УДК 51:330.115

МИНИМИЗАЦИЯ ОБОРОТНЫХ ЗАДЕЛОВ НА ПРЯМОТОЧНЫХ ЛИНИЯХ

В.В.Титов

Одной из основных особенностей работы прямоточной линии является различие в производительности оборудования по операциям. Это различие производительности по смежным операциям влечет за собой неритмичную работу линии, образование межоперационных оборотных заделов, увеличивающих размеры незавершенного производства. Поэтому величина оборотного задела является одним из основных *) критериев рациональности графика работы линии по операциям. Ясно, что более производительное оборудование должно делать перерывы в работе, чтобы величина оборотных заделов не превосходила какие-то установленные нормативы. Правильное сочетание простоев и работы между смежными операциями на линии уменьшает величину оборотных заделов, не снижая производительности всей линии.

В заметке предлагается способ построения графика работы линии по операциям, минимизирующего оборотные заделы по всей линии. Предполагается, что обрабатывается деталь одного вида, а определенная партия деталей обрабатывается на любой операции без перерывов.

I. Постановка задачи

Все смежные операции разобьем на две группы: в первой - более производительная операция предшествует менее производительной, во второй, наоборот,- более производительная операция следует за менее производительной операцией.

*) В данной заметке не рассматривается вопрос об организации работы многостаночников.

Пусть за время T (одна или более смен) линия дает n готовых деталей; a_i – приведенная трудоемкость i-й операции ($a_i = a'_i/\gamma_i$), $i = 1,2,\dots,K$, обработки детали; $A_i = na_i$; c_i – себестоимость детали после обработки на i-й операции; γ_i – количество рабочих мест, на которых одновременно обрабатываются детали по операции i трудоемкостью a'_i.

Пусть x_i –момент начала i-й операции. Ясно, что

$$x_i \le T - A_i, \quad i = 1,2,\dots,K.$$

Пусть $b_i = f(x_i, x_{i+1})$ есть величина остатка оборотного задела (в.о.о.з.) в стоимостном выражении к концу периода T для деталей прошедших i-ю операцию.

Значения b_i и ограничения на x_i для различных сочетаний пар операций занесем в таблицу

Сочетания операций	Значения b_i	Ограничения на x_i
1.1.	$(x_i - x_{i+1})c_i/a_{i+1}$	$x_i \ge x_{i+1}$; $A_i + x_i \le x_{i+1} + A_{i+1}$
1.2.	0	$x_{i+1} \ge x_i$; $x_i + A_i \ge x_{i+1}$
1.3.	0	$x_i + A_i \le x_{i+1}$
1.4.	$(x_i - x_{i+1})c_i/a_{i+1}$	$x_i \le x_{i+1} + A_{i+1}$; $x_i + A_i \ge x_{i+1} + A_{i+1}$
1.5.	nc_i	$x_i \ge x_{i+1} + A_{i+1}$
2.1.	$\left(n - \frac{na_{i+1}}{a_i}\right)c_i - (x_{i+1} - x_i)\frac{c_i}{a_i}$	$x_i \le x_{i+1}$; $x_i + A_i \ge x_{i+1} + A_{i+1}$
2.2.	0	$x_{i+1} \le x_i + A_i$; $x_{i+1} + A_{i+1} \ge x_i + A_i$
2.3.	0	$x_{i+1} \ge x_i + A_i$
2.4.	$\left(n - \frac{na_{i+1}}{a_i}\right)c_i - (x_{i+1} - x_i)\frac{c_i}{a_i}$	$x_i \ge x_{i+1}$; $x_i \le x_{i+1} + A_{i+1}$
2.5.	nc_i	$x_i \ge x_{i+1} + A_{i+1}$

Нужно определить вектор $X=(x_1, x_2, \ldots, x_K)$, минимизирующий значение $L(X)=\sum_{i=1}^{K-1} b_i(x_i, x_{i+1})$.

2. Частный случай решения задачи

Как видим из таблицы, варианты I.I. и I.4., а также 2.I. и 2.4. имеют общие формулы для определения в.о.о.з. Ограничение на переменные $x_{i+1} \leq x_i \leq x_{i+1}+A_{i+1}$ будет общим для вариантов I.I. и I.4., а ограничение $x_i \leq A_{i+1}+x_{i+1} \leq x_i+A_i$ будет общим для вариантов 2.I. и 2.4.. Следовательно, если предположить, что в графике работы линии используются пары сочетаний операций только типов I.I., I.4. (2.I., 2.4.), то задача минимизации оборотных заделов сводится к следующей задаче линейного программирования.

Минимизировать

$$L(X)=\sum_{i=1}^{K-1} b_i(x_i, x_{i+1}) \qquad (I)$$

при условиях:

для первой группы пар смежных операций

$$x_{i+1} \leq x_i \leq x_{i+1}+A_{i+1}, \qquad (2)$$

для второй группы пар смежных операций

$$x_i \leq x_{i+1}+A_{i+1} \leq x_i+A_i, \qquad (3)$$

для каждой операции

$$0 \leq x_i \leq T-A_i. \qquad (4)$$

Так как данная модель допускает не все типы пар смежных операций, то она не гарантирует получение оптимального решения, хотя часто это имеет место, ибо пары смежных операций типа I.I., I.4. (2.I., 2.4.) являются наиболее важными и практически наиболее приемлемыми.

3. Решение задачи в общем случае

Построение графика работы линии начинаем с последней операции, так как, очевидно, что именно согласованность в работе последних операций будет в большей степени определять в.о.о.з. всей линии ($c_1 < c_2 < \ldots < c_K$).

Полагаем $x_K=T-A_K$. Переходим к операции (К-I). Если $a_{K-1} > a_K$, то полагаем $x_{K-1}=T-A_{K-1}$ и получаем $b_{K-1}=0$;

если $a_{k-1} \le a_k$, то $x_{k-1} = x_k$ и $b_{k-1} = 0$. Рассматриваем следующие операции и согласуем их между собой так, чтобы в.о.о.з. между операциями была равна нулю. График работы линии будет смещаться влево до тех пор, пока мы не находим, что последние две рассматриваемые операции уже нельзя расположить так, чтобы в.о.о.з. была равна нулю. Пусть это будут операции (i+I) и (i). Мы имеем $x_{i+1} + A_{i+1} < A_i$; отсюда $x_i = 0$, $x_i + A_i > x_{i+1} + A_{i+1}$ и $b_i > 0$. (Если бы мы положили $x_k < T - A_k$, то ясно, что в данном случае нужно было бы x_k увеличить до $T - A_k$, а операции (К-I),...,(i+I) сдвинуть вправо на соответствующую величину).

Пусть $\sum_{i=2}^{k-1} b_i = 0$, т.е. операции (К),...,(2) согласованы оптимальным образом. Остается принять во внимание первую операцию и построить оптимальный график работы всей линии. Для того чтобы уменьшить значение b_1, нужно сдвинуть вправо операцию (2). Оправдан ли будет такой сдвиг?

Пусть $\alpha_i = c_i / a_i$, $a_i > a_{i+1}$; $\alpha_i = c_i / a_{i+1}$, $a_{i+1} > a_i$.

Значение α_i соответствует тому увеличению (уменьшению) в.о.о.з., которое будет при сдвиге вправо операции (i + I) относительно операции (i) на одну единицу времени. Ясно, что если среди значений $\alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}$ нет меньшего, чем α_1, то сдвиг операций нет необходимости выполнять, так как это приведет только к еще большему увеличению в.о.о.з.. Пусть $\alpha_1 > \alpha_\ell$, $2 \le \ell \le k-1$. В этом случае сдвигаем вправо операции (2),...,(ℓ) на величину

$$h_1 = A_1 - x_2 - A_2.$$

Будем иметь общее уменьшение в.о.о.з. на величину $(\alpha_1 - \alpha_2) h_1$, а график работы линии будет оптимальным.

Однако сдвиг операции (ℓ), при котором сохраняется линейное изменение b_ℓ, ограничен и может быть определен так:

$$h_\ell = min\{ T - x_\ell - A_\ell \ ; \ A^\ell \}, \tag{5}$$

где $A^\ell = max\{ A_\ell, A_{\ell+1} \}$. Ясно, что $h_1 << A^\ell$ (так как $\alpha_1 > \alpha_\ell$, т.е. $c_1/a_1 > c_\ell/a_\ell$, $c_\ell > c_1$, то a_ℓ или $a_{\ell+1}$ должно быть значительно больше a_1, которое определяет значение $h_1 = na_1 - x_2 - A_2$). Следовательно, если $h_1 > T - x_\ell - A_\ell$, то осуществляем только частичный сдвиг на величину $T - x_\ell - A_\ell$.

Пусть мы имеем еще $\alpha_j < \alpha_1$, $2 \le j \le k-1$, $j < \ell$, $\alpha_j > \alpha_\ell$. Тогда если $h_1 > T - x_\ell - A_\ell$, то мы сначала делаем сдвиг операций $(2),\dots,(\ell)$ вправо на величину $T - x_\ell - A_\ell$, а затем операции $(2),\dots,(j)$ сдвигаем вправо на величину $h_1 - T + x_\ell + A_\ell$. Получаем оптимальное решение, т.к. порядок сдвигов операций не вызывает сомнений ($\alpha_\ell < \alpha_j$, $j < \ell$).

Пусть $j > \ell$, $h_1 > h_\ell > h_j$; h_j определено по формуле (5). Осуществляем сдвиг операций $(2),\dots,(\ell)$ на величину h_ℓ. Имеем уменьшение в.о.о.з. на $h_\ell(\alpha_1 - \alpha_\ell)$. При этом получаем $x_\ell + A_\ell = T$, т.е. сдвиги операций $(\ell+1),\dots,(k-1)$ уже не приведут к уменьшению в.о.о.з., а следовательно, график работы линии по операциям $(\ell),\dots,(k)$ можно считать окончательным. Теперь рассмотрим другой вариант решения. Осуществляем сдвиг сначала операций $(2),\dots,(j)$ вправо на величину h_j, а затем операции $(2),\dots,(\ell)$ сдвигаем вправо на величину $h_\ell - h_j$. Имеем общее уменьшение в.о.о.з. на величину

$$(\alpha_1-\alpha_j)h_j + (\alpha_1-\alpha_\ell)(h_\ell-h_j) = h_\ell(\alpha_1-\alpha_\ell) - h_j(\alpha_j-\alpha_\ell),$$

т.е. имеем худший результат, чем в первом варианте решения. Действительно, сдвиг операции (2) был осуществлен на одну и ту же величину в обоих случаях, но первый вариант является более эффективным. Аналогичный результат получим при $h_1 < h_\ell$.

Таким образом, очередность сдвигов групп операций нужно рассматривать только с точки зрения максимального уменьшения в.о.о.з., т.е. если $\alpha_\ell < \alpha_j$, то сдвиг операций нужно начинать с (ℓ)-й операции.

Мы рассмотрели наиболее простой случай построения оптимального графика работы линии. При этом были указаны наиболее важные особенности поставленной задачи и алгоритм ее решения, который можно представить следующей схемой.

1. Начинаем строить график с последней операции.

2. На каждом этапе решения задачи заносим в график одну операцию (i) так, чтобы значение b_i было минимальным.

3. Если для операции (i) получили $b_i > 0$, то осуществляем сдвиг (либо частичный сдвиг) операций $(i+1),\dots,(\ell)$ вправо на соответствующую величину при $\alpha_\ell < \alpha_i$ и $h_\ell > 0$.

4. Если среди $\alpha_{i+1},\dots,\alpha_{k-1}$ имеем несколько значений, меньших, чем α_i, то сдвиг начинаем с операции, для которой α_ℓ – наименьшее среди значений $\alpha_{i+1},\dots,\alpha_{k-1}$.

5. Если среди значений $\alpha_{i+1},\dots,\alpha_{k-1}$ нет меньших, чем α_i.

либо соответствующие значения $h_\ell = 0$, то сдвиги относительно операции (i) не осуществляем.

6. Если в ходе решения задачи получили соотношение $x_j = T - A_j$, то график по операциям (j), ($j+1$),...,(K) является окончательным.

7. Если сдвиг операции (ℓ) необходимо и возможно сделать на величину, большую, чем A^ℓ, то полагаем $x_\ell = T - A_\ell$, а график начинаем строить с операции ($\ell - 1$).

Таким образом, для того чтобы график работы прямоточной линии, построенный изложенным выше алгоритмом, был оптимален, необходимо на каждом этапе решения задачи построить локально-оптимальный график (оптимальный для рассматриваемого количества операций, внесенных в график на соответствующем этапе решения задачи).

Пусть мы получили изложенным выше алгоритмом локально-оптимальный график для операций ($i+1$),...,(K). Заносим в график операцию (i). Пусть $A_i > x_{i+1} + A_{i+1}$; тогда полагаем $x_i = 0$. При этом $b_i > 0$.

Среди значений $d_{i+1},\dots,d_{K-1}$ находим наименьшее – d_ℓ, причем $d_\ell < d_i$ и $h_\ell > h_i$ ($h_i = x_{i+1} + A_{i+1} - A_i$). Осуществляем сдвиг вправо операций ($i+1$),...,(ℓ) на величину h_i и получаем новое локально-оптимальное решение. Аналогичный результат получаем при $h_i > h_\ell$, т.е. сдвиг осуществляем только на величину h_ℓ.

Если среди значений $d_{i+1},\dots,d_{K-1}$ имеем несколько значений, меньших, чем d_i, то сдвиги операций нужно осуществлять с операции, для которой значение d_ℓ наименьшее (такой случай уже был рассмотрен выше). Такой вариант решения также приводит к локально-оптимальному решению.

Далее, пусть $d_\ell \geq d_i$, однако для операции (j), $j < \ell$, мы имеем соотношение $x_j + A_j = T$, т.е. сдвиг вправо операций (ℓ),...,(j),...,($i+1$) уже невозможен. Предположим, что мы сдвинули влево операции (μ),...,(j), $i+1 \leq \mu \leq j-1$, на величину h_i (либо на h_ℓ, если $h_\ell < h_i$). При этом в.о.о.з. возрастет на величину $h_i(d_\mu - d_j)$. Теперь осуществляем сдвиг вправо операции ($i+1$),...,(j),...,(ℓ) на величину h_i. Имеем уменьшение в.о.о.з. на $h_i(d_i - d_\ell)$. Приведут ли данные сдвиги к оптимальному решению? Заметим, что $d_j < d_\ell$, в противном случае сдвиги вправо были бы осуществлены на предыдущих этапах решения задачи относительно операции

($i+1$), а не ($j+1$). Если $d_\mu > d_i$, то $h_i(d_\mu - d_j) > h_i(d_i - d_\ell)$.
Если $d_\mu < d_i$, то имеем такой вариант решения задачи: сдвигаем вправо операции ($i+1$),...,(μ) на величину h_i. Имеем уменьшение в.о.о.з. на $h_i(d_i - d_\mu)$. Сравниваем этот результат с полученным ранее:

$$h_i(d_i - d_\mu) - h_i(d_i - d_\ell) + h_i(d_\mu - d_j) = h_i(d_\ell - d_j), \quad d_\ell > d_j,$$

т.е. второй вариант приводит к оптимальному решению.

Таким образом, если в ходе решения задачи мы получили соотношение $x_j + A_j = T$, то график операций (j),($j+1$),...,(K) можно считать окончательным, а сдвиги (причем только вправо) можно осуществлять среди операций ($i+1$),...,($j-1$).

Рассмотрим еще один вариант решения задачи. Пусть $d_i > d_\ell$, но $x_\ell + A_\ell = T$. Сдвиг операции (ℓ) был осуществлен для уменьшения b_μ, $d_\mu < d_i$, $\mu < \ell$. Осуществляем сдвиг влево операции ($\mu+1$),...,(ℓ) на величину h_i, а затем операции ($i+1$),...,($\mu+1$),...,(ℓ) сдвигаем вправо на величину h_i. При этом имеем уменьшение в.о.о.з. на $h_i(d_i - d_\mu)$.
Если осуществлять сдвиг согласно изложенному выше алгоритму, то мы должны осуществить сдвиг вправо операции ($i+1$),...,(μ) на величину h_i, при этом в.о.о.з. уменьшится на $h_i(d_i - d_\mu)$, т.е. получаем аналогичный результат. Если $h_i > h_\mu$, то сдвиг операций ($i+1$),...,(μ) мы осуществим только на величину h_μ, при этом уменьшаем в.о.о.з. на $h_\mu(d_i - d_\mu)$. Однако и в первом варианте результат изменится, а именно: $h_\mu(d_i - d_\ell) - h_\mu(d_\mu - d_\ell) = h_\mu(d_i - d_\mu)$. Таким образом, оба варианта эквивалентны.

Рассмотрим случай с нелинейным изменением в.о.о.з. Пусть в ходе решения мы должны осуществить сдвиг операции (ℓ) на величину, большую, чем h_ℓ (h_ℓ рассчитана по формуле 5). Это возможно, если $A^\ell < T - x_\ell - A_\ell$. Тогда если мы нашли, что необходимо операцию (ℓ) сдвинуть вправо на величину A^ℓ, то дальнейший сдвиг уже не будет увеличивать оборотный задел, поэтому полагаем $x_\ell = T - A_\ell$, а построение графика работы линии нужно начать с операции ($\ell - 1$).

Таким образом, мы можем построить локально-оптимальный график на каждом этапе решения задачи, что и требовалось доказать.

Изложенный выше алгоритм построения графика работы прямоточной линии позволяет даже вручную решать задачи большой размерности.

Далее, нетрудно показать, что минимальная величина остатка оборотного задела на конец (начало) периода T для прямоточной линии будет соответствовать минимальному размеру среднего оборотного задела за период времени T .

Литература

1. С.А.Думлер. Единый метод расчета производственных циклов и заделов. В кн."Вопросы экономики и организации производства". Сб. ЧПИ, № 12, Машгиз, 1957.
2. Б.И.Кузин. Применение математического программирования для минимизации оборотных заделов на прямоточных линиях. В кн. "Применение математики в экономике". Выпуск 2. ЛГУ, 1964.

Поступила в редакцию
9.X. 1969 г.