УДК 51.330.115

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ИЗ Λ -СИСТЕМЫ

М.Д.Зияудинов

Введение

В промышленном производстве, в планировании (теория расписаний), в биологии, в химии и т.д. часто встречаются задачи, в которых недостаток некоторого фактора существенно влияет на выходную продукцию.

В работе [1] описан один класс задач, названный авторами Λ -системой.

В настоящей работе исследуется асимптотическое поведение траектории функций, которая определяет технологический конус Z для задач из Λ -системы. При этом использованы теоремы о существовании и единственности собственного вектора для нелинейной задачи $\lambda V = F(V)$, доказанные в работе [2].

В нашем случае функция F имеет специальный вид, и прямое приложение результатов работы [2] невозможно. Поэтому при определенных предположениях относительно F , отличных от предположений на F в указанной выше работе, устанавливается существование и единственность собственного вектора для F . Доказывается теорема о сильной устойчивости решения вида $\varkappa\lambda^t V$ разностной системы

$$x_{t+1} = F(x_t),$$

где F – функция, описывающая технологический конус задачи из Λ – системы, $\varkappa$ – положительная константа, определяемая начальными условиями, V – собственный вектор F , а λ – соответствующее собственное значение.

I. Описание модели

В описываемой модели m имеется n продуктов (сырье, энергия и т.д.), каждому из которых ставится в соответствие индекс i $(i=1,2,\dots,n)$. Пусть α_i – количество i-го продукта $(i=1,2,\dots,n)$, потребляемого в процессе производства, ρ_0 – условная единица интенсивности процесса производства ($\rho_0 = 1/t$, где t – полное время единичного процесса производства). Тогда ход процесса производства описывается интенсивностью ρ (в единицах ρ_0) в виде

$$\rho = min\left(\frac{x_1}{\alpha_1}, \frac{x_2}{\alpha_2}, \dots, \frac{x_n}{\alpha_n}\right),$$

где x_i – количество i-го продукта $(i=1,2,\dots,n)$.

Продукт с индексом i_0 , на котором этот минимум достигается, в работе [I] назван "лимитирующим фактором" или "узким местом" вектора $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Пусть имеется m способов производства и пусть поток $\widetilde{x}_{ij}$ i-й компоненты (продукта) к j-му способу производства пропорционален количеству x_i продукта i с коэффициентами ξ_{ij} , т. е.

$$\widetilde{x}_{ij} = \xi_{ij} x_i \;,\quad 0 < \xi_{ij} \;,\quad 0 \le x_i \;\; (i=1,2,\dots,n), (j=1,2,\dots,m).$$

Предположим еще, что каждый способ производства может одновременно и потреблять и производить одну и ту же компоненту. Если обозначим через α_{ij} – потребление i-й компоненты j-м способом, а через β_{ij} – производство этой компоненты способом j , то

$$a_{ij}\, min\left(\frac{\widetilde{x}_{1j}}{\alpha_{1j}}, \dots, \frac{\widetilde{x}_{nj}}{\alpha_{nj}}\right) = a_{ij}\, min\left(\frac{\xi_{1j} x_1}{\alpha_{1j}}, \dots, \frac{\xi_{nj} x_n}{\alpha_{nj}}\right), \qquad (I.1)$$

где $a_{ij} = \beta_{ij} - \alpha_{ij}$, будет означать количество i-й компоненты "производимой" j-м способом, а

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\, min\left(\frac{x_1}{b_{1j}}, \frac{x_2}{b_{2j}}, \dots, \frac{x_n}{b_{nj}}\right), \qquad (I.2)$$

где $b_{kj} = \alpha_{kj}/\xi_{kj}$ $(k=1,2,\dots,n), (j=1,2,\dots,m)$ – количество i-й компоненты, "производимой" всеми m способами производства. Очевидно, что каждая компонента f_i n-мерного вектора $f=(f_1, f_2, \dots, f_n)$, как функция от $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$, непрерывна.

Пусть $x=\{x_i\}$ и $y=\{y_i\}$ $(i=1,2,\dots,n)$. В дальнейшем будем писать $x \geqq y$, если $x_i \geqq y_i$ для $i=1,2,\dots,n$; $x \ge y$, если $x \geq y$ и $x \neq y$; $x > y$, если $x_i > y_i$ для $i = 1,2,\ldots,n$.

Положим $N = \{1,2,\ldots,n\}$ и $M = \{1,2,\ldots,m\}$. Предположим теперь, что

1) $b_{kj} > 0, \quad k \in N, \ j \in M,$ (I.3)

2) $a_{ij} \geq 0, \quad i \in N, \ j \in M$ (I.4)

Тогда

а) $F(x)$ непрерывна;

б) $F(x)$ вогнута, т.е. если x' , $x'' \in R_n^+$, $\alpha \in [0,1]$, то $F(\alpha x' + (1-\alpha)x'') \geq \alpha F(x') + (1-\alpha)F(x'')$;

в) если $x_k = 0$ хотя бы для одного $k \in N$, то $F(x) = 0$;

г) $F(R_n^+) \subset R_n^+$;

д) $F(x)$ монотонна, т.е. если x' , $x'' \in R_n^+$, $x' \geq x''$, то $F(x') \geq F(x'')$;

е) $F(x)$ положительно однородна первой степени, т.е. если $x \in R_n^+$ и $\lambda \geq 0$, то $F(\lambda x) = \lambda F(x)$;

ж) $F(x') > F(x)$ для всех x' , $x \in R_n^+$ таких, что $x' > x$

ЛЕММА I.I. Если $\tilde{V}$ решение уравнения $\lambda V = F(V)$, где F - функция, определенная равенством (I.2) и удовлетворяющая неравенствам (I.3), (I.4), а λ - соответствующее собственное значение, то $\tilde{V} > 0$ и $\tilde{\lambda} > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Предположим сначала, что $\tilde{\lambda} \neq 0$ Допустим, что $\tilde{V}_i = 0$ для какого-либо $i \in N$. Тогда из в) имеем $F(\tilde{V}) = 0$, т.е. $\tilde{\lambda}_i \tilde{V}_i = F_i(\tilde{V}) = 0$ для всех $i \in N$. Отсюда следует, что $\tilde{V}_i = 0$ для всех $i \in N$, так как по предположению $\tilde{\lambda} \neq 0$. Это противоречит заключению теоремы I из [2] о том, что для собственного вектора $\tilde{V}$ выполняется равенство $\sum_{i=1}^{n} \tilde{V}_i = 1$ (легко видеть, что F удовлетворяет условиям указанной теоремы). Значит, наше допущение неверно, и $\tilde{V} > 0$.

Пусть теперь $\tilde{\lambda} = 0$. По определению, $\tilde{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} F_i(\tilde{V})$, и, следовательно, $F_i(\tilde{V}) = 0$ для всех $i = 1,2,\ldots,n$. Очевидно, существует такой вектор $x < \tilde{V}$ (например, $x = \tilde{V}/2$), что $F(x) \neq F(\tilde{V})$. Тогда в силу монотонности F заключаем, что хотя бы для одного $i \in N$ $F_i(x) < F_i(\tilde{V})$, т.к. $F(x) \leq F(\tilde{V})$ и $F(x) \neq F(\tilde{V})$. С другой стороны, в силу свойства г) имеем, что $F_i(x) \geq 0$ для всех $i \in N$, т.к. $x \in R_n^+$. Следовательно, $\sum_{i=1}^{n} F_i(\tilde{V}) > 0$

что противоречит предположению $\bar{\lambda} = 0$.

Т е о р е м а I.I. Если в (I.4) имеет место строгое неравенство, то собственный вектор V функции F единствен (следовательно, единственно и собственное значение λ).

Д о к а з а т е л ь с т в о . Пусть имеется два собственных вектора V , $\bar{V}\ (V \neq \bar{V})$, λ , $\bar{\lambda}$ - соответствующие собственные значения. Не нарушая общности, можно считать $\lambda \geq \bar{\lambda}$. Обозначим через R множество индексов k , для которых $V_k/\bar{V}_k = \mu$, где $\mu = \max\limits_{1 \leq i \leq n} \frac{V_i}{\bar{V}_i}$. Очевидно, $R \neq \varnothing$ и $R \subset N$. Покажем, что для всех $k \in R$ выполняется неравенство $F_k(\mu\bar{V}) > F_k(V)$.

Т.к. $\mu\bar{V} \geq V$, то из монотонности F имеем

$$F(\mu\bar{V}) - F(V) = \mu\bar{\lambda}\bar{V} - \lambda V \geq 0$$

и хотя бы для одного $i = i_0 \in N$ выполняется неравенство $\mu\bar{\lambda}\bar{V}_{i_0} - \lambda V_{i_0} > 0$. В противном случае из равенств $\mu\bar{\lambda}\bar{V} = \lambda V$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} V_i = 1 = \sum\limits_{i=1}^{n} \bar{V}_i$ вытекало бы $V = \bar{V}$, что противоречит предположению $V \neq \bar{V}$. Следовательно, $F_{i_0}(\mu\bar{V}) - F_{i_0}(V) > 0$, и в силу монотонности F и условий $(a_{ij} > 0)$ для всех $i \in N$ и $j \in M$ хотя бы для одного $j_0 \in M$ при всех $i \in M$ выполняются неравенства

$$a_{ij_0}\left[\min\left(\frac{\mu\bar{V}_1}{b_{1j_0}}, \ldots, \frac{\mu\bar{V}_n}{b_{nj_0}}\right) - \min\left(\frac{V_1}{b_{1j_0}}, \ldots, \frac{V_n}{b_{nj_0}}\right)\right] > 0,$$

т.е. $F(\mu\bar{V}) > F(V)$. Следовательно, для любого $i \in N$ имеем $F_i(\mu\bar{V}) > F_i(V)$. Из этого следует, что $F_i(\mu\bar{V}) = \mu\lambda\bar{V}_i > F_i(\bar{V}) = \lambda V_i$ для всех $i \in N$, а для $k \in R$ выполняется равенство $\mu\bar{V}_k = V_k$. Отсюда $\lambda < \bar{\lambda}$, а это противоречит предположению $\lambda \geq \bar{\lambda}$. Итак, предположение о существовании двух собственных векторов неверно. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е . Условие $a_{ij} > 0$ $i \in N$, $j \in M$ в теореме I.I существенно. Приведем пример, когда это условие нарушено и собственный вектор для F не единствен.

Пусть $n = m = 2$. Тогда функция F, задаваемая условиями (I.2), (I.3), (I.4) , имеет вид

$$F_1(x) = a_{11}\min\left(\frac{x_1}{b_{11}}, \frac{x_2}{b_{21}}\right) + a_{12}\min\left(\frac{x_1}{b_{12}}, \frac{x_2}{b_{22}}\right)$$
$$F_2(x) = a_{21}\min\left(\frac{x_1}{b_{11}}, \frac{x_2}{b_{21}}\right) + a_{22}\min\left(\frac{x_1}{b_{12}}, \frac{x_2}{b_{22}}\right). \qquad (I.5)$$

Предположим, что

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{I.6}$$

Тогда любой вектор $x \in K_I$, где K_I -конус, заданный неравенством $x_1 \leq 5x_2$ (рис. I), является собственным вектором функции F, заданной равенствами I.5 и I.6.

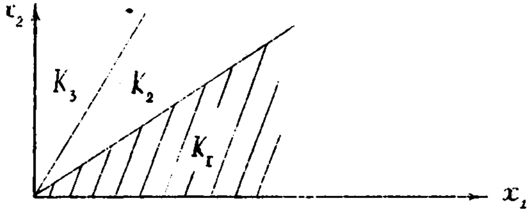

рис. I.

2. Состояние равновесия для модели $\mathcal{M}$.

Процесс производства представляется как пара (x , $F(x)$) двух векторов, где F - функция, определенная равенством (I.2) и удовлетворяющая неравенствам (I.3) и (I.4). Вектор $x=(x_1,\dots,x_n)$ называется вектором затрат, а $F(x)=(F_1(x),\dots,F_n(x))$ - вектором выпуска в процессе (x , $F(x)$). За единицу времени для производства i -й компоненты в количестве $F_i(x)$ затрачивается x_i единиц этой же компоненты.

Множество Z всех процессов является подмножеством R^+_{2n}. Легко видеть, что Z - замкнутый выпуклый конус. Пусть $(x, F(x)) \in Z$ и $i \in N$. Определим величину $\alpha_i(x, F(x))$ следующим образом

$$\alpha_i(x, F(x)) = \begin{cases} \dfrac{F_i(x)}{x_i}, & x_i > 0; \\ \infty, & x_i = 0. \end{cases}$$

Величина $\alpha(x, F(x)) = \min\limits_{1 \leq i \leq n} \alpha_i(x, F(x))$ называется темпом роста процесса (x , $F(x)$), а величина $\alpha_M = \max \alpha(x, F(x))$ (по всем (x , $F(x)$) $\in Z$) - темпом роста модели $\mathcal{M}$.

Про... ($\bar{x}$, $F(\bar{x})$), для которого имеет место $\alpha_M = \alpha(\bar{x}, F(\bar{x}))$, называе... оптимальным процессом или оптимальной парой.

Функция α достигает своего максимума, так как она непрерывна всюду в Z за исключением начала координат. Можно показать также, что существует процесс ($\bar{x}$, $F(\bar{x})$) такой, что

$\alpha_M = \alpha(\bar{x}, F(\bar{x}))$. По определению α_M для любой пары $(x, F(x)) \in Z$ имеет место неравенство $\alpha_M x \le F(x)$.

Через R_n^{+*} обозначим сопряженный конус к R_n^+, т.е.

$R_n^{+*} = \{ f : f(x) \ge 0$ для всех $x \in R_n^+ \}$

(f - линейный функционал на R_n).

Пусть $p \in R_n^{+*}$. Вектор $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$ приписывает каждой компоненте i цену p_i единицы этой компоненты (продукта). Вектор p называется вектором цен.

Будем говорить, что тройка (α_M, $(\bar{x}, F(\bar{x})), p$), где $\alpha_M \ge 0$, $p \ge 0$, $(x, F(\bar{x})) \in Z$, задает состояние равновесия для модели m, если

а) $\alpha_M x \le F(\bar{x})$;

б) $\alpha_M p x \ge p F(x)$ для любого $(x, F(x)) \in Z$;

в) $p F(x) > 0$.

(Здесь py - скалярное произведение векторов p и y). Существование тройки (α_M, $(\bar{x}, F(\bar{x}))$, p), которая задает состояние равновесия для m, очевидно. Ввиду монотонности функции F можно найти оптимальную пару ($\bar{x}$, $F(\bar{x})$) такую, что

$$\alpha_M \bar{x} = F(\bar{x}). \tag{2.1}$$

Равенство (2.I) говорит о том, что $\bar{x}$ - собственный вектор функции F, а α_M - соответствующее ему собственное значение.

В теореме I.I мы установили, что если функция F, заданная равенством (I.2), удовлетворяет условиям

$$b_{kj} > 0 \ , \ k \in N \ , \ j \in M \ , \tag{2.2}$$

$$a_{ij} > 0, \ i \in N, \ j \in M \ , \tag{2.3}$$

то собственный вектор V и собственное значение λ, соответствующее V, единственны. Поэтому α_M совпадает с единственным собственным числом λ, т.е. $\lambda = \alpha_M$.

3. Устойчивость

Пусть $x[t, x(0)]$, или просто $x(t)$, - решение разностной системы

$$x(t+1) = F(x(t)), \tag{3.1}$$

соответствующее начальному состоянию $x(0)$.

Решение вида $\varkappa\lambda^t v$, где $\lambda > 0$, $v > 0$, $\varkappa$ - положительная константа, определяемая начальными условиями, является состоянием сбалансированного роста для системы (3.I).

Говорят, что $\varkappa\lambda^t v$ слабо устойчиво, если существуют конечные числа c и $\bar{c}$ такие, что

$$c\lambda^t v \leq x(t) \leq \bar{c}\lambda^t v \qquad (3.2)$$

для всех $t \geq 1$, и сильно устойчиво, если

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_i(t)}{v_i\lambda^t} = c > 0 \qquad (i = 1,2,\ldots,n). \qquad (3.3)$$

Для функции F, которая определяет технологический конус Z модели m, можно доказать теорему о слабой устойчивости, аналогичной теореме 9, доказанной в [2], т.е. имеет место

Теорема 3.I. Пусть (λ, V) - решение задачи $\lambda V = F(V)$. Тогда $\varkappa\lambda^t V$ слабо устойчиво, т.е. существуют C и $\bar{C}$ такие, что

$$c\lambda^t v \leq x(t) \leq \bar{c}\lambda^t v \qquad \text{для всех } t \geq 1.$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in \overset{\circ}{R}{}^+_n$ ($\overset{\circ}{R}{}^+_n$ - внутренность R^+_n). Тогда по свойству $\mathcal{H}$ $F(x) > 0$ для любого $x \in \overset{\circ}{R}{}^+_n$. Для $i \in N$ рассмотрим соотношение

$$\frac{x_i(t)}{x_i(0)} = \frac{x_i(t)}{x_i(t-1)} \cdot \frac{x_i(t-1)}{x_i(t-2)} \cdot \ldots \cdot \frac{x_i(1)}{x_i(0)}. \qquad (3.4)$$

Обозначив $\frac{x_i(t)}{v_i\lambda^t}$ через $y_i(t)$, подставим в правую часть (3.4) вместо $x_i(t), x_i(t-1), \ldots, x_i(0)$ значения $x_i(t) = y_i(t)\lambda^t v_i$, $x_i(t-1) = y_i(t-1)\lambda^{t-1}v_i, \ldots, x_i(0) = y_i(0)v_i$ соответственно, т.е.

$$\frac{x_i(t)}{x_i(0)} = \frac{y_i(t)\lambda^t v_i}{y_i(t-1)\lambda^{t-1}v_i} \cdot \ldots \cdot \frac{\lambda v_i y_i(1)}{v_i y_i(0)} = \frac{\lambda^t y_i(t) v_i}{y_i(0) v_i} \leq \frac{\lambda^t M(t) v_i}{x_i(0)}, \qquad (3.5)$$

где $M(t) = \max_{1\leq i\leq n} y_i(t)$.

Покажем, что $M(t)$ - монотонно убывающая функция от t. В самом деле, имеем $y_i(t)v_i\lambda^t = x_i(t)$ и $x_i(t+1) = y_i(t+1)v_i\lambda^{t+1}$ для любого $i \in N$. Следовательно,

$$x_i(t+1) = F(x(t)) = F(y_1(t)v_1\lambda^t, \ldots, y_n(t)v_n\lambda^t) = y_i(t+1)v_i\lambda^{t+1}.$$

Из положительной однородности и монотонности F имеем

$$v_i \lambda y_i(t+1) = F_i(v_1 y_1(t), \ldots, v_n y_n(t) \leq F_i(v_1 M(t), \ldots, v_n M(t)) \leq$$
$$\leq M(t) F_i(v_1, v_2, \ldots, v_n) = M(t) v_i \lambda,$$

следовательно, $y_i(t+1) \leq M(t)$ для любого $i \in N$.

В силу доказанной монотонности для $M(t)$, из (3.5) получим

$$\frac{x_i(t)}{x_i(0)} \leq \frac{\lambda^t M(t) v_i}{x_i(0)} \leq \frac{\lambda^t M(0) v_i}{x_i(0)},$$

т.е. $\lambda^t m(0) v_i \leq x_i(t)$ для любого $i \in N$.

Положив $\bar{c} = M(0)$, получим правое неравенство (3.2). Если теперь $m(t) = \min\limits_{1 \leq i \leq n} y_i(t)$, то совершенно аналогично можно доказать, что при $c = m(0)$ имеем левое неравенство (3.2) $m(t) \leq y_i(t+1)$, $m(t)$ — монотонно возрастает как функция от t. Тогда из (3.5) будем иметь

$$\frac{x_i(t)}{x_i(0)} = \frac{\lambda^t y_i(t) v_i}{y_i(0) v_i} \geq \frac{\lambda^t m(t) v_i}{y_i(0) v_i} \geq \frac{\lambda^t m(0) v_i}{x_i(0)}, \text{ т.е.}$$

$\lambda^t m(0) v_i \leq x_i(t)$ для всех $i \in N$.

Рассмотрим траекторию $x[t, x^*(0)]$, порождаемую системой $x(t+1) = F(x(t))$ и начальными условиями $x(0)$ и $x^*(0)$. Если существует число $s < \infty$, обладающее свойством $F(x[s, x(0)]) > F(x[s, x^*(0)])$ для всех $x(0)$ таких, что $x(0) \geq x^*(0)$, то, следуя [2], будем говорить, что F примитивна в точке $x^*(0)$.

ЛЕММА 3.I. Пусть F определена равенством (I.2) и удовлетворяет условиям (2.2) и (2.3). Если для каждой компоненты $i \in N$ существует хотя бы один индекс $j = j(i) \in M$ такой, что имеет место

$$\frac{v_i}{b_{ij}} < \frac{v_k}{b_{kj}} \quad \text{для всех } k \in N \text{ и } k \neq i, \tag{3.6}$$

то F примитивна в точке v, причём $s = 1$.

Доказательство. В самом деле, пусть $\tilde{v} \geq v$ и $\tilde{v}_{i_0} > v_{i_0}$. В силу (3.6),

$$\min_{1 \leq k \leq n} \frac{\tilde{v}_k}{b_{kj(i_0)}} - \frac{v_{i_0}}{b_{i_0 j(i_0)}} > 0,$$

а из предположения (2.3) следует, что $a_{ij(i_0)} \left[\min \frac{\tilde{v}_k}{b_{kj(i_0)}} - \frac{v_{i_0}}{b_{i_0 j(i_0)}}\right] > 0$ для всех $i \in N$, т.е. $F_i(\tilde{v}) > F_i(v)$ для всех $i \in N$.

Итак, для F выполняются все требования теоремы 10 (о сильной устойчивости) работы [2], т.е. имеет место

Т е о р е м а 3.2. Если для F выполняются условия леммы 3.I, то $\varkappa\lambda^t v$ сильно устойчиво по отношению к любому состоянию $x(0) > 0$.

З а м е ч а н и е . Различие между теоремой (3.2) настоящей работы и теоремой IO работы [2] состоит в том, что

а) в теореме IO требуется неразложимость функции F, а в нашем случае это требование заменено условием (2.3).

б) в теореме IO требуется примитивность F в начале координат, что не имеет места для функции F, определенной равенством (I.2) и удовлетворяющей условиям (2.2) и (2.3). В нашем случае это требование заменяется требованием $x(0) > 0$.

Доказательство теоремы (3.2) совпадает с доказательством теоремы IO работы [2].

4. Случай, когда в модели m некоторые компоненты имеются в изобилии

Пусть, как и в I, технологический конус Z определяется функцией

$$F_i(x) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \min\left(\frac{x_1}{b_{1j}}, \frac{x_2}{b_{2j}}, \ldots, \frac{x_n}{b_{nj}}\right) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.I}$$

для которой выполняются условия

$$b_{kj} \geq 0, \ k \in N, \ j \in M, \tag{4.2}$$

$$a_{ij} \geq 0, \ i \in N, \ j \in M. \tag{4.3}$$

Экономический смысл равенства $b_{kj} = 0$ состоит в том, что j-й способ не потребляет k-го продукта, или, что тоже самое, k-й продукт имеется в изобилии. Экономическая интерпретация F такая же, что и в I.

Положим для определенности

$$\frac{x_k}{b_{kj}} = \infty, \qquad \text{если} \quad b_{kj} = 0 \ (k \in N, \ j \in M) \tag{4.4}$$

(Равенство $b_{kj_0} = 0$ для всех $k \in N$ невозможно, так как при этом способ j_0 ничего не потребляет).

Для F, задаваемой (I.I), (4.2) и (4.3), очевидно выполняются свойства а), б), г), д) и е), определенные в I.

В силу свойств а), г) и е) имеет место теорема I, доказанная в [2] о существовании неотрицательного собственного вектора $\bar{V}$ для нелинейной задачи $\lambda V = F(V)$.

По этой же причине имеет место и теорема 9 .ой же работы о слабой устойчивости решения вида $\varkappa\lambda^t V$ разностной системы $x(t+1) = F(x(t))$, где F – функция, заданная (4.I), (4.2) и (4.3).

О п р е д е л е н и е I. Состояние сбалансированного роста называется регулярно устойчивым, если

$$\lim_{t\to\infty} x_i[t,x(0)]/v_i\lambda^t = \lim_{t\to\infty} x[t,x^*(0)]/v_i\lambda^t = c'$$

для любых начальных условий $x(0)$ и $x^*(0)$ таких, что $x(0) \geq x^*(0)$.

О п р е д е л е н и е 2. Функция F называется глобально примитивной, если она примитивна в каждой точке.

Пусть F определена равенством (I.2) и удовлетворяет условиям (2.3) и (4.I).

Т е о р е м а 4.I. Если для любого $k \in N$ имеется хотя бы один способ $j' \in M$ такой, что $b_{kj'} \neq 0$ и $b_{\ell j'} = 0$ для всех $\ell \in N$, $\ell \neq k$ и $a_{ij'} > 0$ для всех $i \in N$, то

I) собственный вектор $\bar{V}$ нелинейной задачи $\lambda V = F(V)$ единствен,

2) $\varkappa\lambda^t\bar{V}$ сильно устойчиво,

3) $\varkappa\lambda^t\bar{V}$ регулярно устойчиво.

Экономически условия теоремы 4.I интерпретируются следующим образом: из продукта $i \in N$ можно сделать любой другой продукт $k \in N$.

Доказательство теоремы очевидно. Утверждение I) следует из примитивности F в точке $\bar{V}$, причём $s = 1$, тем более имеет место неразложимость F (теорема 3 раб. [2]) .

2) условия теоремы обеспечивают глобальную примитивность функции F , поэтому примитивность в нуле очевидна. Глобальная примитивность дает также утверждение 3) (теоремы IO и II работы [2]).

5. Обобщение

Функционал f , определенный на R_n^+ , назовем суперлинейным, если он

1) положительно однороден, т.е. если $x \in R_n^+$ и $\lambda \geq 0$, то

$f(\alpha x) = \alpha f(x)$;

2) супераддитивен т.е. если $x', x'' \in R^+_n$, то

$$f(x'+x'') \geq f(x') + f(x'');$$

3) непрерывен;

4) $f(0) = 0$.

Пусть технологический конус модели $\mathfrak{M}$ описывается функцией

$$F_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \min_{1 \leq k \leq n} (f_{kj}(x)) \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (5.1)$$

где $a_{ij} \geq 0$, а f_{kj} – суперлинейные функционалы, определенные на R^+_n.

Экономическая интерпретация модели $\mathfrak{M}$ такая же, как и в I.

Очевидно, функция F, определенная соотношением (5.1), непрерывна, монотонна, вогнута, положительно однородна и $F(R^+_n) \subset R^+_n$. Существование неотрицательного собственного вектора V для нелинейной задачи $\lambda V = F(V)$ даёт теорема I работы [2].

Т е о р е м а 5.1. Если для любого $x \in R^+_n$, $x \neq 0$, существует индекс $j = j(x) \in M$, такой, что

$$\min_{1 \leq k \leq n} f_{kj}(x) > 0 \qquad (5.2)$$

и

$$a_{ij} > 0 \quad \text{для всех} \quad i \in N \quad \text{и} \quad j = j(x) \in N, \qquad (5.3)$$

то собственный вектор $\bar{V} > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\bar{V}_{i_0} = 0$ для какого-нибудь $i_0 \in N$. Это означает, что $F_{i_0}(\bar{V}) = 0$, т.е.

$$\sum_{j=1}^{m} a_{i_0 j} \min_{1 \leq k \leq n} (f_{kj}(x)) = 0.$$

По условию теоремы для вектора $\bar{V} \neq 0$ существует $j' \in N$ такой, что $\min_{1 \leq k \leq n} (f_{kj'}(x)) > 0$, и в силу (5.3) имеет место $a_{ij'} \min_{1 \leq k \leq n} (f_{kj'}(\bar{V})) > 0$ для всех $i \in N$. Отсюда $F_i(\bar{V}) > 0$ для всех $i \in N$, что противоречит предположению $\bar{V}_{i_0} = 0$, а следовательно, и $F_{i_0}(\bar{V}) = 0$.

СЛЕДСТВИЕ. Если для F выполняются все условия теоремы 5.1, то F глобально примитивна, причём $s = 1$. В самом деле, пусть $x', x'' \in R^+_n$ и $x' > x''$. Из монотонности F имеем $F(x') \geq F(x'')$. Очевидно, что $\tilde{x} = x' - x'' \in R^+_n$. Из условий теоремы следует, что $F(\tilde{x}) > 0$, а из вогнутости F имеем

$$F(x'') < F(x''+\tilde{x}) - F(\tilde{x}) = F(x') - F(\tilde{x}) < F(x').$$

Т е о р е м а 5.2. Пусть для функции F , заданной равенством (5.I), выполняется условие (5.2), а условие (5.3) заменяется условием

$$a_{ij} > 0 \text{ для всех } i \in N \text{ и для всех } j \in M . \qquad (5.4)$$

Тогда собственный вектор $\bar{U}$ единствен.

Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы I.I.

Т е о р е м а 5.3. Если для F, определенной (5.I), выполняются (5.2) и (5.4), то

I) собственный вектор $\bar{U}$ единствен;

2) решение вида $\varkappa \lambda^t \bar{U}$ слабо устойчиво;

3) решение вида $\varkappa \lambda^t \bar{U}$ сильно устойчиво;

4) решение вида $\varkappa \lambda^t \bar{U}$ регулярно устойчиво.

(Доказательство теоремы 5.3 следует из теоремы 3, 9, I0, II работы [2]).

В заключение автор выражает признательность А.М.Рубинову за ценные советы и внимание к работе.

Л и т е р а т у р а

1. Ю.И.Гильдерман, К.Н.Кудрина, И.А.Полетаев, Сборн."Исследования по кибернетике," 1969.

2. Michio Morishima. Equilibrium stability and growth, 1964.

3. Д.Гейл. Замкнутая линейная модель производства. Сборн."Линейные неравенства и смежные вопросы." Изд-во Иностр. лит. Москва, 1959.

Поступила в редакцию
5.VI. 1970 г.