УДК 519.95

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ НАХОЖДЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОГО СЕВООБОРОТА

А.Ф.Батищев, В.А.Перепелица

Пусть на площади S выращивается n культур, перенумеруем их числами $i=1,2,\dots,n$; $n\geq 3$. Севооборотом (польности p) называем последовательность из p полей одинаковой площади, к которым (полям) привязана последовательность из культур. Одно поле засевается одной культурой. Эти культуры ежегодно циклически сменяют друг друга на полях указанной последовательности. Допускается, что некоторые культуры входят по нескольку раз в вышеуказанную последовательность. Если на всей площади S вводится несколько различных севооборотов,то такую систему севооборотов будем называть S - севооборотом, а элементы этой системы - элементарными севооборотами.

Перечислим все обозначения и условия, которым должен удовлетворять искомый S - севооборот:

1) должен быть учтён список запретов, который задаётся в виде множества пар $\alpha=\{i,j\}$, $1\leq i,j\leq n$, где принадлежность пары (i , j) множеству α означает, что запрещается сеять культуру i после культуры j ; множество α содержит все пары (i, i);

2) урожайность y_{ij} каждой культуры i зависит только от культуры - предшественника j и не зависит от каких-либо других факторов;

3) себестоимость z_{ij} центнера урожая i -ой культуры зависит только от предшественника j ;

4) для всех культур $i=1,2,\dots n$ установлен план производства

$\sigma_i : \sum_{j=1}^{n} s_{ij} y_{ij} \geq \sigma_i$, где s_{ij} - размер площади, на которой предшественником i -ой культуры является j -ая культура; для некоторых культур установлен план продажи государству $\sigma_i^* \leq \sigma_i$;

5) за урожай i -ой культуры, сданный по плану, выплачивается $\sigma_i^* C_i$ рублей, за каждый центнер i -ой культуры, сданный сверх плана, выплачивается $C_i + \Delta C_i$ рублей; если культура i государству не продаётся, то $C_i = \Delta C_i = 0$.

S - севооборот даёт чистый доход D , определяемый следующим выражением:

$$D = \sum_{(i,j) \in \alpha} s_{ij} a_{ij} - \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^* \Delta C_i \ , \qquad (1)$$

где величина a_{ij} определена только для пар $(i,j) \in \alpha$ и равна $a_{ij} = y_{ij}(c_i + \Delta c_i - z_{ij})$. Так как $\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^* \Delta C_i$ есть величина постоянная, то для отыскания S -севооборота, при котором D достигает максимума (назовём его оптимальным S -севооборотом), достаточно отыскать такой S -севооборот, при котором $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} s_{ij} a_{ij}$ достигает максимума.

Ставится задача отыскания оптимального S -севооборота, удовлетворяющего условиям 1)-5); точнее, требуется построить достаточно эффективный алгоритм, который бч решал эту задачу. В настоящей работе даётся описание и обоснование такого алгоритма.

Севооборот польности p будем называть элементарным и обозначать $\langle d; i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots, i_p \rangle$, где d - площадь одного поля в га, а i_{k+1} является предшественником для культуры i_k , $i_{p+1} = i_1$. Пусть дан S -севооборот, состоящий из ℓ элементарных севооборотов $S^{(\nu)} = \langle d_\nu; i_1, i_2, \ldots, i_{p_\nu} \rangle$, $1 \leq \nu \leq \ell$. Введём величину $b_{ij}^{(\nu)} = m_{ij} d_\nu$, где m_{ij} - число пар (i_k, i_{k+1}) в $S^{(\nu)}$ таких, что $i_k = i$ и $i_{k+1} = j$. Тогда севообороту $S^{(\nu)}$ однозначно соответствует матрица $B_\nu = \| b_{ij}^{(\nu)} \|$, $i,j = 1,2,\ldots,n$, которую условимся называть севооборотной. Заметим, что

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(\nu)} = \sum_{j=1}^{n} b_{ji}^{(\nu)} \ , \quad i = 1,2,\ldots,n \ , \qquad (2)$$

и

$$\sum_{\nu=1}^{\ell} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(\nu)} = S \ . \qquad (3)$$

Заданному S -севообороту однозначно соответствует матрица

$A=\|s_{ij}\|=\sum_{\nu=1}^{\ell} B_\nu$. Очевидно, из (2) следует

$$\sum_{j=1}^{n} s_{ij}=\sum_{j=1}^{n} s_{ji} \quad , \quad i=1,2,\dots,n \tag{4}$$

Обозначим через $\mathfrak{A}$ множество всевозможных матриц $A=\|s_{ij}\|$, $1\le i,j\le n$, с неотрицательными элементами, для каждой из которых выполняются соотношения (4), и $s_{ii}=0$ для всякого $i=1,2,\dots,n$. Покажем, что для любой матрицы $A\in\mathfrak{A}$ можно построить некоторый $S(A)$ -севооборот, состоящий из ℓ , $\ell<n^2-n$, элементарных севооборотов $S^{(\nu)}$, удовлетворяющих соотношению (2); здесь

$$S(A)=\sum_{s_{ij}\in A} s_{ij}=\sum_{\nu=1}^{\ell}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}^{(\nu)} .$$

Пусть дана матрица $A\in\mathfrak{A}$, через $A_\tau=\|s_{ij}^{(\tau)}\|$ обозначим разность $A-\sum_{\nu=0}^{\tau} B_\nu$, где определим $A_0=A$.

Утверждение. Для всякой ненулевой матрицы $A\in\mathfrak{A}$ можно построить элементарный севооборот, которому соответствует севооборотная матрица B такая, что $A_1\in\mathfrak{A}$, где $A_1=A-B$, и число ненулевых элементов в A_1 по крайней мере на I больше, чем в A .

Доказательство. В i_1 -ой строке матрицы A отметим звёздочкой $*$ первый по порядку ненулевой элемент, пусть это будет $s_{i_1 i_2}$. Далее в строке i_2 отмечаем звёздочкой $*$ первый по порядку ненулевой элемент $s_{i_2 i_3}$ и начинаем искать первый ненулевой элемент в строке i_3 . Продолжая этот процесс, мы в некоторой строке i_k повторно отметим звёздочкой $*$ первый по порядку ненулевой элемент $s_{i_k i_{k+1}}$. После чего снимаем звёздочки $*$ со всех тех элементов, которые мы отмечали до того, как первый раз попали в строку i_k . Полученную матрицу обозначим A^* . Пусть $\alpha=\min s_{ij}^*$, где минимум берётся по всем отмеченным элементам из A^* . Через $B=\|b_{ij}\|$, $1\le i,j\le n$, обозначим матрицу, в которой $b_{ij}=\alpha$, если s_{ij} в A^* отмечен, и $b_{ij}=0$ - в противном случае. По построению каждая строка и каждый столбец матрицы B содержат не более одного ненулевого элемента. Причем если i -ая строка содержит ненулевой элемент, то такой же элемент содержит и i -й столбец. Последнее означает, что B удовлетворяет соотношению (2). По определению индексы отмеченных элементов в A^* образуют циклическую подстановку

$$\begin{pmatrix} i_k & i_{k+1} & \dots & i_p \\ i_{k+1} & i_{k+2} & \dots & i_k \end{pmatrix}=(i_k, i_{k+1},\dots, i_p)$$

степени $(p-k+1)$. Отсюда матрица B соответствует элементарному севообороту $S^{(0)}=\langle d; i_k, i_{k+1}, \ldots, i_p\rangle$ и, следовательно, является севооборотной матрицей.

Так как по определению $b_{ij}\leq s_{ij}$ для всех $i, j=1,2,\ldots,n$, то из соотношений (2) и (4) следует, что для матрицы $A_1=\|s_{ij}^{(1)}\|$ выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^{n} s_{ij}^{(1)}=\sum_{j=1}^{n}(s_{ij}-b_{ij})=\sum_{j=1}^{n}(s_{ji}-b_{ji})=\sum_{j=1}^{n} s_{ji}^{(1)},$$

следовательно, $A_1\in\mathfrak{A}$. Наконец, существует такая пара (i_0, j_0), что $s_{i_0j_0}=b_{i_0j_0}=d$, что означает равенство $s_{i_0j_0}^{(1)}=0$. Утверждение доказано полностью.

Обозначим $B=B_0$. Из утверждения следует, что для всякой матрицы $A\in\mathfrak{A}$ эффективным образом можно построить такую последовательность севооборотных матриц B_ν, $\nu=0,1,2,\ldots,\ell$, $\ell<n^2-n$, что $\sum_{\nu=0}^{\ell}B_\nu=A$. Поскольку по построению индексы ненулевых элементов в каждой из B_ν образуют циклическую подстановку, то по матрицам B_ν однозначно строятся элементарные севообороты $S^{(\nu)}$, $\nu=0,1,2,\ldots,\ell$, образующие S-севооборот, где $S=\sum_{s_{ij}\in A}s_{ij}$.

Следовательно, для решения задачи нахождения оптимального S-севооборота достаточно найти такую матрицу $A=\|s_{ij}\|$ $i,j=1,2,\ldots,n$, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}s_{ij}=S$, для которой выполняются условия 1) и 4) и функционал (1) достигает максимума. Для отыскания такой матрицы A достаточно решить следующую двухиндексную задачу линейного программирования:

максимизируется функционал $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}s_{ij}$, где $a_{ij}=y_{ij}(c_i+\Delta c_i-z_{ij})$, если $(i,j)\bar{\in}\alpha$, и $a_{ij}=-\infty$, если $(i,j)\in\alpha$, при следующих линейных ограничениях:

1) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}s_{ij}=S$;

2) $\sum_{j=1}^{n}s_{ij}-\sum_{j=1}^{n}s_{ji}=0, \quad i=1,2,\ldots,n$;

3) $\sum_{j=1}^{n}y_{ij}s_{ij}\geq\sigma_i, \quad i=1,2,\ldots,n$;

4) $s_{ij}\geq 0, \quad i=1,2,\ldots,n$.

Перепишем эту задачу в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^{n} L_i S^{(i)} \longrightarrow max$$

1-2) $\quad E_i S^{(i)} = M$,

3) $\quad \mathcal{Y}_i S^{(i)} \geqslant \sigma_i$,

4) $\quad X^{(i)} \geqslant 0$,

здесь вектор-строка $L_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$, вектор-столбец $S^{(i)} = \{s_{i1}, s_{i2}, \ldots, s_{in}\}$, вектор-строка $\mathcal{Y}_i = (y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{in})$, вектор-столбец $M = \{s, 0, 0, \ldots, 0\}$ с $(n+1)$ компонентой;

$$\text{матрица} \quad E_i = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccc} & & & & & i & & & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & 1 & \cdots & \cdots & & \vdots & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & & & & & \vdots & & & \\ & -1 & & 0 & & \vdots & & 0 & \\ & & \ddots & & & \vdots & & & \\ & 0 & & \ddots & & \vdots & & & \\ & & & & -1 & \vdots & & & \\ 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ & & & & & & -1 & & 0 \\ & & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & -1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ i+1 \\ \text{размерности} \\ (n+1) \times n \\ \\ \end{array}$$

Специальный алгоритм для решения этой узкоблочной задачи опубликован в [2]. Так как число ограничений в нашей задаче равно $2n+1$, то из теоремы 4 в книге [I] , стр. 49, следует, что число ненулевых элементов s_{ij} в оптимальном решении A не превышает $2n+1$. Это означает, что число $(\ell+1)$ севооборотных матриц в последовательности B_ν , $\nu = 0, 1, 2, \ldots, \ell$, не превосходит $2n$.

В заключение авторы выражают признательность Г.П.Акилову и Н.И.Глебову за ценные советы и внимание к работе.

Литература

I. Д.Б.Юдин, Е.Г.Гольштейн. Задачи и методы линейного программирования. Изд-во "Советское радио", М., I96I.

2. Р.А.Звягина. Программа реализации на М-20 модифицированного симплекс-метода с узкоблочной матрицей. Оптимальное планирование, вып. 4, Изд-во "Наука", Сибирское отделение, Новосибирск, I966.

Поступила в редакцию
I3.II. I970 г.