УДК 512.25/26

# НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ НАХОЖДЕНИЯ КОМИТЕТА ПРИ РАСПОЗНАВАНИИ ОБРАЗОВ И ИХ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ В КАЧЕСТВЕ НЕФОРМАЛЬНОГО БЛОКА ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МЕТОДОВ

Вл.Д.Мазуров, В.И.Тягунов

## 1. Введение

Признаки, по которым производится обращение к той или иной части программы решения задачи вычислительной математики, не всегда удается формализовать. Здесь предлагается использовать в этом случае методы распознавания образов. Например, можно пытаться применить их в задаче безусловной минимизации выпуклой функции многих вещественных переменных – при выборе метода минимизации и также при выборе шага в конкретном алгоритме. Примером другой задачи, где возникает неопределенность в выборе метода решения, может служить задача обращения квадратной матрицы. В соответствии с предлагаемым подходом ЭВМ сначала решает несколько задач данного класса, и на этом материале "учится" достаточно эффективно решать задачи такого класса.

В настоящей статье приводится обоснование метода комитетов распознавания образов [1] и его использование в релаксационном методе [2] решения задачи линейного программирования; последняя состоит в нахождении точки $x \in R^n$, доставляющей

$$\tilde{m} = \min\{(c,x) \mid (c_j,x)-a_j \le 0 \quad (j=1,\dots,m)\}.$$

В релаксационном методе (в его реализации, применяемой здесь) строится последовательность $\{x_k\} \subset R^n$ согласно формуле

$$x_{k+1} = x_k - \delta_k \cdot \frac{1}{\|c_{j_k}\|^2} \cdot \left[(c_{j_k},x_k)-a_{j_k}\right] c_{j_k} - \varepsilon_k c ,$$

где

$$\frac{1}{\|c_{j_k}\|}\left[(c_{j_k}, x_k) - a_{j_k}\right] = \max_{j=1,\dots,m} \frac{1}{\|c_j\|}\left[(c_j, x) - a_j\right];$$

$$\delta_k = \begin{cases} 0, & (c_{j_k}, x_k) - a_{j_k} \le 0, \\ 1, & (c_{j_k}, x_k) - a_{j_k} > 0; \end{cases}$$

$$\varepsilon_k > 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Коэффициент $\varepsilon_k$ называется шагом итерации. Задача состоит в наиболее эффективном выборе его при каждой итерации. В [2] доказана, в частности, теорема о сходимости последовательности $\{(c, x_k)\}$ к числу $\tilde{m}$ при условиях: $\varepsilon_k \to 0$ $(k \to +\infty)$, $\sum_1^\infty \varepsilon_k = +\infty$. Однако если выбирать $\varepsilon_k$ в соответствии с этими условиями, то сходимость может оказаться слишком медленной. Более целесообразно считать с постоянным $\varepsilon_k$ до тех пор, пока не прекратится продвижение к оптимуму; тогда $\varepsilon_k$ следует делить пополам. Распознавание того момента, когда нужно делить шаг итерации, можно поручать человеку или машине.

Трудность в формализации признака перехода к меньшему шагу связана с тем, что последовательность $\{x_k\}$ при постоянном шаге итерации расходится. Можно было бы находить этот признак, исходя из свойств предельного множества, но эти свойства недостаточно изучены. В [3] доказана конечность множества предельных точек последовательности $\{x_k\}$, полученной с постоянным шагом итерации, только при довольно сильных предположениях.

## 2. Метод комитетов

Для различения двух образов (представляемых формально множествами $M'$ и $N'$ элементов пространства $R^n$) используется знание конечных подмножеств $M \subset M'$, $N \subset N'$. При этом требуется найти разделяющую функцию $f(c) = f(c_1, \dots, c_n)$, для которой

$$\{f(c) \mid c \in M\} \cap \{f(c) \mid c \in N\} = \varnothing.$$

Если классом, в котором отыскивается разделяющая функция $f$, является класс линейных функционалов, т.е. если $f(c) = \sum_{i=1}^n f_i c_i$, то неизвестные $f_1, \dots, f_n$ могут быть найдены из системы линейных неравенств:

$$\begin{cases} (c, f) > 0 & (c \in M), \\ (c, f) < 0 & (c \in N) \end{cases} \qquad (1)$$

при условии, что эта система совместна. Если же система (I) несовместна, то можно воспользоваться следующим понятием комитета [4].

Комитетом системы линейных неравенств (I) над пространством $R^n$ называется такая конечная совокупность $\{f^1, \ldots, f^q\}$ векторов пространства, что каждому неравенству системы (I) удовлетворяет более половины векторов этой совокупности.

При условии, что множество $M \cup \{-c \mid c \in N\}$ не содержит противоположно направленных векторов, существует хотя бы один комитет $\{f^1, \ldots, f^q\}$ системы (I) (см. [I], [4]). Для определения того, к какому множеству: $M'$, $N'$ или $R^n \setminus (M' \cup N')$ – относится произвольный элемент $y \in R^n$, вычисляем скалярные произведения $(f^i \cdot y)$ $(i = 1, \ldots, q)$. Если большинство из чисел $(f^i \cdot y)$ положительны, то считаем, что $y \in M'$; если большинство из них отрицательны, то $y \in N'$; в последнем из возможных случаев $y \in R^n \setminus (M' \cup N')$. При этом из определения комитета следует, что элементы множества $M$ будут отнесены к $M$, $N$ – к $N'$, т.е. множества $M$ и $N$ действительно разделены.

## 3. Алгоритм нахождения комитета

Идея предложенного в [5] алгоритма нахождения комитета состоит в следующем. Строится отображение $\varphi: R^n \to R^2$, при котором фиксированное множество в $R^n$, не содержащее противоположно направленных векторов, переводится в множество двумерных векторов, обладающее тем же свойством. Затем строится комитет $\{h^1, \ldots, h^q\}$ для разделения множеств $\varphi(M)$ и $\varphi(N)$, а из него с помощью простого преобразования $\psi: R^2 \to R^n$ получается комитет $\{\psi(h^1), \ldots, \psi(h^q)\}$ для разделения множеств $M, N \subset R^n$. Приведем обоснование алгоритма.

Введем обозначения:

$$c_j = (a_{j1}, \ldots, a_{jn}) \quad (j = 1, \ldots, m),$$

$$f = (f_1, \ldots, f_{n-2}),$$

$$f' = (f'_1, \ldots, f'_{n-2}),$$

$$h = (h_1, h_2)$$

Отображения $\varphi$ и $\psi$ задаются формулами:

$$\varphi(c_j)=(a_{jn-1}+\sum_{k=1}^{n-2}a_{jk}f_k,\ a_{jn}+\sum_{k=1}^{n-2}a_{jk}f'_k)\ (j=1,\dots,m),$$

$$\psi(h)=(f_1h_1+f'_1h_2,\ f_2h_1+f'_2h_2,\dots,f_{n-2}h_1+f'_{n-2}h_2,\ h_1,h_2).$$

ЛЕММА 1. Если множество $\{h^j=(h_1^j,h_2^j)\mid j=1,\dots,q\}$ является комитетом системы над $R^2$

$$(\varphi(c_j),h)>0\quad(j=1,\dots,m),$$

то множество $\{\psi(h^j)\mid j=1,\dots,q\}\subset R^n$ есть комитет системы над $R^n$

$$(c_j,x)>0\quad(j=1,\dots,m).$$

Доказательство непосредственно следует из того, что

$$(c_j,\psi(h^i))=\sum_{k=1}^{n-2}a_{jk}(f_kh_1^i+f'_kh_2^i)+a_{jn-1}h_1^i+$$

$$+a_{jn}h_2^i=(a_{jn-1}+\sum_{k=1}^{n-2}a_{jk}f_k)h_1^i+$$

$$+(a_{jn}+\sum_{k=1}^{n-2}a_{jk}f'_k)h_2^i=(\varphi(c_j),h^i).$$

ЛЕММА 2. Пусть $c_j\neq 0$ $(j=1,\dots,m)$ и среди векторов $c_j$ нет противоположно направленных. Тогда существуют векторы $f,f'\in R^{n-2}$ такие, что среди векторов $\varphi(c_j)$ нет противоположно направленных.

Доказательство. Выберем числа $g_1\neq 0$ и $g'_1\neq 0$ такими, что всякий ненулевой вектор $(a_{jn-1},a_{jn})$ $(j=1,\dots,m)$ неколлинеарен вектору $(g_1,g'_1)$. Тогда при любом $\varepsilon\neq 0$ и $j=1,\dots,m$ векторы $(a_{j2},\dots,a_{jn})$ и $(0,\dots,0,\varepsilon g_1,\varepsilon g'_1)$ неколлинеарны. Выберем $\varepsilon$ настолько малым по абсолютной величине, чтобы из неколлинеарности векторов $(a_{i2},\dots,a_{in})$ и $(a_{j2},\dots,a_{jn})$ следовала неколлинеарность векторов

$$a_{i1}(0,\dots,0,\varepsilon g_1,\varepsilon g'_1)+(a_{i2},\dots,a_{in}),$$

$$a_{j1}(0,\dots,0,\varepsilon g_1,\varepsilon g'_1)+(a_{j2},\dots,a_{jn}).$$

Докажем, что при этом никакие два вектора

$$a_{k1}(0,\dots,0,\varepsilon g_1,\varepsilon g'_1)+(a_{k2},\dots,a_{kn}),$$

$$a_{s1}(0,\dots,0,\varepsilon g_1,\varepsilon g_1')+(a_{s2},\dots,a_{sn})$$

не являются противоположно направленными.

Предположим противное. Пусть найдутся числа $\lambda\neq 0$ и $\mu<0$, для которых

$$(a_{k2},\dots,a_{kn})=\lambda(a_{s2},\dots,a_{sn}), \tag{2}$$

$$\begin{aligned} a_{k1}(0,\dots,0,\varepsilon g_1,\varepsilon g_1')+(a_{k2},\dots,a_{kn}) &= \\ =\mu a_{s1}(0,\dots,0,\varepsilon g_1,\varepsilon g_1')+\mu(a_{s2},\dots,a_{sn}). \end{aligned} \tag{3}$$

Подставим выражение $(a_{k2},\dots,a_{kn})$ из соотношения (2) в равенство (3):

$$\begin{aligned} a_{k1}(0,\dots,0,\varepsilon g_1,\varepsilon g_1')+\lambda(a_{s2},\dots,a_{sn}) &= \\ =\mu a_{s1}(0,\dots,0,\varepsilon g_1,\varepsilon g_1')+\mu(a_{s2},\dots,a_{sn}). \end{aligned}$$

Если $\mu\neq\lambda$, $(a_{s2},\dots,a_{sn})\neq 0$, то получено противоречие с тем, что векторы $(a_{s2},\dots,a_{sn})$ и $(0,\dots,0,\varepsilon g_1,\varepsilon g_1')$ неколлинеарны. Если $(a_{s2},\dots,a_{sn})=0$ или $\mu=\lambda$, то из (2), (3) следует, что векторы $c_k$ и $c_s$ противоположно направлены, что противоречит предположению.

Перейдем к обозначениям: $f_1=\varepsilon g_1$, $f_1'=\varepsilon g_1'$; мы доказали, что среди векторов $(a_{j2},\dots,a_{jn-2},a_{jn-1}+f_1 a_{j1},a_{jn}+f_1' a_{j1})$ $(j=1,\dots,m)$ нет противоположно направленных.

Теперь ясно, что, повторив эту процедуру конечное число раз, получим систему векторов $\{\varphi(c_j)\mid j=1,\dots,m\}$ с требуемым свойством. Лемма доказана.

Из лемм I, 2 и теоремы из [4] вытекает

Т е о р е м а . Если выполняются условия:

$$\frac{c_i}{\|c_i\|}\neq-\frac{c_j}{\|c_j\|}\quad(i,j=1,\dots,m),$$

$$\|c_j\|\neq 0\quad(j=1,\dots,m),$$

то существуют $f,f'\in R^{n-2}$, при которых система

$$(\varphi(c_j),h)>0\quad(j=1,\dots,m)$$

обладает комитетом

$$\{h^j\mid j=1,\dots,q\}\subset R^2$$

и множество

$$\{\psi(h^j)\mid j=1,\dots,q\}\subset R^n$$

есть комитет системы

$$(c_j, x) > 0 \quad (j = 1, \ldots, m).$$

Из теоремы следует, что если множества $M$ и $N$ не имеют общих точек, то система

$$\begin{cases} (c, x) > y & (c \in M), \\ (c, x) < y & (c \in N), \end{cases}$$

где $x \in R^n$, $y \in R^1$ – неизвестные, обладает комитетом. Таким образом, всякие два непересекающихся множества могут быть разделены с помощью комитета. Если отношение числа членов комитета системы линейных неравенств к числу неравенств достаточно мало, то указанное обстоятельство делает метод комитетов весьма эффективным средством разделения множеств. В связи с этим следует заметить, что класс систем линейных неравенств, обладающих комитетами с числом членов не более трех, довольно широк: кроме совместных систем в него входят, в частности, все неприводимо несовместные системы.

Сделаем замечание о выборе векторов $f$, $f'$. Если не заботиться о том, чтобы $f$, $f'$ удовлетворяли условиям леммы 2, то их можно выбирать согласно требованию, что центры тяжести множеств $\varphi(M)$ и $\varphi(N)$ максимально далеки друг от друга; при этом множество $Q_1$ допустимых векторов $f$ и множество $Q_2$ допустимых $f'$ могут быть конечными (например, подмножествами множества вершин $(n-2)$ – мерного единичного куба). Задача выбора $f$ и $f'$ тогда принимает следующий вид: минимизировать функцию

$$\left[\frac{1}{\bar{M}}\sum_{c_j \in M}\left(a_{j n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} a_{jk} f_k\right) - \frac{1}{\bar{N}}\sum_{c_j \in N}\left(a_{j n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} a_{jk} f_k\right)\right]^2 +$$

$$+\left[\frac{1}{\bar{M}}\sum_{c_j \in M}\left(a_{jn} + \sum_{k=1}^{n-2} a_{jk} f'_k\right) - \frac{1}{\bar{N}}\sum_{c_j \in N}\left(a_{jn} + \sum_{k=1}^{n-2} a_{jk} f'_k\right)\right]^2$$

неизвестных $f$, $f'$ (где $\bar{M}$ и $\bar{N}$ – мощности множеств $M$ и $N$) при условиях:

$$f \in Q_1, \quad f' \in Q_2.$$

Очевидно, что эта задача разделяется относительно переменных $f$, $f'$.

## 4. Применение метода комитета к задаче разделения подмножеств множества вершин $n$-мерного единичного куба.

При фиксированных множествах $M$ и $N$ число членов комитета двумерной системы

$$\begin{cases} (\varphi(c), h) > 0 & (c \in M), \\ (\varphi(c), h) < 0 & (c \in N), \end{cases}$$

поставленной в соответствие системе (I), определяется выбором векторов $f$ и $f'$. Пусть система (I) имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{n} c_{jk}^{M} f_k > 0 \quad (j=1,2,\ldots,s),$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_{jk}^{N} f_k < 0 \quad (j=1,2,\ldots,t).$$

Если $c_{jk} \in \{0,1\}$, то числа $p_k = \frac{1}{s}\sum_{j=1}^{s} c_{jk}^{M}$ и $p'_k = \frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} c_{jk}^{N}$ являются статистическими вероятностями событий $c_{jk}^{M}=1$ и $c_{jk}^{N}=1$ соответственно. Для $p_k \neq 0$ и $p'_k \neq 0$ рассмотрим условия:

$$\frac{p_k - p'_k}{p_k} \geq a, \tag{4}$$

$$\frac{p'_k - p_k}{p'_k} \geq a, \tag{5}$$

где $1 > a > 0$, $a$ фиксировано.

Коэффициенты $p_k$, удовлетворяющие условию (4), умножим на произвольно выбранное $\alpha >> 1$, а коэффициенты $p'_k$ удовлетворяющие условию (5), на $-\alpha$; тогда векторы $p$ и $p'$ преобразуются в векторы

$$\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n), \quad \ell' = (\ell'_1, \ldots, \ell'_n).$$

Преобразуем теперь векторы $c_j$ в двумерные:

$$d_j^M = \left(a_{jn-1}^M + \sum_{k=1}^{n-2} a_{jk}^M \ell_k,\ a_{jn}^M + \sum_{k=1}^{n-2} a_{jk}^M \ell'_k\right),$$

$$d_j^N = \left(-a_{jn-1}^N - \sum_{k=1}^{n-2} a_{jk}^N \ell_k,\ -a_{jn}^N - \sum_{k=1}^{n-2} a_{jk}^N \ell'_k\right),$$

и рассмотрим систему линейных неравенств над пространством $R^2$:

$$\begin{cases} (d_j^M, h) > 0 & (j=1, \ldots, s), \\ (d_j^N, h) > 0 & (j=1, \ldots, t). \end{cases} \qquad (6)$$

Следует ожидать, что число членов минимального комитета (т.е. комитета с минимальным числом членов) системы (6) достаточно близко к числу членов минимального комитета системы (I).

Однако описанный метод нахождения комитета не позволяет в общем случае найти комитет с минимальным числом членов, который, по-видимому, является оптимальным для разделения двух множеств. Найти минимальный комитет можно, отыскав решения всех максимальных совместных подсистем (м.с.п.) системы

$$(c_j, x) > 0 \quad (j=1, \ldots, m) \qquad (7)$$

по одному решению для каждой м.с.п.. Любое такое решение $x^j \in R^n$ $(j=1, \ldots, s)$ определит множество $\mathcal{J}_j$ номеров неравенств системы (7), которым оно удовлетворяет. Поставим в соответствие каждому множеству $\mathcal{J}_j$ . $m$ -мерный вектор $A_j$ такой, что его $i$ -я координата равна единице, если $i \in \mathcal{J}_j$, и нулю, если $i \notin \mathcal{J}_j$ .

Тогда задача отыскания минимального комитета превращается в следующую задачу целочисленного программирования.

Найти

$$\min (x_1 + \ldots + x_s) \qquad (8)$$

при условиях :

$$\left. \begin{aligned} & 2(x_1 A_1 + \ldots + x_s A_s) > \begin{pmatrix} x_1 + \ldots + x_s \\ \ldots\ldots \\ x_1 + \ldots + x_s \end{pmatrix}, \\ & x_i \geq 0 , \quad x_i \text{ - целые} \qquad (i=1, \ldots, s). \end{aligned} \right\} \qquad (9)$$

Обратимся теперь к задаче нахождения всех м.с.п. системы (7). Рассмотрим функцию одной вещественной переменной

$$\operatorname{Sign} t = \begin{cases} 1, & t > 0, \\ -1, & t < 0. \end{cases}$$

Задача нахождения всех м.с.п. системы (7), очевидно, сводится к задаче нахождения всех локальных минимумов функции

$$g(x) = \sum_{j=1}^{m} \operatorname{Sign} (c_j, x)$$

при условии $\|x\| = 1$. При практическом использовании этого замечания следует заменить функцию $Sign\, t$ некоторым ее непрерывным приближением.

По предложенному в пункте 3 методу проведен эксперимент обучения ЭВМ БЭСМ-2М распознаванию рукописных цифр 2 и 8. Цифры изображались на поле рецепторов размерности 10 х 10. Всего в эксперименте использовались 311 изображений, из них 154 изображения цифры 2 и 157 - цифры 8. Цифры вводились в машину в двоичном коде. Материал обучения состоял из 40 представителей образа "цифра 2" и 40 представителей образа "цифра 8". Остальные цифры предъявлялись машине для распознавания при экзамене. Был найден комитет соответствующей системы линейных неравенств. Он состоял из пяти членов. Результат эксперимента: 96,5 % цифр были правильно классифицированы машиной.

## 5. Обучение машины выбору шага итерации в релаксационном методе решения задачи линейного программирования

Был проведен эксперимент по обучению ЭВМ М-20 распознаванию момента, когда целесообразен переход к меньшему шагу итерации. Рассматривалась задача линейного программирования: найти

$$\tilde{m} = \min\{(c,x) \mid (c_j \cdot x) - a_j \le 0 \ \ (j=1,\dots,m)\}.$$

Во всех случаях система

$$(c_j, x) - a_j \le 0 \quad (j=1,\dots,m) \qquad (10)$$

выбиралась совместной, и $\min(c,x)$ достигался в единственной точке $x_0$, удовлетворяющей системе (10).

Материалом обучения служили подпоследовательности составленные из $17 \cdot m$ точек, взятых подряд; по виду этих подпоследовательностей нужно судить о том, следует ли делить шаг итерации пополам. Обучение машины было проведено с помощью метода комитета. Эта процедура позволяет найти признаки наступления момента, в который следует уменьшить $\varepsilon_k$. При несколько другом подходе материалом обучения являлись конечные подпоследовательности числовой последовательности $\{(c, x_k)\}$. Результаты экспериментов являются обнадеживающими, но эксперимент должен быть продолжен.

## Литература


1. Вл.Д.Мазуров, О построении комитета системы выпуклых неравенств. Кибернетика, 1967, № 2.
2. И.И.Еремин, Вл.Д.Мазуров. Итерационный метод решения задачи выпуклого программирования. ДАН СССР, 1966, т.170, № 1.
3. Вл.Д.Мазуров. Некоторые итерационные методы решения задач выпуклого программирования. Сб. "Математические методы в некоторых задачах оптимального планирования" под ред. И.И.Еремина, изд-во УФАН, Свердловск, 1967.
4. C.M.Ablow, D.J.Kaylor. Inconsistent homogenous linear inequalities. Bul. Amer. Math. Soc., 1965, vol.71, N 5.
5. Вл.Д.Мазуров. Об одном методе обучения машины интерпретации геофизических данных. Сб. "Применение математических методов в горнорудной и металлургической промышленности". Свердловск, 1968.



Поступила в редакцию
30.10. 1969 г.