda) - c_j(\lambda), \quad \Delta_{j_2} = Z_{j_2} - \ell_j, \qquad (10)$$

$$Z_{j_1}(\lambda) = \sum_{s=1}^{m} c_{i_s}(\lambda) x_{i_s j}, \quad Z_{j_2} = \sum_{s=1}^{m} \ell_{i_s} x_{i_s j}, \qquad (11)$$

$$c_j(\lambda) = c_j' + \lambda c_j'', \qquad (12)$$

а $x_{i_s j}$ - компоненты разложения векторов условий A_j по базисным векторам A_{i_s}, $j=1,2,\dots,n$, $s=1,2,\dots,m$.

В дальнейшем будем в некоторых случаях опускать индекс s ($s=1,2,\dots,m$) при индексе i, имея в виду, что $i \in \mathcal{J}_x$, где множество индексов $\mathcal{J}_x = \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$ является подмножеством множества индексов $\mathcal{J} = \{1,2,\dots,n\}$, соответствующим базисным переменным $x_{i0} > 0$, $i \in \mathcal{J}_x$.

Пусть при $j=k$ $d_k > 0$. Это значит план x не оптимальный. Приведем одну итерацию симплекс-метода и перейдем к другому плану x. Для этого вычислим

$$\theta_0 = \min_{x_{ik}>0} \frac{x_{i0}}{x_{ik}} = \frac{x_{r0}}{x_{rk}}, \quad x_{rk} > 0; \qquad (13)$$

r - это номер базисного вектора A_r, при котором достигается минимум отношения (13). Базисные переменные при переходе от плана x к плану x^* связаны следующими соотношениями:

$$x_{i0}^* = \begin{cases} x_{i0} - \theta_0 x_{ik}, & i \neq r \\ \theta_0, & i = r \end{cases} \qquad (14)$$

Вычисления при переходе от итерации к итерации удобно проводить в виде таблиц, которые отличаются от обычных симплексных таблиц тем, что вместо одной ($m+1$)-й строки для оценок векторов условий имеем три строки: ($m+1$)-ю строку для $\mathcal{L}_1(x,\lambda)$ и оценок $\Delta_{j_1}(\lambda)$, ($m+2$)-ю строку для $\mathcal{L}_2(x)$ и оценок Δ_{j_2} и ($m+3$)-ю строку для параметров $Q(x,\lambda)$ и $d_j(\lambda)$. Элементы первых $m+2$ строк при переходе от одного базиса к другому преобразуются как элементы обычных симплексных таблиц, элементы $(m+3)$-й строки вычисляются по формулам (5), (9).

Оценки условий $\Delta_{j1}(\lambda)$, Δ_{j2}, числитель и знаменатель функционала, функционал и параметры $d_j(\lambda)$ при переходе от плана x к плану x^* изменяются по следующим формулам:

$$\Delta^*_{j1}(\lambda) = \Delta_{j1}(\lambda) - \frac{x_{rj}}{x_{rk}} \Delta_{k1}(\lambda), \tag{15}$$

$$\Delta^*_{j2} = \Delta_{j2} - \frac{x_{rj}}{x_{rk}} \Delta_{k2}, \tag{16}$$

$$\mathcal{L}_1(x^*, \lambda) = \mathcal{L}_1(x, \lambda) - \theta_0 \Delta_{k1}(\lambda), \tag{17}$$

$$\mathcal{L}_2(x^*) = \mathcal{L}_2(x) - \theta_0 \Delta_{k2}, \tag{18}$$

$$Q(x^*, \lambda) = Q(x, \lambda) - \frac{\theta_0 d_k(\lambda)}{\mathcal{L}_2(x^*)}, \tag{19}$$

$$\begin{aligned} d^*_j(\lambda) &= \Delta^*_{j1}(\lambda) - Q(x^*, \lambda)\Delta^*_{j2} = \\ &= d_j - \frac{d_k(\lambda)}{x_{rk}\mathcal{L}_2(x^*)}\left[x_{rj}\mathcal{L}_2(x) - \theta_0 x_{rk}\Delta_{j2}\right]. \end{aligned} \tag{20}$$

4. Будем говорить, что базис опорного плана задачи (5)-(7) является **оптимальным** для некоторого λ, если оценки $d_j(\lambda)$ относительно этого базиса всех векторов условий, вычисленные при данном λ, неположительны.

Полная совокупность значений параметра λ, при которых базис оптимален, называется **множеством оптимальности** этого базиса.

Исследуем, как изменяется решение задачи (5)-(7), (8) с изменением параметра λ. Пользуясь симплекс-методом, решим задачу для некоторого $\lambda = \lambda_0$. После конечного числа шагов придём к оптимальному плану задачи, либо убедимся в несовместности условий (6)-(7). (Этот случай не представляет интереса, так как при этом задача (5)-(7) для любого λ не имеет планов). Случай неограниченного многогранника решений мы исключили.

Вычислим по (9)-(12) оценки $d_j(\lambda)$ векторов A_j относительно найденного оптимального плана (для $\lambda = \lambda_0$) базиса $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$ задачи

$$d_j(\lambda) = \sum_{s=1}^{m}(c'_{i_s} + \lambda c''_{i_s})x_{i_s j} - c'_j - \lambda c''_j + \frac{\sum_{j=1}^{n}(c'_j + \lambda c''_j)x_j + c' + \lambda c''}{\sum_{j=1}^{n} l_j x_j + l}\Delta_{j2} \tag{21}$$

Введём обозначения:

$$\Delta'_{j_1} = \sum_{s=1}^{m} c'_{i_s} x_{i_s j} - c'_j \ , \tag{22}$$

$$\Delta''_{j_1} = \sum_{s=1}^{m} c''_{i_s} x_{i_s j} - c''_j \ , \tag{23}$$

$$Q_1(x) = \frac{\sum_{j=1}^{n} c'_j x_j + c'}{\sum_{j=1}^{n} \ell_j x_j + \ell} \ , \quad Q_2(x) = \frac{\sum_{j=1}^{n} c''_j x_j + c''}{\sum_{j=1}^{n} \ell_j x_j + \ell} \ . \tag{24}$$

Тогда

$$d_j(\lambda) = \Delta'_{j_1} + Q_1(x)\Delta_{j_2} + \lambda\left[\Delta''_{j_1} + Q_2(x)\Delta_{j_2}\right].$$

Если ввести обозначения

$$d'_j = \Delta'_{j_1} + Q_1(x)\Delta_{j_2} \ , \quad d''_j = \Delta''_{j_1} + Q_2(x)\Delta_{j_2} \ , \tag{25}$$

то формула (21) запишется

$$d_j(\lambda) = d'_j + \lambda d''_j \ . \tag{26}$$

Нетрудно вывести связь между параметрами Δ'_{j_1} , Δ''_{j_1}, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, d'_j, d''_j и $\Delta'^{*}_{j_1}$, $\Delta''^{*}_{j_1}$, $Q_1(x^*)$, $Q_2(x^*)$, d'^{*}_j, d''^{*}_j при переходе от плана x к плану x^*. Эта связь выражается формулами, аналогичными (15), (16), (19), (20).

Поскольку мы имеем дело с оптимальным для $\lambda = \lambda_0$ базисом, то $d_j(\lambda_0) \le 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, т.е. система неравенств

$$d'_j + \lambda d''_j \le 0 \ , \quad j = 1, 2, \dots, n \ , \tag{27}$$

совместна. Для всех $d''_j > 0$ неравенства системы могут быть переписаны в виде $\lambda \le -\frac{d'_j}{d''_j}$, а для всех $d''_j < 0$ $\lambda \ge -\frac{d'_j}{d''_j}$.

Введём обозначения

$$\underline{\lambda} = \begin{cases} \max\left(-\frac{d'_j}{d''_j}\right), \\ d''_j < 0 \ , \\ -\infty \ , \text{ если } \quad d''_j \ge 0 \ ; \end{cases} \qquad \bar{\lambda} = \begin{cases} \min\left(-\frac{d'_j}{d''_j}\right), \\ d''_j > 0 \ , \\ \infty, \text{ если } \quad d''_j \le 0. \end{cases} \tag{28}$$

Рассматриваемый базис $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_m}$, по определению, является оптимальным для тех и только тех значений λ , которые удовлетворяют системе неравенств (27).

Следовательно, множество оптимальности данного базиса состоит из всех тех конечных значений λ, для которых справедливо условие $\underline{\lambda} \leq \lambda \leq \bar{\lambda}$.

Полученный вывод можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Т е о р е м а I. Числа $\underline{\lambda}$ и $\bar{\lambda}$ полностью характеризуют множество оптимальности $\mathcal{E}(\underline{\lambda}, \bar{\lambda})$ данного базиса:
если $\underline{\lambda} > \bar{\lambda}$, то $\mathcal{E}(\underline{\lambda}, \bar{\lambda})$ - пустое множество;
если $\underline{\lambda} = \bar{\lambda}$, то $\mathcal{E}(\underline{\lambda}, \bar{\lambda})$ - точка $\lambda = \underline{\lambda} = \bar{\lambda}$;
если $-\infty < \underline{\lambda} < \bar{\lambda} < \infty$, то $\mathcal{E}(\underline{\lambda}, \bar{\lambda})$ - отрезок $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$;
если $\underline{\lambda} = -\infty, \bar{\lambda} < \infty$, то $\mathcal{E}(\underline{\lambda}, \bar{\lambda})$ - луч $(-\infty, \bar{\lambda}]$;
если $-\infty < \underline{\lambda}, \bar{\lambda} = \infty$, то $\mathcal{E}(\underline{\lambda}, \bar{\lambda})$ - луч $[\underline{\lambda}, \infty)$;
если $\underline{\lambda} = -\infty, \bar{\lambda} = \infty$, то $\mathcal{E}(\underline{\lambda}, \bar{\lambda})$ - вся прямая.

5. Займёмся теперь исследованием задачи (5)-(7), (8) для значений $\lambda > \bar{\lambda}$. При этом естественно считать $\bar{\lambda} < \infty$, т.е. предполагать, что среди чисел d_j'' имеются положительные. Пусть k - один из индексов, определяемых соотношением

$$\bar{\lambda} = \min_{d_j'' > 0} \left(- \frac{d_j'}{d_j''} \right) = - \frac{d_k'}{d_k''}, \quad d_k'' > 0. \tag{29}$$

Очевидно, $d_k(\bar{\lambda}) = 0$. Так как мы рассматриваем ограниченный многогранник решений, то по крайней мере одна из составляющих x_{ik} положительна. Продолжая решение задачи симплекс-методом, вводим в базис вектор A_k, для которого $d_k(\bar{\lambda}) = 0$ и $d_k'' > 0$. Затем исключаем из базиса вектор A_r, для которого

$$\theta_0 = \frac{x_{r0}}{x_{rk}} = \min_{x_{ik} > 0} \frac{x_{i0}}{x_{ik}}, \quad x_{rk} > 0.$$

Новый базис является оптимальным базисом по крайней мере для $\lambda = \bar{\lambda}$.

В самом деле, по формулам (20) при $\lambda = \bar{\lambda}$ имеем

$$d_j^*(\bar{\lambda}) = d_j(\bar{\lambda}) \leq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

Следовательно, при $\lambda = \bar{\lambda}$ неравенства

$$d_j'^* + \lambda d_j''^* \leq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{30}$$

совместны.

Неравенства (30) могут быть совместны и при $\lambda > \bar{\lambda}$, однако любое $\lambda < \bar{\lambda}$ не удовлетворяет системе (30).

Действительно, при переходе к новому базису параметры d'_j и d''_j преобразуются по формулам, аналогичным (20).

$$d'^*_j = d'_j - \frac{d'_k}{x_{zk}\mathcal{L}_2(x^*)}\left[x_{zj}\mathcal{L}_2(x) - \theta_0 x_{zk}\Delta_{j2}\right], \tag{31}$$

$$d''^*_j = d''_j - \frac{d''_k}{x_{zk}\mathcal{L}_2(x^*)}\left[x_{zj}\mathcal{L}_2(x) - \theta_0 x_{zk}\Delta_{j2}\right]. \tag{32}$$

Так как вектор A_z принадлежит базису, то имеют место соотношения

$$d'_z = d''_z = 0 \quad , \tag{33}$$

$$x_{zj} = \begin{cases} 0 & j \neq z \\ 1 & j = z \end{cases} , \tag{34}$$

$$\Delta_{z2} = 0 . \tag{35}$$

Формулы (3I)-(32) при $j = z$ с учётом (33), (34), (35) запишутся

$$d'^*_z = -\frac{d'_k \mathcal{L}_2(x)}{x_{zk}\mathcal{L}_2(x^*)} , \tag{36}$$

$$d''^*_z = -\frac{d''_k \mathcal{L}_2(x)}{x_{zk}\mathcal{L}_2(x^*)} . \tag{37}$$

Неравенства (30) имеют место и при $j = z$

$$d'^*_z + \lambda d''^*_z \leq 0 . \tag{38}$$

Из неравенства (38) при помощи (36), (37) и учитывая неравенства $\mathcal{L}_2(x) > 0$, $\mathcal{L}_2(x^*) > 0$, $x_{zk} > 0$, получим неравенство

$$d'_k + \lambda d''_k \geq 0 .$$

По построению $d''_k > 0$. Поэтому для всех λ, удовлетворяющих соотношению (30), имеет место неравенство

$$\lambda \geq -\frac{d'_k}{d''_k} = \bar{\lambda} .$$

Полученный результат можно сформулировать в виде следующего утверждения.

Т е о р е м а 2. Пусть $\bar{\lambda} < \infty$ и индекс k определяется условием (29). Тогда, вводя в имеющийся базис вектор A_k по обычным правилам симплекс-метода, приходим к новому базису, левый конец $\underline{\lambda}^*$ множества оптимальности которого равен $\bar{\lambda}$.

6. Итак, процесс исследования параметрической задачи для

$\lambda > \bar{\lambda}$ сводится к движению по базисам её соседних планов, причем правая граница множества оптимальности предыдущего базиса является левой границей для множества оптимальности последующего базиса. Процесс обрывается отысканием множества оптимальности, которое включает в себя правый конец сегмента $[\alpha, \beta]$ и которое является множеством рассматриваемых значений λ .

Нетрудно убедиться, что,используя при выборе вектора, исключаемого из базиса, правило симплекс-метода, дающее полную гарантию от зацикливания, мы будем двигаться по различным базисам задачи.

Действительно, допустим, что два базиса $\mathcal{B}_s$ и $\mathcal{B}_{s+\ell}$, полученные в процессе анализа задачи, совпадают. Пусть $\underline{\lambda}$ и $\bar{\lambda}$ - нижняя и верхняя границы множества оптимальности базиса $\mathcal{B} = \mathcal{B}_s = \mathcal{B}_{s+\ell}$. Из утверждения теоремы 2 вытекает, что $\underline{\lambda} \geq \bar{\lambda}$, т.е. множество оптимальности базиса $\mathcal{B}$ состоит из единственной точки $\tilde{\lambda} = \underline{\lambda} = \bar{\lambda}$.

Отсюда же следует, что $\tilde{\lambda}$ является множеством оптимальности и для каждого из промежуточных базисов $\mathcal{B}_{s+1}, \ldots, \mathcal{B}_{s+\ell-1}$.

Поэтому критерием выбора A_k , подлежащего включению в базис $\mathcal{B}_{s+t}\,(0 \leq t \leq \ell-1)$, являются условия

$$d_k^{(s+t)}(\tilde{\lambda}) = 0, \quad d_k^{\prime(s+t)} > 0 .$$

Таким образом, движение по базисам $\mathcal{B}_s, \ldots, \mathcal{B}_{s+\ell}$ производится по правилам симплекс-метода, применяемого к вспомогательной задаче минимизации дробно-линейного функционала

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j'' x_j + c''}{\sum_{j=1}^{n} \ell_j x_j + \ell}$$

при условиях (6), (7), (8) и дополнительном требовании

$$x_j = 0 \quad , \text{ если } \quad j \notin \mathcal{J} ,$$

где $\mathcal{J}$ - множество индексов j , для которых

$$d_j^{(s)}(\tilde{\lambda}) = 0 .$$

Учитывая,далее, что зацикливание в симплекс-методе исключено, приходим к условию $\mathcal{B}_s \neq \mathcal{B}_{s+\ell}$, которое противоречит сделанному допущению и тем самым доказывает сформулированное утверждение.

Итак, в процессе анализа параметрической задачи возврат к уже пройденному базису невозможен. Следовательно, весь процесс укладывается в конечное число итераций.

До сих пор мы рассматривали задачу при значениях λ, расположенных правее $\bar{\lambda}$ – правой границы множества оптимальности исходного плана.

Анализ задачи (5)-(7), (8) для $\lambda < \underline{\lambda}$ проводится аналогично. Разница состоит лишь в том, что соотношение (29) заменяется на

$$\underline{\lambda} = \max_{d_j'' < 0}\left(-\frac{d_j'}{d_j''}\right) = -\frac{d_k'}{d_k''};\ d_k < 0. \qquad (39)$$

7. Приведём некоторые замечания по алгоритму описанного метода параметрического дробно-линейного программирования. В этом алгоритме вводятся шесть дополнительных строк: $m+1$ строка для значений $\sum_{j=1}^{n} c_j' x_j + c'$ и оценок Δ_{j1}', $m+2$ строка для значений $\sum_{j=1}^{n} c_j'' x_j + c''$ и оценок Δ_{j1}'', $m+3$ строка для значений $\mathcal{L}_2(x)$ и оценок Δ_{2j}, $m+4$ строка для значений $Q_1(x)$ и d_j', $m+5$ строка для $Q_2(x)$ и d_j'', $m+6$ строка для $-\frac{d_j'}{d_j''}$.

Элементы первых $m+3$ строк преобразуются по обычным правилам преобразования элементов симплексных таблиц.

Элементы $m+4$, $m+5$, $m+6$ строк вычисляются по формулам (24), (25) на основе данных предыдущих строк.

Процесс решения параметрической задачи начинается с её анализа (по общим правилам симплекс-метода для решения задачи ДЛП, изложенном в п.4) для некоторого значения $\lambda = \lambda_0$. Конечно, нет необходимости в дополнительных строках при вычислении исходного опорного плана.

После расчёта начального опорного плана при $\lambda = \lambda_0$, как уже отмечалось, вводятся строки для оценок векторов Δ_{j1}', Δ_{j1}'', Δ_{j2} для параметров d_j', d_j'', $-\frac{d_j'}{d_j''}$, причём в строке $-\frac{d_j'}{d_j''}$ заполняются лишь позиции, отвечающие $d_j'' > 0$.

Если все позиции последней строки оказались незаполненными, то текущий базис оптимален для всех $\lambda > \lambda_0$.

В противном случае индекс минимального элемента этой строки определяет номер вектора, подлежащего включению в базис, а значение минимального элемента совпадает с правой границей множества оптимальности текущего базиса.

Мы ограничились здесь кратким рассмотрением алгоритма, приспособленного к анализу параметрической задачи при $\lambda > \lambda_0$. При необходимости исследовать задачу слева от точки λ_0 в алгоритм следует внести естественные изменения, вытекающие из содержания предшествующего алгоритма.

В строке $-\frac{d_j'}{d_j''}$ заполняются только позиции, отвечающие $d_j'' < 0$, а вектор, подлежащий введению в базис, определяется максимальным элементом этой строки. Исследование задачи через конечное число итераций завершается построением базиса, правая граница которого совпадает или больше правой границы диапазона изменения параметра λ.

В процессе решения параметрической задачи выгоднее двигаться в одном фиксированном направлении.

Поэтому если заданный диапазон изменения параметра представляет собой луч или отрезок, то целесообразно начать вычисления с одного из его концов. Если же необходимо исследовать задачу на всей оси λ, то в качестве начала можно выбрать $\lambda = \infty$ или $\lambda = -\infty$.(В первом случае предварительный анализ требует минимизации дробно-линейного функционала

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j'' x_j + c''}{\sum_{j=1}^{n} \ell_j x_j + \ell},$$

во втором случае он сводится к минимизации этой дроби).

В заключение подчеркнём следующий вывод, вытекающий из содержания вышеизложенного алгоритма.

Вычислительный процесс решения задачи параметрического программирования (5)-(7), (8) можно рассматривать как процесс решения задачи ДЛП симплекс-методом с особым правилом выбора вектора, подлежащего вводу в базис, и специальным признаком для прекращения вычислений.

9. Мы рассмотрели случай, когда многогранник условий G является ограниченным. Случай неограниченной области G может привести к неограниченному возрастанию (или убыванию) числителя и знаменателя функционала (5), т.е. в параметрическом дробно-линейном программировании, в отличие от линейного программирования, может иметь место случай асимптотического

экстремума (конечного или бесконечного). Исследование этого случая можно провести, обобщив результаты работ [I], [3].

Применяя вышеизложенную методику, можно разработать алгоритм решения задачи (I)-(3), (4), у которой от параметра зависит только знаменатель функционала. В этом случае, как и в предыдущем, для определения границ $\underline{\lambda}$, $\bar{\lambda}$ множества оптимальности рассматриваемого базиса будем иметь систему линейных неравенств.

В случае, когда параметр входит только в вектор ограничений, также можно разработать алгоритм решения задачи потому, что для определения $\underline{\lambda}$ и $\bar{\lambda}$ опять получаем систему линейных неравенств.

Можно разработать алгоритм решения параметрической задачи (I)-(3), (4) для двух более общих случаев, когда параметр входит в вектор ограничений и в числитель (или знаменатель) функционала, так как и в этом случае для определения границ $\underline{\lambda}$, $\bar{\lambda}$ множества оптимальности рассматриваемого базиса будем иметь систему линейных неравенств.

В случае, когда параметр входит в числитель и знаменатель функционала одновременно, анализ задачи параметрического программирования значительно усложняется, т.к. для определения границ $\underline{\lambda}$, $\bar{\lambda}$ множества оптимальности рассматриваемого базиса получим систему квадратных неравенств, решение которой даёт двусвязную область для множества оптимальности рассматриваемого базиса. Если от параметра зависят векторы условий A_j, то возникают те же трудности - система неравенств для определения границ $\underline{\lambda}$, $\bar{\lambda}$ является нелинейной.

Литература

I. А.П.Шварцман. Об одном алгоритме дробно-линейного программирования. В ж. "Экономика и математические методы". Т.I, вып.4. М., "Наука", I965.

2. Ю.П.Чернов. О некоторых многоэкстремальных задачах дробного программирования. В сб. "Математические методы моделирования экономических задач". Новосибирск, I969.

3. Е.Г.Гольштейн, Д.Б.Юдин. Новые направления в линейном программировании. Из-во "Советское радио". М. I966.

Поступила в редакцию
I2.XII. I969 г.