УДК 512.25/26

ЗАМЕЧАНИЕ О НАЧАЛЕ СЧЕТА В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

В.А.Булавский

При решении задач линейного программирования прямым методом последовательного улучшения допустимого вектора обычным является двухэтапный процесс, на первом этапе которого отыскивается некоторое крайнее решение системы ограничений. При этом как правило поступают следующим образом.

Пусть решаемая задача линейного программирования состоит в нахождении значений неизвестных x_j, $j=1,2,\dots,n$, максимизирующих величину

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1}$$

при ограничениях:

$$\left\{\begin{array}{l} \sum\limits_{j=1}^{n} x_j A_j = b, \\ \quad x_j \geq 0, \quad j=1,2,\dots,n. \end{array}\right. \tag{2}$$

Здесь A_j, $j=1,2,\dots,n$, и b -векторы из R^m; c_j, $j=1,2,\dots,n$, вещественные числа. Чтобы начать решение методом последовательного улучшения допустимого вектора, необходимо знать некоторое множество $J \subset \{1,2,\dots,n\}$, обладающее свойствами:

а) семейство $\{A_j\}_{j\in J}$ является базисом R^m;

б) решение системы $\sum\limits_{j\in J} x_j A_j = b$ неотрицательно.

Если вид столбцов A_j не позволяет сразу найти нужное множество номеров, то решают вспомогательную задачу линейного программирования, состоящую в нахождении значений переменных x_j, $j=1,2,\dots,n+m$, минимизирующих величину

$$\sum_{j=n+1}^{n+m} x_j$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n+m} x_j A_j = b, \\ \quad x_j \geq 0, \ j=1,2,\dots,n+m. \end{cases} \tag{3}$$

Дополнительные столбцы A_j, $j=n+1,n+2,\dots,n+m$, выбираются так, чтобы для вспомогательной задачи можно было бы взять в качестве исходного множества $\mathcal{J}$ множество $\{n+1, n+2, \dots, n+m\}$. Чаще всего за дополнительные столбцы берут с тем или иным знаком столбцы естественного базиса пространства R^m.

В результате решения вспомогательной задачи отыскиваются значения искомых неизвестных x_j°, $j=1,2,\dots,n+m$, удовлетворяющие системе (3) и, если система (2) совместна, то такие, что $x_j^\circ = 0$ при $j=n+1,n+2,\dots,n+m$. Поэтому набор x_j°, $j=1,2,\dots,n$, дает решение системы (2). При этом одновременно получается множество $\mathcal{J} \subset \{1,2,\dots,n+m\}$, обладающее свойствами а) и б), если в последнем предел суммирования заменить на $n+m$, и решение двойственной задачи $y_\circ \in R^m$, удовлетворяющее соотношениям:

$$\begin{cases} y_\circ' A_j = \begin{cases} 0, & j \in \mathcal{J} \setminus S, \\ 1, & j \in S, \end{cases} \\ y_\circ' A_j \leq 0, \quad j \in \{1,2,\dots,n\} \setminus \mathcal{J}. \end{cases} \tag{4}$$

Здесь через S обозначено множество $\mathcal{J} \cap \{n+1, n+2, \dots, n+m\}$.

Если множество S пустое, то на втором этапе, когда решается задача (I) - (2), полученное множество $\mathcal{J}$ можно принять за исходное. Если же множество S не является пустым, то так поступать нельзя, поскольку в множестве $\mathcal{J}$ остались номера столбцов A_j, не присутствующих в постановке задачи (I) - (2). Ниже предлагается простой прием, позволяющий обойти эту трудность.

Рассмотрим новую задачу линейного программирования, в которой максимизируется форма (I) при ограничениях:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_j A_j + \sum_{j \in S} x_j(-A_j) = b, \\ \quad x_j \geq 0, \ j \in \{1,2,\dots,n\} \cup S. \end{cases} \tag{5}$$

Поскольку $x_j^\circ = 0$ при $j \in S$, то найденный набор значений x_j°, $j \in \{1,2,\dots,n\} \cup S$ удовлетворяет системе (5) и, следовательно, множество $\mathcal{J}$ годится для начала решения этой последней задачи. Мы покажем, что во всяком решении системы (5) $x_j=0$ при $j\in S$. Действительно, умножив векторное равенство в (5) слева на строку y_0', получим

$$\sum_{j=1}^{n} x_j(y_0'A_j)-\sum_{j\in S}x_j(y_0'A_j)=y_0'b .$$

Ввиду соотношений (4) и неотрицательности x_j отсюда получается неравенство:

$$\sum_{j\in S} x_j \le -y_0'b .$$

Но в силу известных соотношений двойственности для задачи линейного программирования $y_0'b=\sum_{j=n+1}^{n+m} x_j^0=0$, и, следовательно,

$$\sum_{j\in S} x_j \le 0 .$$

Учитывая условия неотрицательности переменных x_j, получим, что $x_j=0$ при $j\in S$. Таким образом, решив задачу с системой ограничений (5), мы тем самым решим и задачу с системой ограничений (2). Заметим также, что если в решении вспомогательной задачи величина $\sum_{j=n+1}^{n+m} x_j^0$ оказалась больше нуля, но достаточно малой для того, чтобы мы могли пренебречь соответствующим нарушением равенств в системе (2), то подправив надлежащим образом правую часть b, можно и в этом случае применить описанный прием.

В заключение отметим, что если решение задачи ведется с использованием на каждом шаге обратной матрицы к матрице из столбцов $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, то изменение знаков некоторых столбцов A_j достигается изменением знака у соответствующих строк обратной матрицы. Если же решение ведется по схеме симплекс-метода, когда хранится таблица коэффициентов разложения всех столбцов A_j по базису $\{A_j\}_{j\in\mathcal{J}}$, то снова изменение знака базисных столбцов достигается изменением знака соответствующих строк таблицы.

Поступила в редакцию
20.I. 1970 г.