УДК 5I2.25/26 + 5I9.3:330.II5

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ВЕРОЯТНОСТНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

И.И.Бочкарева

I°. Рассматривается задача стохастического линейного программирования с совместным вероятностным ограничением:

$$\min c^T x \ , \tag{I.I}$$

$$P\{Ax \geq b\} \geq \alpha, \tag{I.2}$$

$$x \geq 0, \tag{I.3}$$

A - матрица ($m \times n$); c , $x \in R^n$; b - m -мерный случайный вектор с функцией распределения $F(y) = \prod_{i=1} F_i(y_i)$ (компоненты вектора b распределены независимо с функциями распределения $F_i(y_i)$); $0 < \alpha < 1$.

Известно (см., например, [3]), что задача (I.I)-(I.3) эквивалентна следующей детерминированной задаче нелинейного программирования:

$$\min c^T x \ , \tag{2.I}$$

$$Ax - y = 0, \tag{2.2}$$

$$F(y) \geq \alpha, \tag{2.3}$$

$$x \geq 0. \tag{2.4}$$

В статье Л.М.Абрамова и автора (см. [I]) были выяснены условия, при которых задача (2.I)-(2.4) является задачей выпуклого программирования. В настоящей работе предлагается алгоритм решения этой задачи, основанный на идее Келли ([4]) построения секущих гиперплоскостей (см. также, [2], [5]). При этом мы будем предполагать, что выполняется условие α - квазивогнутости функции $F(y)$ (см. [1]), функции $F_i(y_i)$ имеют на $(-\infty, +\infty)$ непрерывные положительные плотности $f_i(y_i)$ и $C > 0$.

2^0. Рассмотрим в R^m множество $\mathcal{D} = \{y / F(y) \geq \alpha\}$. Будет построена последовательность таких многогранных выпуклых множеств $\mathcal{D}_0 \supset \mathcal{D}_1 \supset \mathcal{D}_2 \supset \ldots$, содержащих множество $\mathcal{D}$, что если $(x^{(k)}, y^{(k)})$ – решение задачи линейного программирования:

$$\min c^T x, \tag{3.1}$$

$$Ax - y = 0, \tag{3.2}$$

$$x \geq 0, \tag{3.3}$$

$$y \in \mathcal{D}_k, \tag{3.4}$$

то последовательность $\{y^{(k)}\}$ сходится к точке $\bar{y} \in \mathcal{D}$ и последовательность $\{c^T x^{(k)}\}$ сходится к $\min c^T x$ на множестве точек $x \in R^n$, удовлетворяющих ограничениям (2.2)-(2.4).

Определим $y_i(\alpha)$ из уравнений $F_i(y_i(\alpha)) = \alpha$ и положим $\mathcal{D}_0 = \{y \in R^m, y_i \geq y_i(\alpha)\}$.

Предположим, что на k-ом шаге построено многогранное выпуклое множество $\mathcal{D}_k \supset \mathcal{D}$. Решаем задачу (3.1) - (3.4). Решение этой задачи обозначим $(x^{(k)}, y^{(k)})$. Очевидно, что если $y^{(k)} \in \mathcal{D}$, то $(x^{(k)}, y^{(k)})$ – решение задачи (2.1) - (2.4). В противном случае вычислим вектор

$$\nabla F(y^{(k)}) = \left(\frac{\partial F(y^{(k)})}{\partial y_1}, \frac{\partial F(y^{(k)})}{\partial y_2}, \ldots, \frac{\partial F(y^{(k)})}{\partial y_m} \right),$$

проведем из точки $y^{(k)}$ луч $L_k = \{y = y^{(k)} + \lambda \nabla F(y^{(k)}) \; ; \; \lambda > 0\}$ и определим $z^{(k)}$ – точку пересечения луча L_k с поверхностью $F(y) = \alpha$

$$z^{(k)} = y^{(k)} + \lambda(y^{(k)}) \nabla F(y^{(k)}).$$

Здесь $\lambda(y^{(k)})$ - решение уравнения

$$F(y^{(k)} + \lambda \nabla F(y^{(k)})) = \alpha.$$

Проведем через $z^{(k)}$ касательную гиперплоскость к поверхности $F(y) = \alpha$

$$\nabla F(z^{(k)})(y - z^{(k)}) = 0$$

и обозначим через M_k полупространство $\nabla F(z^{(k)})(y - z^{(k)}) \geq 0$. Положим $\mathcal{D}_{k+1} = \mathcal{D}_k \cap M_k$ и перейдем к следующему шагу.

3^0. Доказательство сходимости алгоритма разобьем на несколько частей.

А. Если $0 < \alpha < 1$, то уравнение

$$F(y + \lambda \nabla F(y)) = \alpha \tag{4}$$

имеет единственное решение при любом $y \in R^m$ и определяет функцию $\lambda = \lambda(y) = \lambda(y_1, y_2, \dots, y_m)$, непрерывную (и дифференцируемую) на R^m. Если $F(y) < \alpha$, то $\lambda(y) > 0$.

Рассмотрим функцию от λ

$$\varphi(\lambda) = F(y + \lambda \nabla F(y)).$$

Поскольку $\nabla F(y) > 0$, то $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} \varphi(\lambda) = 0$, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \varphi(\lambda) = 1$. Поэтому найдутся такие λ' и λ'', что $\varphi(\lambda') < \alpha$, $\varphi(\lambda'') > \alpha$. В силу непрерывности функции $\varphi(\lambda)$ существует $\bar{\lambda}$ такое, что $\varphi(\bar{\lambda}) = \alpha$. Единственность решения уравнения (4) следует из монотонности функции $\varphi(\lambda)$.

Непрерывность (и дифференцируемость) $\lambda(y)$ следует из общих теорем о неявных функциях.

Если $F(y) < \alpha$, то $\varphi(0) < \alpha$ и $\lambda(y) > 0$.

Б. Если множество точек (x, y), удовлетворяющих ограничениям (2.2)-(2.4) непусто, то последовательность $\{y^{(k)}\}$, определенная в процессе реализации алгоритма, ограничена.

Пусть $(\hat{x}, \hat{y})$ - допустимый план задачи (2.I)-(2.4). Для любых $(x^{(k)}, y^{(k)})$ выполняется

$$|y^{(k)}| \le \|A\| \, |x^{(k)}|. \tag{5}$$

Пусть $c_0 = \min c_j > 0$. Тогда

$$|x^{(k)}| \le \sum_i x_i^{(k)} = \frac{1}{c_0} \sum_i c_0 x_i^{(k)} \le \frac{1}{c_0} c^T x^{(k)} \le \frac{1}{c_0} c^T \hat{x}. \tag{6}$$

Из (5) и (6) следует

$$|y^k| \le \frac{\|A\|}{c_0} c^T \hat{x}, \quad k = 1, 2, \dots .$$

В. Если последовательность $\{y^{(k)}\}$ сходится к $\bar{y}$, то соответствующая последовательность

$\{z^{(k)} = y^{(k)} + \lambda(y^{(k)}) \nabla F(y^{(k)})\}$ сходится к $\bar{z} = \bar{y} + \lambda(\bar{y}) \nabla F(\bar{y})$.

Это утверждение следует из непрерывности функций $\lambda(y)$ и $\nabla F(y)$.

Г. Справедливо неравенство $\nabla F(z^{(k)})(y^{(k)} - z^{(k)}) \le 0$, причем $\nabla F(z^{(k)})(y^{(k)} - z^{(k)}) = 0$ тогда и только тогда, когда $y^{(k)} = z^{(k)}$.

Имеем $z^{(k)} = y^{(k)} + \lambda(y^{(k)}) \nabla F(y^{(k)})$. В силу свойств функции $F(y)$

и положительности $\lambda(y^{(k)})$ (см. A)

$$\nabla F(z^{(k)})(y^{(k)}-z^{(k)}) = \nabla F(z^{(k)})(-\lambda(y^{(k)})\nabla F(y^{(k)})) = -\lambda(y^{(k)})\nabla F(z^{(k)})\nabla F(y^{(k)}) \leq 0,$$

и равенство имеет место, только когда $\lambda(y^{(k)}) = 0$.

Д. Рассмотрим семейство гиперплоскостей $\nabla F(z)(y-z)=0$, определенных для точек $z \in R^m$. Пусть A – компактное множество в R^m, $\bar{z}$ – такая точка из R^m, что $\nabla F(\bar{z})(y-\bar{z})<0$ для любого $y \in A$. Существует такое $\delta>0$, что если $|z-\bar{z}|<\delta$, то $\nabla F(z)(y-z)<0$ для любого $y \in A$.

Пусть $\mathcal{D}(\bar{z},1)$ – замкнутый шар радиуса I с центром в точке $\bar{z}$. На множестве $\mathcal{D}(\bar{z},1)\times A = T$ определим функцию

$$\phi(z,y)=\nabla F(z)(y-z).$$

По условию $\phi(\bar{z},y)<0$ для любого $y \in A$. В силу непрерывности функции $\phi(\bar{z},y)$ и компактности множества A существует $\max\limits_{y\in A}\phi(\bar{z},y)=-\varepsilon<0$. Функция $\phi(z,y)$ равномерно непрерывна на множестве T, поэтому существует такое $\delta>0$, что если $z',z''\in\mathcal{D}(\bar{z},1)$ и $|z'-z''|<\delta$, $|y'-y''|<\delta$, то $|\phi(z',y')-\phi(z'',y'')|<\varepsilon/2$.

Тогда для любого $z\in\mathcal{D}(\bar{z},\delta)$ имеем

$$\phi(z,y)=\phi(z,y)-\phi(\bar{z},y)+\phi(\bar{z},y)\leq|\phi(z,y)-\phi(\bar{z},y)|+\phi(\bar{z},y)<\varepsilon/2-\varepsilon=$$
$$=-\varepsilon/2<0.$$

Е. Из последовательности $\{y^{(k)}\}$ можно выделить подпоследовательность $\{y^{(k)_i}\}$, сходящуюся к точке $\bar{y}\in\mathcal{D}$.

Последовательность $\{y^{(k)}\}$ ограничена (Б), следовательно, из нее можно выделить подпоследовательность $\{y^{(k)_i}\}$, сходящуюся к $\bar{y}$. Остается доказать, что $\bar{y}\in\mathcal{D}$.

Подпоследовательности $\{y^{(k)_i}\}$ отвечает подпоследовательность $\{z^{(k)_i}\}$, сходящаяся к $\bar{z}$ (В).

Пусть $F(\bar{y})<\alpha$, т.е. $\bar{y}\in\mathcal{D}$. Построим гиперплоскость $\nabla F(\bar{z})(y-\bar{z})=0$. В силу (Г), имеем $\nabla F(\bar{z})(\bar{y}-\bar{z})<0$. Очевидно, существует такое $\varepsilon>0$, что для $y\in R^m$, $|y-\bar{y}|<\varepsilon$, выполняется неравенство $\nabla F(\bar{z})(y-\bar{z})<0$.

В силу (Д), существует такое $\delta>0$, что для любых

$z\in R^m$, $|z-\bar{z}|<\delta$ и $y\in R^m$, $|y-\bar{y}|<\varepsilon$;

справедливо неравенство $\nabla F(z)(y-z)<0$.

Теперь найдем такой номер N, что для $i>N$

$$|y^{(k)_i} - \bar{y}| < \varepsilon \quad \text{и} \quad |z^{(k)_i} - z| < \delta .$$

Если теперь $\bar{i} > N$, то

$$\nabla F(z^{(k)_{\bar{i}}})(y^{(k)_{\bar{i}}+1} - z^{(k)_{\bar{i}}}) < 0$$

и $y^{(k)_{\bar{i}}+1} \in \mathcal{D}_{k_{\bar{i}}+1}$, что невозможно.

X. Покажем, что последовательность $\{y^{(k)}\}$ имеет единственную предельную точку.

Пусть $\bar{y}$ и $\bar{\bar{y}}$ - различные предельные точки последовательности $\{y^{(k)}\}$. Тогда $(\bar{x}, \bar{y})$, $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$ - оптимальные планы задачи (2.I)-(2.4), где $\bar{x}$ - решение задачи линейного программирования $\min c^T x \,/\, Ax = \bar{y}$, $x \geq 0$, а $\bar{\bar{x}}$ - решение задачи $\min c^T x \,/\, Ax = \bar{\bar{y}}$, $x \geq 0$. Легко видеть, что $(\tilde{x} = \frac{\bar{x} + \bar{\bar{x}}}{2}, \tilde{y} = \frac{\bar{y} + \bar{\bar{y}}}{2})$ является решением задачи (2.I) - -(2.4), так что

$$c^T \bar{x} = c^T \bar{\bar{x}} = c^T \tilde{x} .$$

Точка $\tilde{y}$ является внутренней для множества $\mathcal{D}$, так как плотности функций распределения $F_i(y_i)$ всюду положительны. Следовательно, на отрезке, соединяющем точку $\tilde{y}$ с нулем, найдется точка $\hat{\bar{y}} = \mu \tilde{y}$, $\mu < 1$ и $F(\hat{\bar{y}}) \geq \alpha$. Очевидно, точка $(\mu\tilde{x}, \mu\tilde{y})$ является допустимой для задачи (2.I)-(2.4), и

$$c^T \mu \tilde{x} < c^T \tilde{x},$$

что противоречит оптимальности $(\tilde{x}, \tilde{y})$.

Итак, последовательность $\{y^{(k)}\}$ имеет единственную предельную точку, а следовательно, и сама к ней сходится.

4°. Описанный алгоритм позволяет на каждом шаге производить оценку полученного результата.

Обозначим через $\hat{x}^{(k)}$ решение задачи:

$$\min c^T x ,$$
$$Ax = z^{(k)},$$
$$x \geq 0,$$

и пусть

$$\delta_k = \min_{i=1,2,\dots,k} c^T \hat{x}^{(i)}$$

Тогда

$$c^T x^{(k)} \le c^T \bar{x} \le \delta_k \quad \text{и} \quad c^T \bar{x} - c^T x^{(k)} \le \delta_k - c^T x^{(k)}.$$

Литература

I. Л.М.Абрамов, И.И.Бочкарева. О задаче стохастического программирования с вероятностными ограничениями.

2. А.А.Каплан. Об одном методе решения задач выпуклого программирования. "Экономика и математические методы". Новосибирск, 1968, том IУ, вып. I.

3. C.Miller, H.Wagner. Chance- Constrained Programming with Joint Constraints. Operat. Res., 13 (1965), No.6, 930-945.

4. J.E.Kelley. The Cutting-Plane Method for Solving Convex Programs. J. Soc. Indust. and Appl. Math., 8(1960), 703-712.

5. P.Wolfe. Accelerating the Cutting Plane Method for Nonlinear Programming. J. Soc. Indust. and Appl. Math, 9(1961), No.3.

Поступила в редакцию
26.IX. 1969 г.